

położonym na prostej $y=x$. Krzywa ta jest więc nieciągła. W dowolnie małym odcinku przeskakuje ona nieskończenie wiele razy od 0 do 1.

POJĘCIE GRANICY.

Zanim wyjaśnimy samo pojęcie granicy, musimy zapoznać się z kilkoma pojęciami podstawowymi, zaczerpniętymi z t.zw. teorii mnogości. Nie będziemy określali zbioru, uważając go za pojęcie pierwotne, niedające się sprowadzić do pojęć prostszych, za pojęcie dla każdego zrozumiałe. Zajmować się będziemy zbiorami, których elementami są liczby i punkty. Zbiory mogą być skończone i nieskończone. Niechaj będzie dany skończony zbiór liczb. Wśród jego elementów musi istnieć pewna liczba największa i pewna liczba najmniejsza. Nic podobnego jednak nie da się powiedzieć o zbiorze nieskończonym. Weźmy np. zbiór złożony z odwrotności kolejnych liczb całkowitych dodatnich

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Ten zbiór nie posiada liczby najmniejszej. Zbiory nieskończone mogą nie posiadać również liczby największej. Gdy mamy zbiór skończony, możemy jego ele-

menty policzyć; dla zbioru nieskończonego pojęcie liczebności jest niezrozumiałe. Zastępuje je poniekąd pojęcie "mocy".

Dwa zbiory są równej mocy kiedy między ich elementami zachodzi odpowiedniość do - skonała. Dwa zbiory równej mocy z trzecim, są oczywiście, także równej mocy /przechodność/.

PRZYKŁADY. Przypuśćmy, że mamy następujące dwa zbiory:

$$\begin{array}{l} \text{11} \quad 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots \\ \text{12} \quad 2, 4, 6, 8, \dots, 2j, \dots \end{array}$$

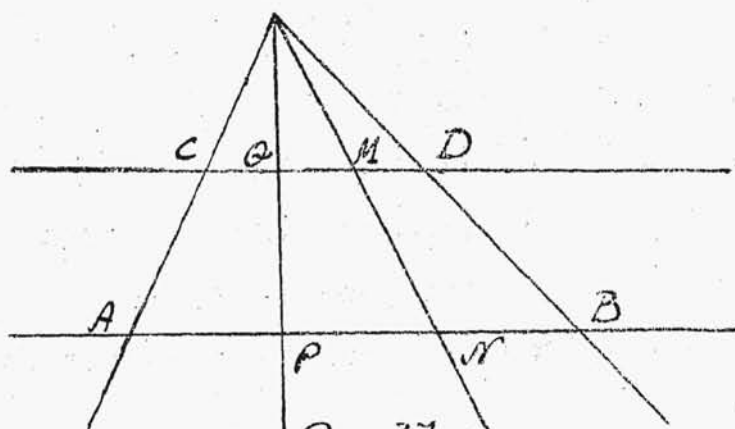
Są one równej mocy: każdej liczbie n zbioru 11 odpowiada liczba $2n$ zbioru 12 ; każdej zaś liczbie m zbioru 12 odpowiada liczba $\frac{m}{2}$ w zbiorze 11 . Są one więc jednakowej mocy, chociaż pierwszy zbiór prócz wszystkich liczb drugiego zbioru posiada nieskończenie wiele innych elementów. Jednakowej mocy są zbiory punktów na dwóch dowolnych odcinkach. Odpowiedniość jest widoczna wprost z rysunku 37 . Teraz niech będzie dany odcinek AB i pro-

mień nieograniczony, wychodzący z punktu C . Wykreślmy przez punkt B równoległą do promienia. Na promieniach, wychodzących z punktu przecięcia tej prostej z

prostą AC ,

leżąc będą punkty odpowiednie obu zbiorów.

