

RACHUNEK CAŁKOWY

Rachunek różniczkowy pozwala nam rozwiązać następujące zadanie: mając funkcję ciągłą $f(x)$, znaleźć jej pochodną. Nie podaje on nam jednak sposobu rozwiązywania zagadnienia odwrotnego: mając daną pochodną $f'(x)$, znaleźć dla niej funkcję pierwotną $F(x)$ t.j. taką, aby

$$F'(x) = f(x)$$

Gdyśmy postawili zagadnienie w ten sposób, nasuwają się nam zaraz trzy pytania:

- 1/ czy dla każdej funkcji $f(x)$ istnieje funkcja pierwotna ?
- 2/ ile funkcji pierwotnych posiada $f(x)$?
- 3/ jaki związek zachodzi między funkcjami pierwotnymi tej samej pochodnej $f(x)$?

Na pierwsze pytanie odpowiedź jest prosta: o ile się ograniczymy do funkcji ciągłych, udowodnimy niebawem, że dla każdej funkcji ciągłej $f(x)$ można znaleźć funkcję pierwotną $F(x)$. Łatwo jest dać również odpowiedź na pozostałe dwa pytania: ponieważ pochodna sumy równa się sumie pochodnych składników, zaś pochodna liczby stałej równa się zero, więc wszystkie funkcje, różniąc się o liczbę stałą, mają tę samą

pochedną. Odwrotnie: jeżeli istnieje jedna funkcja pierwotna, to możemy otrzymać ich nieskończenie wiele, przez dodawanie liczb stałych. Gdy funkcją pierwotną danej funkcji $f(x)$ jest $F(x)$, to jest nią i $F(x)+C$, gdzie C jest dowolną liczbą stałą. Jeżeli bowiem;

$$F'(x) = f(x)$$

to również $(F(x)+C)' = F'(x) + C' = f(x)$

Dowodźmy twierdzenia odwrotnego, że wszystkie funkcje pierwotne danej funkcji $f(x)$ różnią się od siebie tylko o liczbę stałą. Oznaczmy dwie dowolne funkcje pierwotne tej samej funkcji $f(x)$ przez $F_1(x)$ i $F_2(x)$ i utwórzmy różnicę

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x)$$

Ponieważ $F_1(x)$ i $F_2(x)$ są funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x)$, więc

$$\begin{aligned} F_1'(x) &= f(x) \\ F_2'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

A zatem.

$$\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$

Oznaczmy dwie dowolne wartości x w przedziale, w której funkcję badamy, przez x_1 , x_2 . Na mocy znanego wzoru możemy napisać:

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = (x_2 - x_1) \varphi'(c_1)$$

gdzie c_1 jest liczbą stałą zawartą pomiędzy x_1 i x_2 .

Ponieważ zaś $f'(C_1) = 0$ więc $f(x_2) = f(x_1)$
czyli $f(x) = C$

gdzie C jest liczbą stałą. A więc

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Jeżeli $f(x)$ jest pochodną funkcji $F(x)$ wówczas funkcję pierwotną $F(x)$ nazywamy c a ł k ą funkcji $f(x)$. Działanie, za pomocą którego wyznaczamy $F(x)$, mając $f(x)$, nazywa się c a ł k o - w a n i e m. Dla zaznaczenia związku pomiędzy $f(x)$ i $F(x)$ posługujemy się symbolem

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Korzystając z podstawowych wzorów dla różniczkowania funkcji prostych i złożonych, będziemy mogli wykonać działanie odwrotne, t.j. mając pochodną danej funkcji, znajdować funkcję względem tej pochodnej pierwotną czyli jej całkę.

Z wzorów na różniczkowanie funkcji:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

oraz

$$[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$$

wynikają bezpośrednio wzory:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

Niech będzie dana funkcja

$$F(x) = x^n$$

Jak wiemy pochodną tej funkcji jest

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} = f(x)$$

Odwrotnie: całką funkcji

$$f(x) = n \cdot x^{n-1}$$

będzie

$$F(x) = x^n$$

Zauważmy, że wzór ten jest niesłuszny, gdy $n = -1$.

