

ność posiadają.

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY. Niech będzie dana liczba $x \neq 0$. Istnieje zawsze liczba x' przeciwna względem x . Z dwóch liczb x i x' jedna musi być dodatnią, tę właśnie nazywamy wartością bezwzględną liczby x i oznaczamy przez $|x|$. Nierówność

$$|x| < 2$$

zastępuje dwie nierówności

$$2 > x > -2$$

Jeżeli

$$|x| = |y|$$

to albo $x = y$ albo $x = -y$.

Wartość bezwzględna sumy nigdy nie jest większa od sumy wartości bezwzględnych składników, czyli

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

W rzeczy samej

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$-|y| \leq y \leq |y|$$

Jeżeli te nierówności dodamy stronami, otrzymamy

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

To samo można wyrazić, pisząc

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Równość tych wyrażeń zachodzi wtedy, gdy x i y

posiadają znak jednakowy.

Wartość bezwzględna różnicy nie jest mniejsza od różnicy wartości bezwzględnych odjemnej i odjemnika.

Oznaczmy różnicę $x-y$ przez z . A więc

$$y+z=x$$

Na mocy twierdzenia poprzedniego

$$|y+z| \leq |y| + |z|$$

czyli

$$|x| \leq |y| + |z|$$

stad

$$|z| \geq |x| - |y|$$

A więc

$$|x-y| \geq |x| - |y|$$

W podobny sposób dowiedziemy, że wartość bezwzględna iloczynu równa jest iloczynowi wartości bezwzględnych czynników i wartość bezwzględna ilorazu jest równa ilorazowi wartości bezwzględnych dzielnej i dzielnika, czyli

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x : y| = |x| : |y|$$

GRANICA CIĄGU. Jeżeli mamy ciąg

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

i badamy liczbę tego ciągu pod względem pewnej własności \mathcal{H} to, jak już mówiliśmy, zajść mogą trzy przypad-

ki. Przypuśćmy, że zachodzi przypadek //: W takim razie istnieje taka liczba n_0 , że począwszy od wskaźnika $n > n_0$, wszystkie bez wyjątku wyrazy własność W posiadają. Innymi słowy możemy powiedzieć, że **p r a w i e** wszystkie wyrazy posiadają daną własność albo też, że dany warunek jest spełniony dla wielkich wartości n . Dajmy na to, że ciąg nasz posiada własność następującą: jakkolwiek wielką liczbę wybierzemy począwszy od pewnego wskaźnika, wszystkie wyrazy ciągu są od niej większe. Dla skrócenia mówimy, że „ u_n dąży do nieskończoności” i piszemy

$$u_n \rightarrow \infty$$

Właściwie sam symbol ∞ nie posiada żadnego sensu. Jeżeli w pewnych zdarzeniach go używamy, to jedynie na zasadzie umowy. Zdanie, zawierające wyraz „nieskończoność” lub symbol ∞ , możemy zawsze zastąpić innym zdaniem, nie zawierającym tego wyrazu. Np.

$u_n \rightarrow \infty$, gdy $u_n = n^2$, można powiedzieć: jakkolwiek wielką wybiorę liczbę M , mogę do niej dobrać taką liczbę n_0 , że począwszy od n_0 wszystkie wyrazy ciągu są od M większe. Istotnie, na to, aby zachodziła nierówność

$$n^2 > M$$

potrzebamy:

$$n > \sqrt{M}$$

wystarczy teraz wziąć za n_0 największą liczbę całkowitą, zawartą w \sqrt{M} , czyli $E(\sqrt{M})$; wszelka liczba całkowita $n >$ od takiego n_0 , będzie również większa od \sqrt{M} , a więc warunek żądany będzie spełniony. Można zresztą wziąć za n_0 dowolną liczbę całkowitą

$\geq \sqrt{M}$ - warunek żądany będzie tembardziej spełniony.

