

zaś

$$y = t\sqrt{1-t^2}$$

Podstawiając $t = \pm 1$, otrzymamy styczne do krzywej

ROZWINIĘTA I ROZWIJAJĄCA.

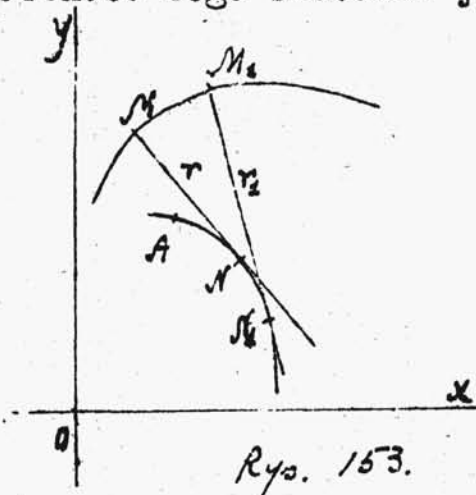
Niech będzie dana krzywa:

$$y = f(x)$$

i na niej punkt $M(x_0, y_0)$. Krzywizną łuku krzywej w tym punkcie nazwaliśmy stosunek

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{r}$$

Odwrotność tego stosunku jest promieniem krzywizny:



$$r = \frac{ds}{d\alpha}$$

Wiemy, że

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

oraz

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

skąd

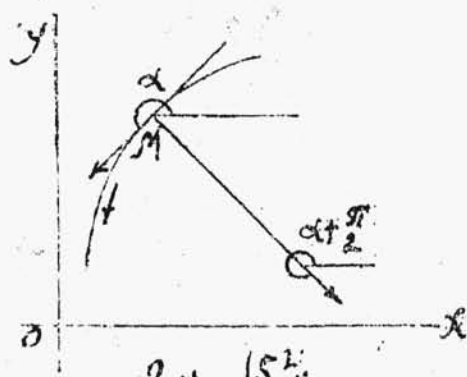
$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \cos \alpha$$

więc

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha$$

Aby promień krzywizny był zawsze wyrażony przez dodatni znak, wybieramy taki kierunek na łuku jako dodatni, by łuk s rósł razem z kątem α

przytem przyjmiemy jako kierunek dodatni stycznej ten, który odpowiada kierunkowi dodatniemu łuku. Wtedy kąt α będzie mógł być kątem od 0 do 2π .



Rys. 154.

Związek między

ds i dx jest taki sam, jak między wektorem i jego rzutem i mamy:

$$dx = ds \cos \alpha$$

$$dy = ds \sin \alpha$$

$\cos \alpha$ i $\sin \alpha$ są tu ≥ 0 ; $ds > 0$; dx i $dy \geq 0$.

Mogą zajść co do znaków 4 przypadki:

1/ $\operatorname{tg} \alpha > 0$ funkcja rośnie

a/ Pochodna druga < 0

α maleje, gdy s rośnie. Ponieważ łuk ma kierunek taki, iż s rośnie wraz z α , więc gdy x rośnie, s maleje /rys-154/.

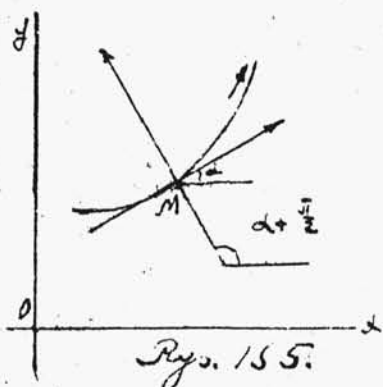
Wtedy kąt $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$\frac{dx}{ds} < 0$, ponieważ $\frac{dy}{dx} > 0$; więc i $\frac{dy}{ds} < 0$

1/ $\operatorname{tg} \alpha > 0$. funkcja rośnie

b/ Pochodna druga > 0 , α rośnie, gdy x rośnie;

łuk ma kierunek taki, iż rośnie wraz z α , t.j. gdy s rośnie, to s także rośnie.



Rys. 155.