W ten sam sposób możemy się przekonać, że

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Następnie niech będzie daną funkcja $f(x) = \log x$

Pochodną tej funkcji, gdy $x > 0$, jest

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

A więc

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x$$

Gdy zaś $x < 0$, to

$$[\log(-x)]' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

skąd

$$\int \frac{1}{x} dx = \log(-x)$$

Można ująć oba przypadki w jeden wzór:

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x$$

Ponieważ mamy wzory

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

wieć

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

oraz

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

Zupełnie tak samo możemy znaleźć całki szeregu innych funkcji. Najważniejsze z nich są podane na poniższej tablicy

| Funkcja dana | Funkcja pierwotna | Funkcja dana | Funkcja pierwotna |
|--------------------------|---------------------------|--------------------------|--------------------------|
| x^n | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\operatorname{Ch} x$ | $\operatorname{Sh} x$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\log x $ | $\operatorname{Sh} x$ | $\operatorname{Ch} x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ | $\operatorname{argSh} x$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{argCh} x$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{argTh} x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\operatorname{arcsin} x$ | | |

Różniczkując w dalszym ciągu funkcje złożone, znajdziemy funkcje względem nich pierwotne, np

$$[\log(ax^2+2bx+c)]' = \frac{2ax+2b}{ax^2+2bx+c}$$

Stąd

$$\int \frac{ax + b}{ax^2 + 2bx + c} dx = \frac{1}{2} \log(ax^2 + 2bx + c)$$

Uwzględniając następnie, że

$$(\sqrt{ax^2 + 2bx + c})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2ax + 2b}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$$

otrzymamy

$$\int \frac{ax + b}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} dx = \sqrt{ax^2 + 2bx + c}$$

U w a g a. Należy pamiętać, że w każdym z powyższych przykładów całkowania prawa strona wzoru przedstawia tylko jedną z funkcji pierwotnych względem funkcji, znajdującej się pod znakiem całki: pozostałe funkcje pierwotne otrzymamy, dodając do danej stałą całkowania C .

Korzystając z twierdzenia, że funkcja pierwotna sumy równa się sumie funkcji pierwotnych składników, potrafimy znaleźć funkcję pierwotną wielomianu:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Mianowicie

$$\begin{aligned} \int P_n(x) dx &= a_0 \int x^n dx + a_1 \int x^{n-1} dx + \dots + a_{n-1} \int x dx + \\ &+ a_n \int 1 dx \end{aligned}$$

• więc

$$\int P_n(x) dx = a_0 \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_1 \frac{x^n}{n} + a_2 \frac{x^{n-1}}{n-1} + \dots + a_{n-1} \frac{x^2}{2} + a_n x + C$$

Niech będzie dana teraz funkcja wymierna

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$R(x)$ możemy przedstawić w postaci sumy wielomianu $M(x)$ i ułamka $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$, w którym stopień licznika $P_1(x)$ jest niższy od stopnia mianownika $Q(x)$.

$$R(x) = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$$

stąd

$$\int R(x) dx = \int M(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx$$

Zauważmy, że

$$\left[-\frac{1}{n-1}(x-a)^{1-n} \right]' = -\frac{1}{n-1}(1-n)(x-a)^{-n} = \frac{1}{(x-a)^n}$$

skąd

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}$$

Ten wzór ma sens tylko wtedy, gdy $n \neq 1$. Gdy zaś $n = 1$, to, jak wiemy

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \log|x-a|$$

Przyrównując mianownik ułamka $Q(x)$ do zera i rozwiązując równanie

$$Q(x) = 0$$

znajdziemy dla x n różnych wartości: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, które pozwolą nam rozłożyć $Q(x)$ na czynniki:

$$Q(x) = A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n).$$

Ułamek $\frac{P(x)}{Q(x)}$ będziemy mogli przedstawić jako

sumę ułamków prostych:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{d_1}{x-a_1} + \frac{d_2}{x-a_2} + \frac{d_3}{x-a_3} + \dots + \frac{d_n}{x-a_n}$$

