

jako odpowiadający wyrazowi zawartemu wewnątrz takiego podziału jest $> m+2$, co jest niemożliwe wobec tego, iż $p < n$. Doszliśmy więc do sprzeczności. Ostatecznie: Zbiór wszystkich wartości liczbowych między 0 i 1, a więc w każdym innym przedziale jest nieprzeliczalny.

GRANICA FUNKCJI. Przypuśćmy, że funkcja $f(x)$ jest określona dla wszystkich wartości x w przedziale (a, b) . Pod wyrażeniem " $f(x)$ posiada pewną własność w otoczeniu punktu C " należy rozumieć, że istnieje pewne "otoczenie punktu C ", wewnątrz którego wszystkie wartości $f(x)$ daną własność posiadają t.j., że istnieje taki przedział (d, g) zawierający C że dla wszystkich wartości x zewnątrz tego przedziału prócz, być może, samej wartości C , $f(x)$ posiada daną własność. Tak np. funkcja $f(x) = 1 - x^2$ w otoczeniu punktu zerowego jest mniejsza od jedności albowiem istnieje otoczenie np. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, w którym warunek powyższy zostaje spełniony.

Jeżeli funkcja $f(x)$ w otoczeniu punktu C zbliża się do wartości stałej g tyle i ile wymaga dowolnie mała mia-



ra przybliżeń, mówimy że jest granicą funkcji $f(x)$ w punkcie c . Oznaczamy to symbolicznie pisząc:

$$f(x) \rightarrow g \text{ albo } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = g$$

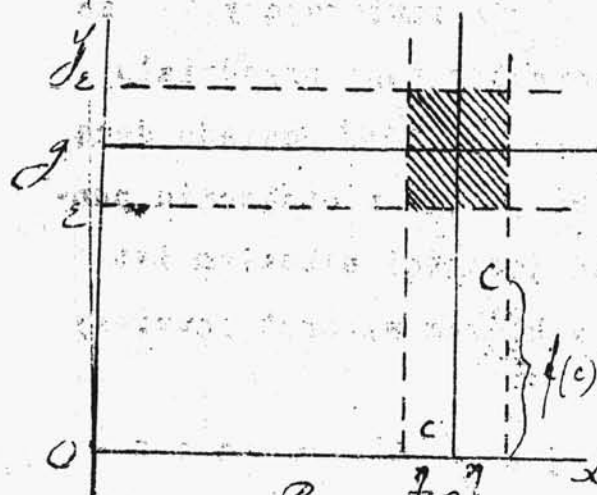
Przechodząc do nierówności, treść poprzednio wy-słowionego określenia wyrazamy w sposób następujący: dla każdego $\varepsilon > 0$ można znaleźć takie $\eta > 0$ (zależne od ε), że

$$|f(x) - g| < \varepsilon$$

dla każdego x spełniającego jedną z dwóch nierówności

$$c < x \leq c + \eta \text{ i } c - \eta \leq x < c$$

W interpretacji geometrycznej otrzymamy krzywą, w której punkty w otoczeniu punktu (c, g) współrzędnych C



Rys. 30.

są zawarte między dwiema równoległymi do osi x . Jedynie punkt $C, f(c)$ może się poza temi równoległymi znajdować

$$f(x) \rightarrow g$$

oznacza, że jakkolwiek mała będzie liczba ε istnieje

takie stoczenie punktu x w nieskończoności, że w tym

otoczeniu funkcja $f(x)$ zbliża się do g , tyle, ile tego wymaga miara przybliżenia, innymi słowy, że można znaleźć taką liczbę $M(\varepsilon)$, zależną od ε , że warunek

$$(1) \quad x > M(\varepsilon)$$

pociąga za sobą nierówność

$$(2) \quad |f(x) - g| < \varepsilon$$

Dla określenia symbolu

$$f(x) \rightarrow g$$

należy w powyższym określeniu znak nierówności (1) zmienić na przeciwny.