Kąt: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ /rys.

155/.

Wtedy $\frac{dx}{ds} > 0$, ponieważ
 $\frac{dy}{dx} > 0$; więc i $\frac{dy}{ds} > 0$

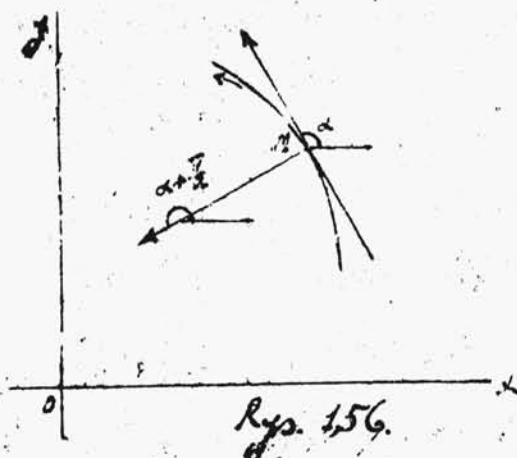
Mamy $ds > 0$, $\cos \alpha$ i
 $\sin \alpha$ są > 0 ; $dx > 0$,
 $dy > 0$, $dx = ds \cos \alpha$
 $dy = ds \sin \alpha$

II/ $\tan \alpha < 0$; funkcja maleje.

a/ pochodna druga > 0 ; α maleje, gdy x
 rośnie, łuk ma kierunek taki, iż s rośnie wraz z α
 t.j. gdy α rośnie, α maleje. Kierunek łuku dodat-
 niego jest przeciwny.

Kąt α jest wtedy

/rys. 156/



Rys. 156.

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$\frac{dx}{ds} < 0$, ponieważ

$\frac{dy}{dx} < 0$, więc

$\frac{dy}{ds} > 0$. Mamy tu

$$ds > 0; dx < 0; dy > 0;$$

$dx = ds \cos \alpha$ przytem $\cos \alpha < 0$;

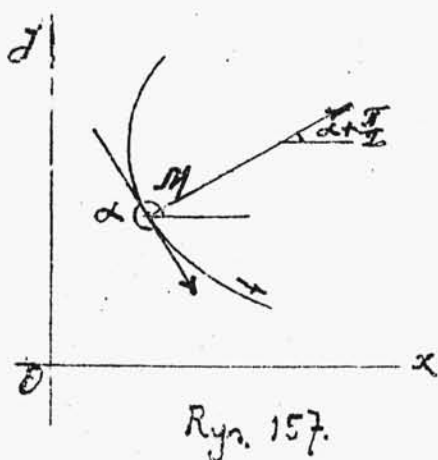
$dy = ds \sin \alpha$ " $\sin \alpha > 0$.

II/ $\tan \alpha < 0$. b/ pochodna druga > 0 , α

rośnie wraz z x , wtedy s rośnie także wraz z x .

Kąt α jest

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$



Rys. 157.

x rośnie wraz z s , więc

$$\frac{dx}{ds} > 0 \quad ; \quad \text{ponieważ} \quad \frac{dy}{dx} < 0$$

$$\frac{dy}{ds} < 0$$

Mamy tu $ds > 0, dx > 0, dy < 0$;

$$dx = ds \cos \alpha, \quad \cos \alpha > 0$$

$$dy = ds \sin \alpha, \quad \sin \alpha < 0.$$

Wzory

$$1/2/ \quad \frac{dx}{ds} = \cos \alpha; \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha \quad \text{wraz z wzorem 1/1 są}$$

słuszne tylko przy takim jak powyżej określeniu kąta

α . /Przy innym określeniu kąta α mogłyby przy niektórych z tych wzorów być znaki $-$ /. Jednocześnie widzimy /rys. 154 - 157/, że kierunek normalnej od p. M do środka krzywizny tworzy zawsze z osią x kąt $\alpha + \frac{\pi}{2}$. A zatem, uwzględniając, że $ds = d\alpha \cdot r$, będziemy mieli:

$$ds = ds \cos \alpha = r \cos \alpha \cdot d\alpha;$$

$$dy = ds \sin \alpha = r \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Niech środkiem krzywizny dla punktu M będzie