Jedynie punkt B jest wyjątkiem: niema na danym promieniu odpowiadającego mu

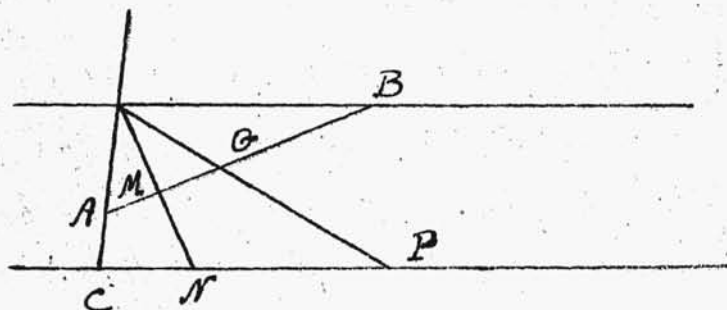


Rys. 37.

punktu. Gdy jednak punkt B z pierwszego zbioru wykluczemy, będziemy mogli powiedzieć, że odpowiedniość

jest doskonała.

Są więc jednakowej mocy; można zresztą dalej okazać, że dodanie lub odrzucenie jednego punktu



Rys. 38.

ktu nie zmienia mocy zbioru.

Najprostszym zbiorem nieskończonym jest zbiór liczb całkowitych dodatnich. K a ż d y z b i ó r, b ę -

dający nam jednakowej mocy
 nazywamy przeliczalnym. Można dać
 inne określenie zbioru przeliczalnego, mianowicie:
 zbiór jest przeliczalny, je-
 żeli można jego elementy po-
 numerować. Przykładem zbioru przeliczalnego
 jest zbiór liczb wymiernych. W rzeczy samej, każdą li-
 czbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka $\frac{l}{m}$.
 Rozważmy teraz liczby dodatnie. Wybieramy ułamki, w
 których suma licznika i mianownika równa się 2. Ta-
 kich ułamków jest tylko jeden: $\frac{1}{1}$. Następnie poszu-
 kajmy ułamków, w których suma licznika i mianownika
 wynosiłaby 3. Istnieją dwa takie ułamki: $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{1}$.
 Ułamki, dla których ta suma równa się 4 - są: $\frac{1}{3}$,
 $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{1}$. Następnie znajdziemy ułamki, dla których suma
 jest liczba 5, 6, 7, Teraz już możemy ponumerować
 wszystkie liczby wymierne: najpierw napiszemy ułamki,
 dla których suma licznika i mianownika równa się 2
 następnie 3, potem 4 i t.d., przy czem będziemy
 zwracali uwagę na to, aby liczniki ułamków o jednako-
 wej sumie wzrastały.

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{4}$...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...

Wzór, wyrażający zależność pomiędzy liczbą całkowitą N i odpowiadający jej ułamkowi $\frac{N}{m}$, jest następujący:

$$N = \frac{(1+m-1)(1+m)}{2} - m + 1$$

Narazie zajmijmy się tylko zbiorami przeliczalnymi. Przypuśćmy więc, że dany jest przeliczalny zbiór liczb. Jeśli liczby jego napiszemy kolejno według pewnego wzoru, otrzymamy ciąg liczb. Ciąg jest dany, gdy znamy prawo tworzenia się wyrazów, gdy więc potrafimy każdy wyraz jego napisać. Ogólna postać ciągu jest następująca:

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n, \dots$$

Każdy wyraz ma określony wskaźnik, numer miejsca kolejnego. Wartość wyrazu jest od wskaźnika zależna, czyli jest jego funkcją. Można więc ciąg napisać w tej postaci:

$$f(1), f(2), f(3), f(4), \dots, f(n), \dots$$

Funkcja ta zależy tylko od całkowitej dodatniej wartości zmiennej n . Ciąg jest dany, gdy dana jest bezpośrednio funkcja w zależności od wskaźnika, np.

$$f(n) = n^2 \quad 1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

$$f(n) = \frac{1}{n} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

$$f(n) = \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n^2} \quad -2, 1, -\frac{8}{9}, 1, \dots$$

Wartość funkcji nie może nie być wyrażoną zapomocą wzoru. Przypuśćmy, że u_n oznacza najmniejszy dzielnik zmiennej n / nie równy 1; w tym wypadku należy dodatkowo określić pierwszy wyraz ciągu, np. $u_1 = 1$. Ciąg będzie następujący.

$$1, 2, 3, 2, 5, 2, 7, 2, 3, 2, 11, 2, 13, \dots$$

Wyrazy ciągu mogą być oznaczone nie bezpośrednio, lecz w zależności od wyrazów poprzednich; np. $u_1 = 1, u_2 = 1$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

W każdym jednak wypadku wyraz ciągu jest funkcją wskaźnika.