Niech będzie dany ciąg

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Gdy $n \rightarrow \infty$, to $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Możemy wyrazić to samo: liczba $\frac{1}{n}$ jest dowolnie małą, gdy tylko n jest dostatecznie wielkie. Gdy obierzemy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, "prawie" ^{*/} wszystkie wyrazy ciągu będą od niej mniejsze. Czyli jakkolwiek małą będzie liczba dodatnia ε , istnieje taki wskaźnik n_0 , zależny od ε , $[n_0(\varepsilon)]$, że wszystkie wyrazy, mające wskaźnik większy od n_0 , są mniejsze od ε .

$$u_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

gdy $n > \frac{1}{\varepsilon}$, czyli można wziąć za n_0 jakkolwiek

^{*/} Terminu "prawie" używamy zawsze w znaczeniu, które było poprzednio ściśle określone.

liczbę całkowitą $\frac{1}{\epsilon}$. Ileż to wybrałszy $\epsilon > 0$ dowolnie małe "prawie" wszystkie liczby naszego ciągu są od ϵ co do wartości bezwzględnej mniejsze, ta właściwość jest spełniona, mówimy, że ciąg dąży do 0 lub ma granicę 0.

Zamiast symboli $u_n \rightarrow 0$ i $u_n \rightarrow 0$ pisze się nieraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Przypuśćmy, że począwszy od pewnego miejsca wyrazy ciągu są ujemne i mogą być mniejsze od dowolnie małej liczby ujemnej. W takim razie piszemy

$$u_n \rightarrow -\infty \quad \text{albo} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$$

Symbol $u_n \rightarrow g$ oznacza, że jakkolwiek małą jest liczba $\epsilon > 0$, różnica pomiędzy wyrazami ciągu i liczbą g , począwszy od pewnego miejsca, jest co do wartości bezwzględnej mniejszą od ϵ . Liczby danego ciągu dążą do g , jeżeli, jakkolwiek małą jest liczba dodatnia ϵ , można wyznaczyć taką liczbę n_0 , że nierówność $n > n_0$ pociąga za sobą nierówność

$$|u_n - g| < \epsilon.$$

Wyrażamy to, pisząc $u_n \rightarrow g$ lub też $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = g$

Niech będzie dany np. ciąg następujący:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}$$

Granica tego ciągu jest liczba 1. W rzeczy samej różnica pomiędzy wyrazami ciągu a jednością, począwszy od pewnego miejsca, jest mniejszą od dowolnie małej liczby dodatniej.

$$1 - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$
$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Wartość bezwzględna różnicy prawie dla wszystkich wyrazów jest mniejsza od ε . Aby

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

musi być

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

więc wystarczy wziąć za n_0 jakąś liczbę całkowitą spełniającą warunek

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Gdy weźmiemy $n > n_0$, wartość bezwzględna różnicy pomiędzy u_n i 1 będzie mniejsza od ε .

U w a g a: Zastrzeżenie, że n_0 ma być całkowite, nie posiada bynajmniej znaczenia zasadniczego i może być nawet zupełnie usunięte, o ile przez n_0 oznaczamy nie koniecznie **w s k a ś n i k** lecz wogóle **l i -**

o z b e , spełniającą ten warunek, że wyrazy ciągu o wskaźniku n , większym od N_0 , posiadają żadaną własność.

Niech będzie dany ciąg

$$1, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \dots, \frac{n+1}{2n}$$

Wyraz ogólny jest równy

$$u_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Różnica

$$|u_n - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2n}$$

Załóżmy, że $\frac{1}{2n} < \varepsilon$ więc $n > \frac{1}{2\varepsilon}$

Gdy zatem wybierzemy $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, nierówność $|u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ będzie spełniona. Dowodzi to, że ciąg posiada granicę równą $\frac{1}{2}$.

Niewszystkie jednak ciągi dążą do granicy.

Weźmy np. ciąg, którego wyraz ogólny $u_n = (-1)^n$:

$$-1, +1, -1, +1, -1, +1, \dots$$

Ten ciąg granicy nie posiada. Gdyby bowiem granica dla ciągu istniała, to byłoby

$$(1) |u_n - g| < \varepsilon$$

Granica mogłaby być tylko liczba 1 lub -1 . Lecz róż-

nica $|u_n - L|$ przy n parzystym równa się 0, zaś przy n nieparzystym 2; coś podobnego dzieje się z różnicą $|u_n - L|$ przy n parzystym. Więc dla nieskończonej liczby wyrazów nierówność (1) nie jest spełniona, a zatem ciąg granicy nie posiada.