$N(x, y)$. Jak widać z rysunku 157, będzie zawsze:

$$X = x + r \cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = x - r \sin \alpha;$$

$$Y = y + r \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = y + r \cos \alpha.$$

Gdy punkt M będzie się posuwał po danej krzywej, wówczas i środek krzywizny N będzie zmieniał swoje położenie, nakreśli on również pewną krzywą /2/ - miejsce geometryczne środków krzywizny danej krzywej /1/. Wielkość odnosząca się do 1-szej krzywej oznaczać będziemy małymi literami x, y, z i t.d., a odnoszące się do 2-ej krzywej literami dużymi X, Y, S .

Wyobraźmy sobie styczną do krzywej /2/ w punkcie N i znajdziemy jej współczynnik kątowy:

$$dX = dx - dr \sin \alpha - r \cos \alpha \cdot d\alpha;$$

$$dY = dy + dr \cos \alpha - r \sin \alpha \cdot d\alpha;$$

skąd, po podstawieniu odpowiednich wartości dla dx i dy , otrzymamy wzory:

$$dX = -r \sin \alpha \cdot d\alpha;$$

/3/

$$dY = r \cos \alpha \cdot d\alpha.$$

A zatem pochodna czyli współczynnik kątowy stycznej do krzywej /2/:

/4/

$$\frac{dY}{dX} = -\cot \alpha$$

Zauważmy, że ponieważ styczna do krzywej /1/ w punkcie M posiada współczynnik kątowy $\tan \alpha$, więc współczynnikiem kątowym normalnej do tej krzywej /1/ jest $-\frac{1}{\tan \alpha} = -\cot \alpha$. A zatem normalna do krzywej

/1/ w punkcie M jest styczną do krzywej /2/ w punkcie N - odpowiednim środkiem krzywizny, stąd krzywa /2/ czyli miejsce geometryczne środków krzywizny danej krzywej jest obwiednią normalnych do tejże krzywej. Można więc łatwo, mając równanie krzywej /1/, napisać równanie krzywej /2/.

Oznaczmy długość pewnego łuku AN krzywej /2/ przez S . Jak wiemy:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2$$

Dodając do siebie równości /3/, podniesione do kwadratu, mamy

$$dX^2 + dY^2 = dr^2$$

więc

$$dS^2 = dr^2$$

czyli

$$d(S-r) = 0,$$

skąd wynika, że różnica $S-r$ jest wielkością stałą

$$S-r = c^2,$$

$$S = r + c^2,$$

czyli

$$\text{łuk } AN = MN + c^2$$

Stosując identycznie rozumowanie do łuku AN_2 ,

otrzymamy:

$$\text{Łuk } AN_1 = M_1 N_1 + c^2,$$

a po odjęciu powyższych równań stronami:

$$\text{Łuk } N_1 N_2 = M_1 N_1 - M_2 N_2 = r_2 - r_1$$

Można to wyrazić słowami w ten sposób: przyrost promienia krzywizny krzywej /1/ jest równy przyrostowi długości łuku krzywej /2/.

Przedstawimy tę zależność pomiędzy obiema krzywymi w interpretacji mechanicznej. Wyobraźmy sobie nić nawiniętą na krzywą /2/, wyprężmy tę nić i odwijajmy w jednym kierunku, zważając by była wciąż naprężona /styczną do krzywej /2//. Wówczas odwijany koniec M nici zakreśli krzywą /1/. Dla tej właśnie przyczyny krzywą /1/ nazywamy *r o z w i j a j ą c ą* /evolwentą/, a krzywą /2/ *r o z w i n i ę t ą* /evolutą/. Jeżeli rozwinięta nie posiada żadnych punktów osobliwych, to promienie krzywizny rozwijającej stale rosną, co innego jeśli rozwinięta posiada punkty osobliwe.

