

$$+ \frac{m-1}{m+1} \int \sin^2 x \cdot \cos^{m-2} x dx.$$

D O D A T K .

DOWÓD, ŻE RÓWNANIE ALGEBRAICZNE STOPNIA n-go
POSIADA PRZYNAJMNIEJ JEDEN PIERWIASTEK.

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

T w i e r d z e n i e p o m o c n i c z e 1-sze.

Istnieje taka liczba R , że dla $|x| > R$, mamy zawsze $|f(x)| > d$, gdzie d jest dowolną liczbą dodatnią.

W rzeczy samej, wystarczy np. wziąć

$$R = 1 + \frac{A}{|a_0|} + \frac{d}{n|a_0|}$$

gdzie $|a_0|$, oznacza moduł współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x w równaniu $(a_0 x^n)$; n stopień równania

A największy z modułów pozostałych współczynników.

Mamy bowiem, gdy $|x| > R = 1 + \frac{A}{|a_0|} + \frac{d}{n|a_0|}$

$$|f(x)| > |a_0| R^n - A(R^{n-1} + R^{n-2} + \dots + R + 1).$$

Lecz

$$|a_0| \cdot R^n - \frac{A(R^n - 1)}{R - 1} > |a_0| \cdot R^n - \frac{A \cdot R^n}{R - 1} = \left\{ |a_0| - \frac{A}{R - 1} \right\} R^n$$

Tak więc

$$|f(x)| > \left\{ |a_0| - \frac{A}{R - 1} \right\} R^n$$

Podstawiając na miejsce R wartość $1 + \frac{A}{|a_0|} + \frac{d}{n|a_0|}$ mamy

$$|f(x)| > \frac{|a_0| d}{A + d} \left\{ 1 + \frac{A + d}{n|a_0|} \right\}^n - \frac{A + d}{A + d} \left\{ 1 + \frac{A + d}{n|a_0|} \right\}^n > d \left\{ 1 + \frac{A + d}{n|a_0|} \right\}^n$$

Ostatecznie więc $|f(x)| > d$, gdy $|x| > R = 1 + \frac{A}{|a_0|} + \frac{d}{n|a_0|}$

Twierdzenie pomocnicze 2-gie.

Funkcja rzeczywista $F(x,y)$ dwóch zmiennych rzeczywistych x i y , określona i ciągła w pewnym obszarze właściwym A . Przytym do obszaru A zaliczymy i kontur C , ograniczający ten obszar/, posiada kres dolny / i górny/ i przyjmuje dla pewnej wartości zmiennych x,y wewnątrz obszaru A wartość równą kresowi dolnemu /górnemu/.

Jest to twierdzenie analogiczne do podobnegoż twierdzenia, udowodnionego na str. dla jednej zmiennej.

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności.

Podzielmy obszar A na części prostymi równoległymi do osi OX i prostymi równoległymi do osi OY , przyczem odległość między dwoma sąsiednimi równoległymi niech będzie zawsze ta sama d . Nazwijmy te części A_1, A_2, \dots, A_n . Przypuśćmy, że $F(x,y)$ w A kresu dolnego nie posiada. W takim razie jeden przynajmniej z obszarów częściowych A_1, A_2, \dots, A_n nie będzie posiadał kresu dolnego, np. obszar A_k . Postąpmy z obszarem A_k jak z A ; podzielmy go na części, z których jedna przynajmniej znowu posiadać będzie tę samą własność. Mamy tu proces nieskończony, który określa nam punkt (ξ, η) , posiadający tę własność, że w dowolnym otoczeniu tego punktu funkcja $F(x,y)$ kresu dolnego nie po-

siada. Lecz punkt (ξ, η) należy do \mathcal{A} , gdyż wszystkie punkty graniczne punktów obszaru należą do \mathcal{A} . Lecz z ciągłości wynika, że istnieje otoczenie punktu (ξ, η) takie, że każdy punkt (x, y) tego otoczenia spełnia warunek

$$F(\xi, \eta) - \varepsilon < F(x, y) < F(\xi, \eta) + \varepsilon,$$

co jest sprzeczne z nieistnieniem kresu;

Tak więc istnienie kresu zostało udowodnione.