Dowiedzimy teraz, że ciąg może posiadać najwyżej jedną granicę. Przypuśćmy, że ciąg

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

posiada dwie granice g i g' czyli

$$u_n \rightarrow g \quad i \quad u_n \rightarrow g'$$

Założmy w celu ustalenia uwagi, że $g > g'$.

Gdy wybierzemy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, istnieć powinny takie liczby n_0 i m_0 , że nierówności

$$n > n_0 \quad i \quad n > m_0$$

pociągają za sobą nierówności

$$|g - u_n| < \varepsilon \quad i \quad |g' - u_n| < \varepsilon$$

Założmy następnie, że $n_0 \geq m_0$. W takim razie wystarczy, by było $n > n_0$. Niech

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|g - g'|$$

Różnicę $g - g'$ można napisać jako sumę dwóch składników

$$g - g' = (g - u_n) + (u_n - g')$$

Namocy twierdzenia o wartości bezwzględnej sumy

$$|g - g'| \leq |g - u_n| + |u_n - g'|$$

Otóż przy $n > n_0$ każdy z tych dwóch składników jest mniejszy niż ε , więc suma $|g - u_n| + |u_n - g'|$ jest mniejsza niż $\varepsilon + \varepsilon$

Czyli

$$|g - g'| < 2\varepsilon$$

Podstawiając zamiast ε wyrażenie $\frac{1}{2}|g - g'|$, otrzymamy

$$|g - g'| < |g - g'|$$

co jest niedorzecznością. Przypuszczenie zatem, że ciąg posiada 2 granice było fałszywe. A więc granica ciągu jest liczbą jednoznacznie określoną.

W ciągu, posiadającym granicę, można zmienić skończoną liczbę wyrazów, co nie spowoduje zmiany granicy. Inna sprawa, jeżeli zmienimy nieskończoną liczbę wyrazów. Niech będzie np. ciąg

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \dots, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \dots$$

Granica jego jest 0. Zmienimy w ciągu co dziesiąty wyraz, czyniąc go równym 1, czyli zastąpmy $\frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \dots$ przez 1. Nowy ciąg żadnej granicy posiadać nie będzie.

Gdybyśmy w poprzednim ciągu zamiast 1 napisali 0,

granica ciągu pozostałaby ta sama, "prawie" zawsze byłoby

$$2n < \varepsilon$$

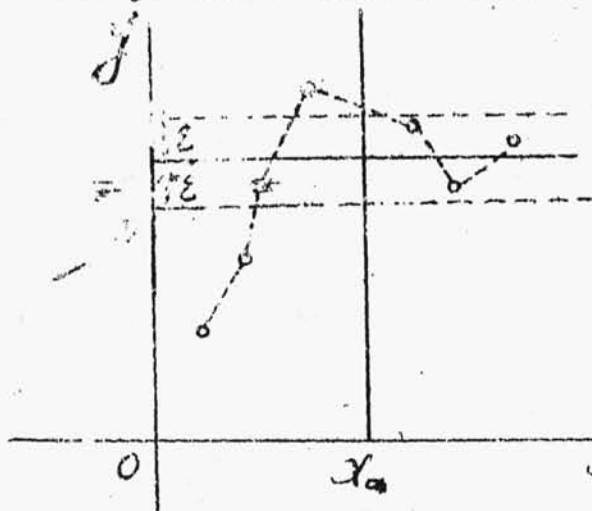
Pojęcie granicy ciągu można zilustrować w sposób geometryczny. Niech będzie dana funkcja:

$$y = f(x)$$

gdzie x może przybierać wartości: $1, 2, 3, \dots, n, \dots$; przyczem każdej wartości x odpowiada jeden wyraz ciągu

$$f(1) = 3, f(2) = 2, \dots, f(n) = u_n, \dots$$

Wykres danej funkcji nie będzie krzywą ciągłą, gdyż wartości odciętej mogą być tylko liczbami całkowitemi; otrzymamy natomiast zbiór punktów odosobnionych. Przypuśćmy teraz, że granicą ciągu jest liczba g , czyli że "prawie" wszystkie wyrazy ciągu różnią się od g mniej, niż o dowolnie małą liczbę ε .



