

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt{-P/3}$$

A więc dla  $u$  mieć będziemy wartości następujące:

$$u_1 = \sqrt{-P/3} \left( \cos \frac{\alpha}{3} + i \sin \frac{\alpha}{3} \right);$$

$$u_2 = \sqrt{-P/3} \left( \cos \frac{\alpha+2\pi}{3} + i \sin \frac{\alpha+2\pi}{3} \right);$$

$$u_3 = \sqrt{-P/3} \left( \cos \frac{\alpha+4\pi}{3} + i \sin \frac{\alpha+4\pi}{3} \right).$$

Zajmijmy się teraz wartościami  $v$ , Jak wiemy

$$v^3 = -\frac{Q}{2} - i \sqrt{-(Q^2/4 + P^3/27)}$$

Podobnie jak  $u^3$ , będziemy mogli napisać  $v^3$  w postaci:

$$v^3 = r (\cos \alpha - i \sin \alpha),$$

a stąd

$$v = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\alpha}{3} - i \sin \frac{\alpha}{3} \right).$$

A zatem

$$v_1 = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\alpha}{3} - i \sin \frac{\alpha}{3} \right);$$

$$v_2 = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\alpha+2\pi}{3} - i \sin \frac{\alpha+2\pi}{3} \right);$$

$$v_3 = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\alpha+4\pi}{3} - i \sin \frac{\alpha+4\pi}{3} \right).$$

Otrzymamy więc trzy wartości  $x$  :

$$x_1 = u_1 + v_1$$

$$x_2 = u_2 + v_2$$

$$x_3 = u_3 + v_3.$$

Inne skojarzenia wartości  $u$  i  $v$  odrzucamy, ponieważ nie dająby iloczynu  $u \cdot v (= -\sqrt[3]{p/3})$  rzeczywistego i dodatniego.

Wszystkie te wartości, jako sumy liczb zespolonych, sprzężonych, są rzeczywiste, czyli i w tym przypadku równanie /1/ posiada trzy pierwiastki rzeczywiste:

$$x_1 = 2 \cdot \sqrt[3]{-p/3} \cdot \cos \frac{\alpha}{3}$$

$$x_2 = 2 \cdot \sqrt[3]{-p/3} \cdot \cos \frac{\alpha + 2\pi}{3}$$

$$x_3 = 2 \cdot \sqrt[3]{-p/3} \cdot \cos \frac{\alpha + 4\pi}{3}$$

W ten sam sposób zbadamy równanie ogólne stopnia czwartego:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Podstawmy

$$x = x' + h$$

Otrzymamy:

$$a(x'+h)^4 + b(x'+h)^3 + c(x'+h)^2 + d(x'+h) + e = 0$$

Rozwińmy lewą stronę tego równania, a następnie uszykujmy wyrazy według potęg malejących  $x'$ .

$$ax'^4 + 4ahx'^3 + \dots + bx'^3 + \dots + e = 0.$$

$$ax'^4 + (4ah + b)x'^3 + \dots + e = 0$$

Dotychczas  $h$  jest liczbą dowolną: możemy ją wybrać tak, aby

$$4ah + b = 0$$

czyli

$$h = -\frac{b}{4a}$$

Gdy więc podstawimy

$$x = x' - \frac{b}{4a}$$

wówczas równanie nie będzie posiadało wyrazu z trzecią potęgą niewiadomej. Następnie można będzie podzielić wszystkie wyrazy równania przez współczynnik przy  $x'^4$ , wskutek czego równanie jeszcze się uprości. Ostatecznie więc będzie można sprowadzić każde równanie 4-go stopnia do postaci:

$$1/1 \quad z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

Przypuśćmy, że

$$Z = u + v + w$$

i wprowadźmy dla dogodności następujące oznaczenie:

$$s_2 = uv + uw + vw$$

$$G_1 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$G_2 = u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2.$$

Utwórzmy następnie równanie sześcienné, którego pierwiastkami byłyby liczby  $u^2$ ,  $v^2$  i  $w^2$

$$12/ \quad t^3 - t^2(u^2 + v^2 + w^2) + t(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2) - u^2v^2w^2$$

Gdy będziemy znali  $G_1$ ,  $G_2$  oraz iloczyn  $u^2v^2w^2$  będziemy mogli powyższe równanie rozwiązać.