Symbol

$$f(x) \rightarrow g$$

wyraża że jakkolwiek wielką będzie liczba $M > 0$ to $f(x) > M$ skoro tylko x należy do otoczenia punktu c , t.j. że można zawsze wyznaczyć taką liczbę $\eta(M)$ zależną od M że dla x spełniającego warunek $(x - c) < \eta(M)$ zachodzi nierówność

$$f(x) > M$$

W podobny sposób można określić, co znaczy

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} -\infty \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty \quad \text{i.t.p.}$$

UWAGA. Należy odróżniać granicę funkcji, gdy zmienne dąży do pewnej wartości, od wartości funkcji przy danej wartości zmiennej: co innego jest $f(a)$, a co

innego $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Różnica jest zresztą widoczna z samego określenia;
/punkt ϵ może do otoczenia nie należeć/;

Często potrzeba rozróżniać otoczenia prawostronne i lewostronne. O funkcji $f(x)$ mówimy, że posiada pewną własność w otoczeniu prawostronnym /lewostronnym/ punktu A , jeżeli dla wszystkich punktów tego otoczenia dana własność zachodzi, to znaczy: jeżeli istnieje taki punkt B położony na prawo /na lewo/ od A , że dana własność zachodzi dla wszystkich punktów zawartych wewnątrz odcinka AB t.j. dla wszystkich wartości x , takich, że $a < x < b$ w pierwszym przypadku, $a > x > b$ w drugim /gdy chodzi o otoczenie lewostronne/. W związku z tem określamy granicę prawo i lewostronną:

Liczba ℓ jest granicą lewostronną funkcji $f(x)$ gdy istnieje taka liczba $\delta > 0$ odpowiadająca liczbie ϵ , że nierówność

$$(1) \quad 0 < a - x < \delta$$

pociąga za sobą nierówność

$$(2) \quad |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Gdy chodzi o granicę prawostronną, należy różnicę $a - x$ zastąpić przez różnicę $x - a$. A więc liczba ℓ jest granicą prawostronną $f(x)$ gdy każdej liczbie $\epsilon > 0$ odpowiada taka liczba $\delta > 0$, zależna od ϵ , że nierów-

ność $(1) 0 < x - a < \delta$ pociąga za sobą nierówność

$$2) |f(x) - l| < \varepsilon$$

Dla odróżnienia granicy lewo - lub prawostronnej od granicy we właściwym tego słowa znaczeniu, używamy pewnych symbolów. Aby mianowicie zaznaczyć, że l jest granicą lewostronną funkcji $f(x)$ piszemy

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a-0} l$$

Nieraz ta granica oznacza się przez $f(a-0)$. Gdy l jest granicą prawostronną, oznaczamy symbolicznie:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a+0} l,$$

samą zaś granicę oznaczamy przez

$$f(a+0).$$

Funkcja może posiadać jednocześnie granicę lewostronną i prawostronną. Gdy są one sobie równe, istnieje granica w zwykłym znaczeniu /tak, jakśmy ją określili poprzednio/.

Weźmy np. już wykreślaną funkcję $y = E(x)$ /rys. 35/. Gdy $0 \leq x < 1$ to $y = 0$, a gdy $-1 \leq x < 0$, to $y = -1$

Z łatwością zauważymy, że istnieje tu granica lewostronna i prawostronna.

Mianowicie:

$$E(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0-0} -1 \quad i \quad E(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0+0} 0$$

W punkcie 0 wartość funkcji jest też równa zero.

ru. Dla tej funkcji należy więc rozróżniać trzy różne wielkości

$$\begin{aligned} f(0-0) &= -1 \\ f(0+0) &= 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Podobnie dla każdej innej funkcji należy rozróżniać $f(a-0)$, $f(a+0)$ i $f(a)$.

TWIERDZENIE. Jeśli $f(a+0)$ istnieje, to każdemu $\varepsilon > 0$ odpowiada liczba $h > 0$ taka, iż warunek

$$1/ \quad a < x' < x'' \leq a+h$$

pociąga za sobą warunek

$$2/ \quad |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

Odwrotnie, jeśli każdemu $\varepsilon > 0$ odpowiada liczba $h > 0$ taka, iż warunek 1/ pociąga za sobą nierówność 2/, to granica prawostronna $f(a+0)$ istnieje.