Niech więc k oznacza np. kres dolny. Pozostaje do udowodnienia, że istnieje w \mathcal{A} punkt (x_0, y_0) taki, że $F(x_0, y_0) = k$, czyli że funkcja $F(x, y)$ przyjmuje w \mathcal{A} wartość liczbowa, równą kresowi dolnemu \mathcal{A} .

Wykonajmy ten sam proces kolejnego dzielenia obszaru na części, jak poprzednio. Obszar \mathcal{A} rozpadnie się na $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$. Ponieważ k jest kresem dla \mathcal{A} , więc musi być kresem i dla jednego przynajmniej z tych obszarów częściowych, np. dla \mathcal{A}_k . Utworzymy szereg obszarów, z których każdy następny jest częścią poprzedniego; będą to kwadraty, lub przy konturze, części kwadratów.

Proces ten nieskończony określi nam pewien punkt (x_0, y_0) posiadający tę własność, że w dowolnym obszarze, stanowiącym otoczenie tego punktu, funkcja $F(x, y)$ posiada kres dolny równy k . Powiadamy, że

$$F(x_0, y_0) = k$$

Dowód przez sprowadzenie do sprzeczności. Niech $F(x_0, y_0) = a > k$ przy czym $a \neq k$. Niech ε oznacza liczbę dodatnią $\frac{a-k}{2}$.

Istnieje na mocy ciągłości otoczenie punktu (x_0, y_0) takie, że dla każdego punktu (x, y) tego otoczenia ma miejsce nierówność

$$F(x_0, y_0) - \varepsilon < F(x, y) < F(x_0, y_0) + \varepsilon,$$

czyli
$$F(x, y) > a - \frac{a-k}{2} = \frac{k+a}{2} = k + \frac{a-k}{2},$$

czyli
$$F(x, y) > k + \varepsilon$$

dla każdego p. (x, y) w odpowiednim otoczeniu punktu (x_0, y_0) ; lecz w takim razie dla obszaru, będącego tym otoczeniem, nie będzie kresem dolnym. Jest to sprzeczność z poprzednio otrzymanym wynikiem. Tak więc a musi być $= k$ i $F(x_0, y_0) = k$ p.b.d.d.

U w a g a. $|f(z)|$ czyli moduł funkcji $f(z)$ jest funkcją rzeczywistą dwóch zmiennych rzeczywistych x i y gdzie $z = x + iy$. Jest oprócz tego funkcją ciągłą tych zmiennych. Tak więc $|f(z)|$ jako funkcja zmiennych x, y w każdym obszarze właściwym A przyjmuje wartość największą i najmniejszą.

T w i e r d z e n i e p o m o c n i c z e 3-cie.

Jeśli $|f(a)| \neq 0$, to istnieje wartość zmiennej $z = a + h$

taka, iż $|f(a+h)| < |f(a)|$

Dowód:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a),$$

gdzie $k=1$, ale może być i $k>1$, jeśli $f'(a)=0, f''(a)=0,$

$$f'''(a)=0, \dots, f^{(k-1)}(a)=0, f^{(k)}(a) \neq 0$$

$$\frac{f(a+h)}{f(a)} = 1 + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \frac{h^k}{f(a)} + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} \frac{h^{k+1}}{f(a)} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \frac{h^n}{f(a)}$$

$h = \rho \cdot e^{i\theta}$, uwydatniając moduł ρ i argument θ

Tak samo oznaczmy: $\frac{f^{(m)}(a)}{m! f(a)} = r_m e^{i\theta_m}$

Więc

$$\frac{f(a+h)}{f(a)} = 1 + \rho r_k e^{i(k\theta + \theta_k)} + \rho \cdot r_{k+1} e^{i[(k+1)\theta + \theta_{k+1}]} + \dots + \rho \cdot r_n e^{i(n\theta + \theta_n)}$$

Argument f poddany warunkowi następującemu:

$$k\theta + \theta_k = \pi, \quad \theta = \frac{\pi - \theta_k}{k}$$

wzór poprzedni przyjmie wskutek tego ograniczenia

postać:

$$1) \quad \frac{f(a+h)}{f(a)} = 1 - \rho r_k + \rho \cdot r_{k+1} e^{i[(k+1)\theta + \theta_{k+1}]} + \dots + \rho \cdot r_n e^{i(n\theta + \theta_n)}$$