Gdy obliczymy wartości d_1, d_2, d_3 i t.d. łatwo będziemy mogli znaleźć funkcję pierwotną ułamka $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Niech będzie np. funkcja wymierna.

$$\frac{3x+5}{x^2-7x+12}$$

Możemy ją przekształcić w sposób następujący:

$$\frac{3x+5}{x^2-7x+12} = \frac{d_1}{x-3} + \frac{d_2}{x-4} = \frac{x(d_1+d_2)-(3d_2+4d_1)}{(x-3)(x-4)}$$

Porównując ostateczną postać funkcji z jej postacią pierwotną, zauważymy, że

$$d_1 + d_2 = 3$$

oraz

$$4d_1 + 3d_2 = -5$$

Rozwiązując powyższy układ równań, znajdziemy:

$$d_1 = -14$$

$$d_2 = 17$$

A zatem

$$\int \frac{3x+5}{x^2-7x+12} dx = -14 \int \frac{1}{x-3} dx + 17 \int \frac{1}{x-4} dx =$$

$$= -14 \log(x-3) + 17 \log(x-4)$$

Jeżeli pierwiastki są wielokrotne, to rozkład uskuteczniamy trochę inaczej: niech a_1 będzie pierwiastkiem o wielokrotności p_1 i t.d. Wtedy

$$Q(x) = (x-a_1)^{p_1} (x-a_2)^{p_2} \dots$$

Rozkład na ułamki proste ma wtedy kształt:

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)^{p_1} (x-a_2)^{p_2} \dots} = \frac{d_1}{(x-a_1)^{p_1}} + \frac{d_2}{(x-a_1)^{p_1-1}} + \dots + \frac{d_{p_1}}{(x-a_1)} + \frac{r_1}{(x-a_2)^{p_2}} + \dots$$

Uzasadnienie tego rozkładu damy w innej części kursu. Teraz ograniczymy się do przykładów.

Przypuśćmy, że dany jest ułamek

$$\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c} dx = \frac{A}{a} \int \frac{ax+b}{ax^2+2bx+c} dx + \int \frac{Ba-Ab}{a^2x^2+2abx+ac} dx$$

Wiemy, że

$$\int \frac{ax+b}{ax^2+2bx+c} dx = \frac{1}{2} \log(ax^2+2bx+c)$$

Zauważmy następnie, że

$$a^2 x^2 + 2abx + ac - (ax+b)^2 + ac - b^2 = (ac - b^2) \left[\frac{(ax+b)^2}{(ac-b^2)} + 1 \right]$$

Gdy więc

$$1/ b^2 > ac \text{ lub } 2/ b^2 < ac$$

to

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c} dx &= \frac{A}{a} \int \frac{ax+b}{ax^2+2bx+c} dx + \frac{Ba-Ab}{ac-b^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} \right)^2 + 1} = \\ &= \frac{A}{2a} \log(ax^2+2bx+c) + \frac{Ba-Ab}{a\sqrt{ac-b^2}} \arctg \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}}, \end{aligned}$$

ponieważ:

$$\left(\arctg \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} \right)' = \frac{1}{\left(\frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} \right)^2 + 1} \cdot \frac{a}{\sqrt{ac-b^2}}$$

Gdy

$$13/ \quad ac = b^2$$

to

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c} dx &= \int \frac{A}{a} \cdot \frac{ax+b}{ax^2+2bx+c} dx + \int \frac{Ba-Ab}{a^2 x^2 + 2abx + ac} dx = \\ &= \frac{A}{a} \int \frac{ax+b}{ax^2+2bx+c} dx + \int \frac{Ba-Ab}{(ax+b)^2} dx = \\ &= \frac{A}{2a} \log(ax^2+2bx+c) - \frac{Ba-Ab}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} \end{aligned}$$

ZMIANA ZMIENNEJ. Wzór na zmianę zmiennych przy całkowaniu otrzymamy ze wzoru na pochodną funkcji głównej. Wiemy, że jeżeli $y = f(z)$ gdzie $z = \gamma(x)$, to

$$y' = \{f[\varphi(x)]\}' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

Oznaczmy funkcję pierwotną funkcji $f(x)$ przez $F(x)$ i niech $x = \varphi(t)$;

$$F(x) = F[\varphi(t)] = \int f(x) dx$$

Na mocy wyżej napisanego wzoru $F'(x) = f(x)$, a więc

$$\frac{dF(x)}{dt} = F'(x) \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \cdot \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)$$

A stąd

$$\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)]$$

Wzór ten nieraz pozwala sprowadzić całkę daną do prostszej.