Dwie liczby z pomiędzy trzech  $u$ ,  $v$  i  $w$  są dowolne. Możemy więc ustalić pomiędzy temi trzema liczbami dwa związki: oczywiście wybierzemy te związki tak, aby przez to wprowadzić pewne uproszczenia. Zauważmy więc, że:

$$Z = u + v + w$$

$$Z^2 = G_1 + 2s_2$$

$$Z^4 = G_1^2 + 4G_1s_2 + 4s_2^2$$

Lecz

$$s_2^2 = G_2 + 2uvvw$$

A więc

$$z^4 = G_1^2 + 4G_1G_2 + 4G_2 + 8uvwz$$

Podstawmy te wartości do równania /1/:

$$G_1^2 + 4G_2 + pG_1 + r + 2G_2(2G_1 + p) + z(8uvw + q) = 0$$

Wybierzmy więc warunki dodatkowe tak, aby powyższe równanie przybrało postać:

$$13/ \quad G_1^2 + 4G_2 + pG_1 + r = 0$$

Niech zatem będzie

$$14/ \quad 2G_2 + p = 0$$

$$15/ \quad 8uvw + q = 0$$

Skąd

$$17/ \quad G_1 = -p/2$$

$$18/ \quad uvw = -q/8$$

Podstawmy te wartości do równania /3/:

$$p^2/4 + 4G_2 - p^2/2 + r = 0,$$

$$4G_2 - p^2/4 + r = 0$$

Stąd zaś

$$G_2 = p^2/16 - r/4$$

A więc

$$12/ \quad t^3 - p/2 t^2 + (p^2/16 - r/4)t - q/64 = 0$$

Możemy zatem równanie sześciennie /2/ rozwiązać. Nazwijmy jego pierwiastki  $u^2$ ,  $v^2$  i  $w^2$  przez  $t_1$ ,  $t_2$  i  $t_3$ .

$$u = \pm \sqrt{t_1}$$

$$v = \pm \sqrt{t_2}$$

$$w = \pm \sqrt{t_3}$$

Gdybyśmy brali pod uwagę wszystkie powyższe wartości, to otrzymalibyśmy dla  $z$  8 wartości zamiast 4. Powstaje to stąd, że zamiast iloczynu /8/  $u \cdot v \cdot w$  braliśmy iloczyn kwadratów  $u^2 v^2 w^2$ . Z otrzymanych zatem, wartości  $u$ ,  $v$  i  $w$  należy wybrać tylko te, które czynią zadość warunkowi /8/.

I tu należy rozpatrzyć kilka przypadków.

1/ Przypuśćmy, że liczby  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  są rzeczywiste. W takim razie iloczyn

$$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = 9/64$$

jest liczbą rzeczywistą dodatnią: musi więc zachodzić jeden z dwóch wypadków:

$$/A/ \quad t_1 > 0; \quad t_2 > 0; \quad t_3 > 0$$

$$/B/ \quad t_1 > 0; \quad t_2 < 0 \quad t_3 < 0$$

Jeżeli ma miejsce wypadek A, to o ile  $a/z > 0$  równanie /1/ posiadać będzie pierwiastki:

$$x_1 = -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}$$

$$x_2 = -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$$

$$x_3 = +\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$$

$$x_4 = +\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}$$

O ile zaś  $b/q < 0$ , to pierwiastki będą

$$x_1 = +\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$$

$$x_2 = +\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}$$

$$x_3 = -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} - \sqrt{t_3}$$

$$x_4 = -\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3}$$

Jeżeli ma miejsce wypadek B, to:

$$u = \pm \sqrt{t_1}$$

$$v = \pm \sqrt{t_2} = \pm bi$$

$$w = \pm \sqrt{t_3} = \pm di$$

I w tym wypadku zatem będziemy mogli znaleźć 4 pierwiastki równania /1/:

Jeżeli  $q > 0$ , to

$$x_1 = +\sqrt{t_1} + (b+d)i$$

$$x_2 = +\sqrt{t_1} - (b+d)i$$

$$x_3 = -\sqrt{t_1} + (b-d)i$$

$$x_4 = -\sqrt{t_1} - (b-d)i$$

Jeżeli  $q < 0$ , to

$$z_1 = +\sqrt{t_1} + (b+d)i$$

$$z_2 = +\sqrt{t_1} - (b-d)i$$

$$z_3 = -\sqrt{t_1} + (b+d)i$$

$$z_4 = -\sqrt{t_1} - (b-d)i$$

2/ Przypuśćmy teraz, że równanie /2/ posiada jeden pierwiastek rzeczywisty i dwa zespolone, np.  $t_1$  rzeczywisty, zaś  $t_2$  i  $t_3$  zespolone sprzężone. Ponieważ  $t_1$  jest liczbą dodatnią /z powodu, że  $t_2 \cdot t_3 > 0$  jako iloczyn dwu liczb zespolonych sprzężonych, a iloczyn  $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = 9/64$  jest  $> 0$  /, więc

$$u = \pm \sqrt{t_1}$$

jest liczbą rzeczywistą. Natomiast  $v$  i  $w$  będziemy mogli oznaczyć przez

$$v = \pm(a+bi)$$

$$w = \pm(a-bi)$$

Równanie /1/ zatem będzie posiadało /gdy np.

$q > 0$  / pierwiastki następujące:

$$z_1 = +\sqrt{t_1} + a+bi + a-bi = +\sqrt{t_1} + 2a$$

$$z_2 = +\sqrt{t_1} - a-bi - a+bi = +\sqrt{t_1} - 2a$$

$$z_3 = -\sqrt{t_1} + a+bi - a+bi = -\sqrt{t_1} + 2bi$$

$$z_4 = -\sqrt{t_1} - a-bi + a-bi = -\sqrt{t_1} - 2bi$$

Pierwiastki  $z_1$  i  $z_2$  są rzeczywiste, a pierwiastki



$z_3$  i  $z_4$  są zespolone sprzężone.