$$|u_n - g| < \varepsilon \text{ dla } n > n_0$$

stąd

$$u_n > g - \varepsilon$$

oraz

$$u_n < g + \varepsilon$$

Wykreślmy prostą $y = g$

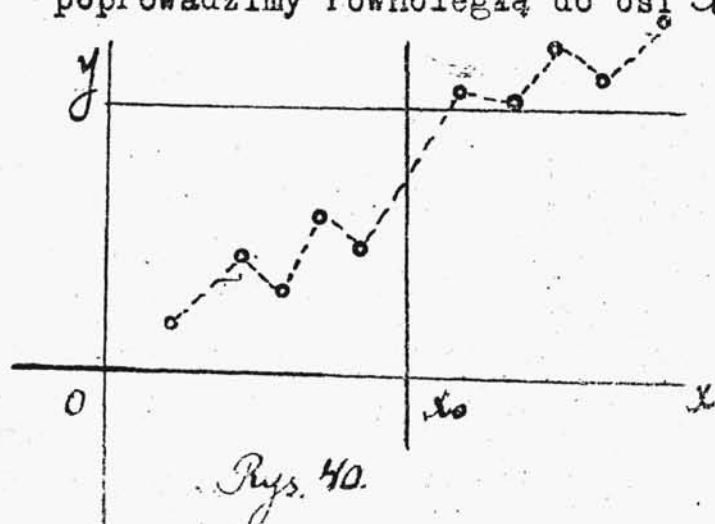
i dwie równoległe do niej:

$$y = g + \varepsilon \text{ i } y = g - \varepsilon$$

Można wykreślić taką prostą

równoległą do osi rzędnych: $x = x_0$ żeby wszystkie punkty wykresu, leżące na prawo od niej, znajdowały się pomiędzy dwiema wyżej wspomnianymi równoległymi do osi x ; przytem na lewo od tej prostej może się znajdować tylko skończona liczba punktów. Odległość pomiędzy danymi równoległymi, czyli liczbą ε możemy dowolnie zmniejszać, co może jedynie spowodować konieczność przesunięcia prostej granicznej, równoległej do osi y , w kierunku dodatnim. Z rysunku jest również rzeczą widoczną, że, począwszy od pewnego miejsca, różnica pomiędzy wyrazami ciągu zbieżnego jest mniejsza od dowolnej liczby 2ε . Jest to ilustracja geometryczna twierdzenia, któreśmy udowodnili poprzednio.

Wyraźmy teraz geometrycznie, że $u_n \rightarrow \infty$, czyli, że gdy $n > n_0$, to $u_n > M$. Jakkolwiek wysoko poprowadzimy równoległą do osi x , zawsze można wykre-



ślić taką prostą równoległą do osi y , aby wszystkie punkty, położone na prawo od niej, znajdowały się nad pierwszą prostą; przytem na lewo od tej prostej może być

tylko skończona liczba punktów.

Mogłoby się zdawać, że o ile wartość bezwzględna wyrazów ciągu rośnie nieograniczenie, to ciąg dąży do nieskończoności. Łatwo się jednak przekonać, że tak nie jest. Weźmy np. ciąg, dla którego

$$u_n = (-1)^n \cdot n$$

Nie dąży on do żadnej granicy, ani nie rośnie nieograniczenie.