P r z y k ł a d I. Daną jest całka:

$$\int \operatorname{tg} x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Oznaczmy $\cos x = t$. W takim razie $x = \varphi(t) = \arccos t$

$$\sin x = \sqrt{1-t^2}$$

$$f[\varphi(t)] = f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}; \quad \varphi'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}};$$

$$\int \operatorname{tg} x \cdot dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \cdot \frac{dt}{-\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{-t} = -\log t = -\log \cos x$$

Piszemy nieraz ostatnio uzasadniony wzór w postaci

następującej:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt,$$

gdzie $x = \varphi(t)$, zaś $dx = \varphi'(t) dt$.

Wówczas będziemy mieli

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} = - \int \frac{dt}{t}$$

gdzie $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$

Przykład 2.

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{a}$$

przyczem $ax+b=t$ oraz $a dx = dt$ ($dx = \frac{dt}{a}$)

W rachunku różniczkowym udowodniliśmy, że

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x)$$

stąd

$$u(x) \cdot v'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' - v(x) \cdot u'(x)$$

Całkując to wyrażenie znajdziemy, że

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

Gdy podstawimy dv zamiast $v'(x) dx$ oraz du zamiast $u'(x) dx$, otrzymamy wzór:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

który nosi nazwę wzoru na całkowanie przez części.

Przypomocy tego wzoru będziemy mogli, np. znaleźć całkę funkcji $\log x$:

$$\int \log x \, dx$$

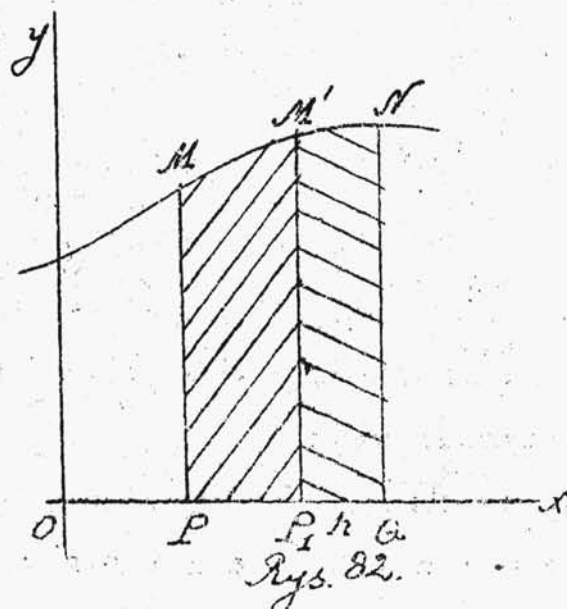
Jeżeli będziemy uważali $\log x$ za u , zaś dx za dv , to będziemy mogli napisać:

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - x + C.$$

DOWÓD ISTNIENIA CAŁKI DLA FUNKCJI CIAGŁEJ I ŚCI-SŁE OKRESLENIE POJECIA POLA. Niech będzie dana funkcja ciągła

$$y = f(x)$$

Obierzmy na odpowiadającym jej wykresie /rys. 82/ punkt stały M oraz punkt $M'(x, y)$. Nazwijmy



pole figury $PMMP'$ przez $S(x)$. Gdy punkt M' posuwać się będzie po krzywej, to, oczywiście, pole będzie się zmieniać: możemy więc uważać to pole za funkcję odciętej punktu M , t.j. x . Możemy utworzyć pochodną tego pola względem zmien-

nej x :