DOWÓD. I. Jeśli $f(a+0)$ istnieje, to każdemu $\varepsilon > 0$ można podporządkować taką liczbę $h > 0$, iż warunek

$a < x \leq a+h$ pociąga nierówność

$$|f(x) - f(a+0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

To znaczy, iż warunek 1/ pociąga dwie nierówności

$$|f(x'') - f(a+0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad |f(x') - f(a+0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

a stąd

$$|f(x'') - f(x')| \leq |f(x'') - f(a+0)| + |f(x') - f(a+0)| < \varepsilon$$

2/. Wybierzmy w przedziale $(a, a+h)$ ciąg liczb

$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \dots > a_n \dots$ malejący, taki by $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
i utwórzmy odpowiadający ciąg wartości funkcji $f(x)$ t.j.
ciąg $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_n), \dots$

Ciąg ten jest ograniczony od góry i od dołu, ponieważ a_1 można przyjąć jako $= x'$, a a_n jako $= x''$ i w takim razie nasze założenie daje

$$|f(a_n) - f(a_1)| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

czyli dla każdego n ,

$f(a_1) - \frac{\varepsilon}{2} < f(a_n) < f(a_1) + \frac{\varepsilon}{2}$ co dowodzi ograniczoność naszego ciągu nieskończonego. Lecz ciąg ograniczony od góry i od dołu posiada przynajmniej jeden punkt skupienia; niech takim punktem skupienia dla naszego ciągu $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n), \dots$ będzie liczba l . W takim razie, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją wyrazy ciągu, spełniające nierówność

$$|f(a_k) - l| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

Z drugiej strony dla każdej wartości x takiej, iż

$a < x \leq a+h$ mamy, na mocy założenia

$$|f(x) - f(a_k)| < \frac{1}{2} \varepsilon$$

ponieważ także $a < a_k \leq a+h$ i warunek /1/ jest spełniony dla $x = x''$, $a_k = x'$ lecz z 2-ch nierówności poprzednich

$$|f(a_k) - l| < \frac{1}{2} \varepsilon \text{ i } |f(x) - f(a_k)| < \frac{1}{2} \varepsilon \text{ wynika}$$

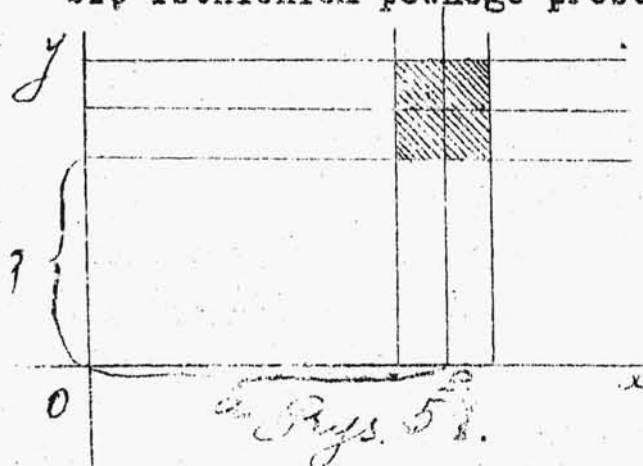
$$|f(x) - l| = |f(x) - f(a_k) + f(a_k) - l| < \varepsilon$$

co dowodzi, iż l jest granicą prawostronną t.j.

$l = f(a+0)$. Tak więc istnienie granicy prawostronnej zostało udowodnione.

Ć w i c z e n i e. Wypowiedzieć i udowodnić analogiczne twierdzenie dla granicy lewostronnej.

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI. Gdy te trzy wielkości $f(a-0)$, $f(a+0)$ i $f(a)$ są sobie równe, powiadamy, że funkcja jest ciągła w punkcie $x=a$. W badanym przez nas przykładzie funkcja $E(x)$ w punkcie 0 nie jest ciągła. Z określenia ciągłości funkcji wynika, że o ile funkcja jest ciągła w punkcie M to musi posiadać granicę, przy czem wartość funkcji w punkcie M równa się tej granicy. W interpretacji geometrycznej ciągłość wyraża się istnieniem pewnego prostokąta o wysokości dowol-



nie małej, wewnątrz którego znajdują się wszystkie punkty krzywej w danym przedziale. Prostokąt otaczający punkt M nazywa się otoczeniem punktu

na płaszczyźnie. Widoczne jest, że poprzednio podane określenie ciągłości funkcji można