Albo niech

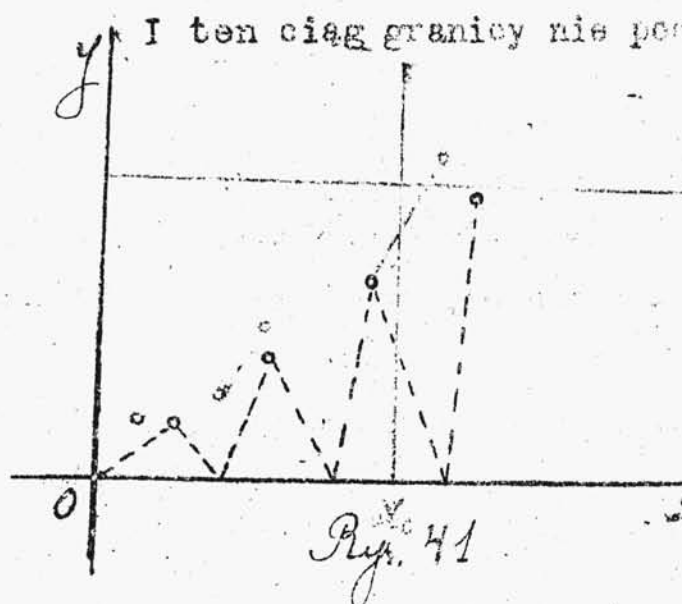
$$u_n = [1 + (-1)^n] \cdot n$$

W tym ciągu

$$u_{2k+1} = 0, \quad u_{2k} = 4k$$

więc ciąg będzie następujący:

$$0, 4, 0, 8, 0, 12, 0, \dots$$



Rys. 41

I ten ciąg granicy nie posiada, nie można bowiem określić takich dwóch równoległych, pomiędzy którymi znajdowałyby się "prawie wszystkie" punkty, odpowiadające wyrazom ciągu. Nie dąży on również do nieskończoności: niema takiej prostej, ponad którą

leżałyby "prawie wszystkie punkty".

Zobaczmy teraz, jaką własność posiadają ciągi, jeżeli nie dążą do granicy. Przedewszystkiem nierówność

$$|u_n - g| < \varepsilon$$

nie będzie "prawie zawsze" spełniona. A więc dla nieskończonej liczby wyrazów musi być spełniona nierówność przeciwna:

$$|u_n - g| > \alpha$$

gdzie $\alpha = \varepsilon$. Nierówności te jasno wyrażają, czy dana liczba jest granicą, czy też nie. W ostatnim przypadku nieskończenie wiele punktów leżeć musi nazewnątrz dwóch równoległych, wspomnianych w poprzedniej interpretacji geometrycznej.

TWIERDZENIE o ciągu utworzonym z wyrazów ciągu zbieżnego:

Niech będzie dany ciąg

$$(1) u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

i przypuśćmy, że $u_n \rightarrow g$. Utwórzmy nowy ciąg, którego wyrazy stanowią część wyrazów poprzedniego:

$$(2) v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$$

Dowodziemy, że posiada on tę samą granicę, co ciąg (1), czyli, że $v_n \rightarrow g$. W rzeczy samej, ponieważ ciąg (1) dąży do g , więc nierówność

$$|u_n - g| < \varepsilon$$

może się spełniać tylko dla skończonej liczby wyrazów;
natomiast "prawie zawsze" zachodzi nierówność przeciwna.
Utwórzmy nierówność

$$|u_n - g| > \alpha.$$

Ponieważ liczby u_n stanowią część liczb u_n ,
więc nierówność ta może być spełniona tylko dla niektó-
rych wartości wskaźnika n . "Prawie zawsze" więc musi
się spełniać nierówność przeciwna

$$|u_n - g| < \alpha.$$

A zatem

$$u_n \rightarrow g.$$

Podobnie, jeżeli zmienimy w ciągu porządek wyra-
zów, granica ciągu pozostanie bez zmiany.

CIĄGI ROSNĄCE I MALEJĄCE. Motonicznym nazywa się
ciąg, w którym każdy następny wyraz nie jest mniejszy
od poprzedniego, albo ciąg, w którym każdy następny
wyraz nie jest większy od poprzedniego, t.j. albo

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$$

albo

$$u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_n \leq \dots$$

Gdybyśmy w tych ciągach usunęli pomiędzy wyrazami
znak równości, otrzymalibyśmy ciąg /stale/ r o s n ą -
c y lub /stale/ m a l e j ą c y, t.j. albo