Nieoznaczony moduł f poddajemy warunkowi, by

$1 - \rho \cdot r_k > 0$, czyli wybieramy ρ w ten sposób, by

$$2) \quad \rho < \frac{1}{r_k}$$

Ze wzoru 1), przechodząc do modułów, otrzymamy:

my:

$$\left| \frac{f(a+h)}{f(a)} \right| \leq 1 - \rho \cdot r_k + \rho \cdot r_{k+1} + \dots + \rho \cdot r_n$$

czyli

$$\left| \frac{f(a+h)}{f(a)} \right| \leq 1 - \rho \cdot r_k \left\{ 1 - \frac{r_{k+1}}{r_k} \rho + \dots + \frac{r_n}{r_k} \rho^{n-k} \right\}$$

Niech R oznacza największą z liczb $\frac{r_{k+1}}{r_k}, \frac{r_{k+2}}{r_k}, \dots, \frac{r_n}{r_k}$.
Z nierówności /3/ wynika wtedy:

$$\frac{|f(a+h)|}{|f(a)|} \leq 1 - \rho \cdot r_k \{1 - R \rho (1 + \rho + \dots + \rho^{n-k+1})\} = 1 - \rho \cdot r_k \left\{1 - R \rho \frac{1 - \rho^{n-k+1}}{1 - \rho}\right\}$$

Przyjmijmy jeszcze, że ρ oprócz warunku /2/ spełnia niesprzeczny z nim warunek: $\rho < 1$

Wtedy

$$\frac{|f(a+h)|}{|f(a)|} < 1 - \rho \cdot r_k \left\{1 - \frac{R \cdot \rho}{1 - \rho}\right\}$$

Poddajmy ρ jeszcze trzeciemu warunkowi:

/5/ $\rho < \frac{\varepsilon}{R+1}$, gdzie $0 < \varepsilon < 1$;

to wtedy

$$\frac{R \cdot \rho}{1 - \rho} < \varepsilon, \quad 1 - \frac{R \cdot \rho}{1 - \rho} > 1 - \varepsilon = \eta.$$

Tak więc, jeśli: $\rho < \frac{\varepsilon}{R+1}$ a ρ spełnia jednocześnie warunki /2/ i /5/, to z /4/ wynika

$$\frac{|f(a+h)|}{|f(a)|} < 1 - \eta \cdot \rho \cdot r_k.$$

$1 - \eta \cdot \rho \cdot r_k$ jest na zasadzie warunku /2/ liczbą dodatnią, mniejszą, oczywiście, od jedności.

Tak więc

$$\frac{|f(a+h)|}{|f(a)|} < 1 \quad \text{czyli } |f(a+h)| < |f(a)|, \quad \text{co b.d.d.}$$

Twierdzenie zasadnicze.

Istnieje liczba ε taka, że $f(\varepsilon) = 0$

Niechą będzie dowolną liczbą. Można przypuścić, że $f(a) \neq 0$, gdyż inaczej twierdzenie byłoby spełnione. Zatoczmy ze środka O spókrzędnych koło ρ o promieniu R takim, by zewnątrz tego koła było: $|f(z)| > |f(a)|$ jest to możliwe na zasadzie twierdzenia pomocniczego

1-go. Punkty, dla których $|z| \leq R$, leżące wewnątrz lub na kole G , utworzą obszar A .

W obszarze A jest funkcją ciągłą zmiennych x i y , posiada więc według twierdzenia pomocniczego 2-go kres dolny dla pewnej wartości z , którą nazwiemy ξ .

Powiadam, iż jest $f(\xi) = 0$

Gdyby bowiem $f(\xi) \neq 0$, to na zasadzie twierdzenia pomocniczego 3-go można było znaleźć wartość ξ' taką, iż $|f(\xi')| < |f(\xi)|$. Lecz na zasadzie twierdzenia pomocniczego 1-go łatwo widzieć, że ξ' musi być w obszarze A , a zatem $f(\xi)$ nie byłoby kresem dolnym wartości funkcji $f(z)$ wewnątrz A ; czyli przypuszczenie, że $f(\xi) \neq 0$ doprowadza do sprzeczności.

A więc musi być $f(\xi) = 0$, c.b.d.d.

K O N I E C .



11869