Gdy  $q < 0$ , pierwiastki będą posiadały postać:

$$z_1 = +\sqrt{r_1} + 2bi$$

$$z_2 = +\sqrt{r_1} - 2bi$$

$$z_3 = -\sqrt{r_1} + 2a$$

$$z_4 = -\sqrt{r_1} - 2a$$

Równanie stopnia piątego w postaci ogólnej rozwiązać się nie da: dla równań stopni wyższych od czwartego niewiadomej  $x$  nie można wyrazić zapomocą spółczynników równania, przy pomocy skończonej ilości działań algebraicznych. Należy więc znaleźć inną metodę, która by pozwoliła nam obliczyć pierwiastki każdego równania z dowolną dokładnością. Otóż metoda taka istnieje. Zanim ją poznamy, musimy zapoznać się z kilkoma ogólnymi własnościami równań algebraicznych.

PIERWIASTKI SPRZĘŻONE. Niech będzie dane równanie

$$f(z) = 0$$

gdzie  $f(z)$  oznacza wielomian  $n$  stopnia względem  $z$ :

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

przyczem spółczynniki  $a_k$  niech będą liczbami rzeczywistymi. Liczbę zespoloną  $z$  można zawsze przedstawić w postaci:

$$z = x + iy$$

gdzie  $x$  i  $y$  są liczbami rzeczywistymi. Również każdą funkcję liczby  $z$  będziemy mogli przedstawić w postaci sumy dwóch funkcji:

$$f(z) = P(x, y) + i \cdot Q(x, y)$$

W istocie, każdą potęgę liczby  $z$  będziemy mogli rozwinąć w szereg, np.

$$z^n = (x + iy)^n = x^n + i n x^{n-1} + \dots$$

Wyrazy parzyste tego szeregu będą zawierały  $i$  wobec czego czynnik ten będziemy mogli wyciągnąć przed nawias. Funkcja zatem da się sprowadzić do postaci:

$$f(z) = P(x, y) + i \cdot Q(x, y)$$

Gdybyśmy założyli, że

$$z = x - iy$$

wówczas, jak łatwo się przekonać

$$f(z) = P(x, y) - i \cdot Q(x, y)$$

przyczem  $P(x, y)$  oraz  $Q(x, y)$  pozostałyby te same, co poprzednio.

Taki sam rozkład można uskutecznić dla każdego ułamka wymiernego

$$\frac{f(z)}{g(z)}$$

W rzeczy samej, rozkładając oddzielnie licznik i

oddzielnie mianownik, otrzymamy:

$$\frac{f(z)}{f(z)} = \frac{P(x,y) + i \cdot Q(x,y)}{P_1(x,y) + i \cdot Q_1(x,y)}$$

Pomnożmy i podzielmy ten ułamek przez  $P_1(x,y) - i \cdot Q_1(x,y)$

Wówczas:

$$\frac{f(z)}{f(z)} = \frac{[P(x,y) + i \cdot Q(x,y)] \cdot [P_1(x,y) - i \cdot Q_1(x,y)]}{[P_1(x,y)]^2 + [Q_1(x,y)]^2}$$

czyli

$$\frac{f(z)}{f(z)} = \frac{PP_1 + QQ_1}{P_1^2 + Q_1^2} + i \cdot \frac{QP_1 - PQ_1}{P_1^2 + Q_1^2}$$

Niech będzie dane równanie:

$$f(z) = 0$$

i przypuśćmy, że

$$z = x + iy$$

jest pierwiastkiem tego równania, czyli, że

$$/1/ \quad f(z + iy) \equiv 0$$

Możemy to zawsze sprowadzić do postaci

$$P(x,y) + i \cdot Q(x,y) \equiv 0$$

\* A więc równanie /1/ w zakresie liczb zespolonych jest równoważne układowi dwóch równań w zakresie liczb rzeczywistych:

12/

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}$$

Podstawmy teraz na miejsce  $x$  liczbę  $x-iy$  W takim razie

$$f(x-iy) = P(x, y) - iQ(x, y) = 0$$

czyli

$$f(x-iy) = 0$$

A zatem  $x-iy$  jest również pierwiastkiem równania. A więc pierwiastki zespolone występują zawsze parami sprzężzonymi. Stąd wniosek, że każde równanie stopnia nieparzystego posiada przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty /pierwiastków zespolonych musi być liczba parzysta/.

TOŻSAMOŚĆ WIELOMIANÓW. Niech będą dane dwa wielomiany  $n$  stopnia względem  $z$  :

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

$$g(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$$

Jeżeli współczynniki przy jednakowych potęgach są odpowiednio równe:

$$a_0 = b_0 ; a_1 = b_1 ; \dots ; a_n = b_n$$