Ciągi, podobnie jak wszystkie zbiory, mogą być skończone i nieskończone. Przypuśćmy, że mamy ciąg nieskończony. Niech N oznacza pewną własność jakiejś liczby. Zbadajmy, czy liczby naszego ciągu tę własność posiadają, czy też nie. Mogą zachodzić tutaj trzy zasadniczo różne przypadki:

- /1/ Wszystkie liczby lub "prawie" wszystkie liczby /wszystkie oprócz skończonej ilości liczb/ ciągu własność N posiadają.
- /2/ Żadna, lub "prawie" żadna liczba ciągu tej własności nie posiada.
- /3/ Ani /1/ ani /2/ nie jest prawdą, czyli jest nieskończenie wiele liczb ciągu, tę własność posiadających i nieskończenie wiele liczb, które tej własności nie posiadają.

Rozpatrzmy parę przykładów. Niech będzie ciąg

$1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$

i niech N oznacza własność "jest większe od 10". Zachodzi więc przypadek /1/. Gdy N oznacza "jest mniejsze od 10", zajdzie przypadek /2/. Jeżeli zaś przez N rozumieć będziemy "jest liczbą parzystą", będziemy mieli do czynienia z przypadkiem /3/.

Jeżeli zachodzi przypadek /1/, istnieje zawsze

— pewien wskaźnik n_0 , począwszy od którego wszystkie wyrazy ciągu daną własność posiadają; gdy więc tylko $n > n_0$, to u_n posiada własność H . Przypuśćmy, że istnieje k wskaźników wyjątkowych, dla których własność dana nie jest spełniona:

$$n_1, n_2, n_3, n_4, \dots, n_k$$

Gdy jednak weźmiemy wyrazy ze wskaźnikami większymi od n_k , żadnych liczb wyjątkowych nie będzie. Dla niektórych wyrazów, mających wskaźniki mniejsze od n_k dana własność może być również spełniona. Przypuśćmy, np., że badamy ciąg, którego wyraz ogólny

$$u_n = 100 \cdot \frac{1 + (-1)^n}{n}$$

Gdy n jest liczbą nieparzystą, wyraz odpowiedni jest równy 0; gdy zaś

$$n = 2p, u_n = 100 \cdot \frac{2}{2p} = \frac{100}{p}$$

A więc ciąg będzie następujący:

$$0, 100, 0, 50, 0, \frac{100}{3}, 0, 25, 0, \dots$$

Niech własnością H będzie „ $u_n < 1$ ”. Prawie wszystkie wyrazy ciągu czynią temu warunkowi zadość. Gdy weźmiemy $p > 100$, czyli $n > 200$, wszystkie wyrazy ciągu posiadać będą daną własność. Jednakże wyrazy nieparzyste, mające $n < 200$, również tę włas-

ność posiadają.

WARTOŚĆ BEZWZGŁĘDNA LICZBY. Niech będzie dana liczba $x \neq 0$. Istnieje zawsze liczba x' przeciwna względem x . Z dwóch liczb x i x' jedna musi być dodatnią, tę właśnie nazywamy wartością bezwzględną liczby x i oznaczamy przez $|x|$. Nierówność

$$|x| < 2$$

zastępuje dwie nierówności

$$2 > x > -2$$

Jeżeli

$$|x| = |y|$$

to albo $x = y$ albo $x = -y$.

Wartość bezwzględna sumy nigdy nie jest większa od sumy wartości bezwzględnych składników, czyli

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

W rzeczy samej

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

Jeżeli te nierówności dodamy stronami, otrzymamy

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

To samo można wyrazić, pisząc

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Równość tych wyrażeń zachodzi wtedy, gdy x i y