P r z y k ł a d . Znaleźć rozwiniętą elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Można tu postępować dwiema drogami: albo szukać obwiedni normalnych do elipsy, albo też miejsca geometrycznego środków krzywizny. My wybierzemy drogę po-

rednią.

Jak wiemy, równaniem normalnej jest:

$$x - X = -(y - Y)y',$$

przyczem, ponieważ / X, Y / są to współrzędne środka krzywizny:

$$y - Y = -\frac{1+y'^2}{y''}$$

Z równania elipsy znajdziemy, że

$$y'x = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{y}$$

a stąd

$$y''x^2 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1+y'-y'x}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y + \frac{b^2x^2}{a^2y}}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2y^3}$$

Ponieważ z równania elipsy mamy:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

więc

$$y'' = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

W takim razie

$$y - Y = -\frac{(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2})a^2y^3}{-b^4} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)y}{a^2b^4}$$

stąd

$$Y = \frac{(a^2b^4 - a^4y^2 - b^4x^2)y}{a^2b^4}$$

Ponieważ zaś

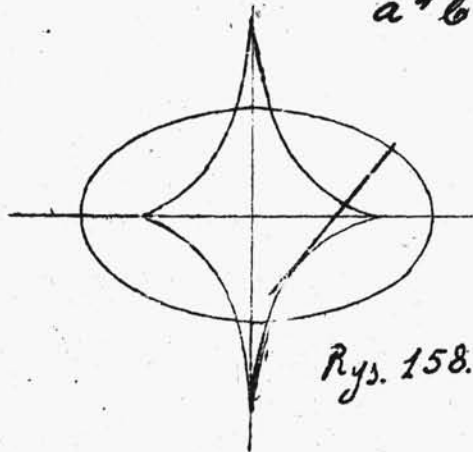
$$a^2b^2 = a^2y^2 + b^2x^2$$

więc

$$y = \frac{a^2 b^2 y^2 + b^4 x^2 - a^4 y^2 - b^4 x^2}{a^2 b^4} \quad y = \frac{b^2 - a^2}{b^4} y^3$$

Podstawiając wartość różnicy $y - y$ do równania normalnej, otrzymamy:

$$\begin{aligned} x - X &= \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2) y}{a^2 b^4} \cdot \frac{b^2 x}{a^2 y} = \\ &= \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2) x}{a^4 b^2} \end{aligned}$$



Rys. 158.

Stąd

$$\begin{aligned} X &= \frac{(a^4 y^2 - a^4 y^2 - b^4 x^2) x}{a^4 b^2} = \\ &= \frac{(a^4 y^2 + a^2 b^2 x^2 - a^4 y^2 - b^4 x^2) x}{a^4 b^2} = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3 \end{aligned}$$

A zatem

$$x = \left(\frac{a^4 X}{a^2 - b^2} \right)^{1/3}; \quad y = - \left(\frac{b^4 Y}{a^2 - b^2} \right)^{1/3}$$

Rugując przy pomocy równania elipsy x i y , znajdziemy szukane równanie:

$$\frac{\left(\frac{a^4 X}{a^2 - b^2} \right)^{2/3}}{a^2} + \frac{\left(\frac{b^4 Y}{a^2 - b^2} \right)^{2/3}}{b^2} = 1$$

Stąd ostatecznie:

$$(aX)^{2/3} + (bY)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

Jest to krzywa podobna do astroidy.

TEORIA SZEREGÓW.

Teoria szeregów ma na celu podanie określenia sumy nieskończonej liczby składników oraz metod operowania takimi sumami. Wyobraźmy sobie, że mamy nieskończoną liczbę składników, stanowiących wyrazy pewnego ciągu

$$/1/ \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$$

Powiadamy, że składniki te tworzą s z e r e g. Sumę skończonych liczb wyrazów szeregu nazywamy s u m a c z ę ś c i o w ą, oznaczając ją będziemy literą S ze wskaźnikiem równym liczbie składników tej sumy. A więc:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Sumy częściowe szeregu /1/ tworzą pewien ciąg nieskończony

$$/2/ \quad S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_n, \dots$$

Jeżeli wówczas, gdy n dąży do nieskończoności,