

zaś

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$$

więc mamy minimum.

ROWNANIA PARAMETRYCZNE KRZYWYCH. Dwa równania:

$$\begin{aligned}x &= f(t) \\ y &= g(t)\end{aligned}$$

wyznaczają w zupełności pewną krzywą. Wspólną zmienną niezależną t , zwaną parametrem, można z obu równań wyrugować, przez co otrzymamy jedno równanie z dwiema niewiadomymi, wyznaczające, jak wiemy, krzywą. Np.

$$x = r \cos t; \quad y = r \sin t$$

są to równania parametryczne koła; gdy bowiem podnieśliemy oba równania do kwadratu i dodamy stronami, to otrzymamy zwykłe równanie koła:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Podobnie równania parametryczne:

$$x = a \cos t; \quad y = b \sin t$$

wyznaczają elipsę, gdyż z równań tych wynika, że

$$\frac{x}{a} = \cos t; \quad \frac{y}{b} = \sin t$$

skąd

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Niech będzie dana krzywa, wyznaczona przez równania parametryczne

$$1/1/ \begin{cases} x = f(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$

Spółczynnikiem kierunkowym stycznej do tej krzywej jest:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{f(t+\Delta t) - f(t)}$$

Przypuszczamy, że funkcje 1/1/ są ciągłe; gdy więc $\Delta t \rightarrow 0$, to $\Delta x \rightarrow 0$ oraz $\Delta y \rightarrow 0$. A zatem:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}{\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$

Skąd

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{f'(t)}$$

Krzywa skośna /w przestrzeni/ jest wyznaczona przez trzy równania parametryczne:

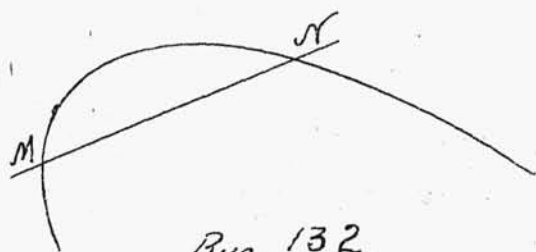
$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= f(t) \\ z &= \psi(t) \end{aligned}$$

Równanie prostej, przechodzącej przez punkt $M(x, y, z)$ tej krzywej, jest X, Y, Z - współrzędne bieżące/:

$$\frac{X-x}{a} = \frac{Y-y}{b} = \frac{Z-z}{c},$$

gdzie a, b, c są proporcjonalne do cosinusów kątów kierunkowych tej prostej α, β, γ . Obierzmy na krzywej punkt ruchomy $M(x_2, y_2, z_2)$ i po-

prowadźmy prostą MM' . Niech punkt M_1 zbliża się do punktu M ; prosta MM_1 w granicy da nam styczną. Oznaczmy



Rys. 132.

$$x_1 - x = \Delta x;$$

$$y_1 - y = \Delta y;$$

$$z_1 - z = \Delta z.$$

Spółczynniki kierunkowemi siecznej MM' są

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

A więc styczna posiadać będzie spółczynniki kierunkowe

$$\frac{dx}{dt} = f'(x), \frac{dy}{dt} = f'(y), \frac{dz}{dt} = \psi'(z)$$

Zatem równanie stycznej do krzywej skośnej w punkcie M będzie miało kształt:

$$\frac{X-x}{f'(x)} = \frac{Y-y}{f'(y)} = \frac{Z-z}{\psi'(z)}.$$

Przypuśćmy teraz, że dana jest krzywa płaska:

$$y = f(x)$$

Styczna do tej krzywej w punkcie $M(x; y)$

wyrazi się przez równanie:

$$Y-y = y'(X-x)$$

Jeżeli w tym równaniu zastąpimy y' przez wartość $-\frac{1}{y'}$, to otrzymamy równanie prostopadłej do stycznej w punkcie M , czyli równanie normalnej do krzy-

wej

$$(Y-y) = -\frac{1}{y'}(X-x)$$

Gdy równanie krzywej dane jest w postaci uwikłanej

$$12/ \quad F(x, y) = 0$$

można również z łatwością napisać równanie stycznej i normalnej w pewnym punkcie; należy uwzględnić tylko, że

$$y' = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Stąd równanie stycznej:

$$(Y-y) \frac{\partial F}{\partial y} + (X-x) \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

Równanie normalnej:

$$(Y-y) \frac{\partial F}{\partial x} - (X-x) \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Podobnie rzecz się przedstawia, gdy krzywa jest określona przez układ równań parametrycznych:

$$13/ \quad \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

W tym przypadku

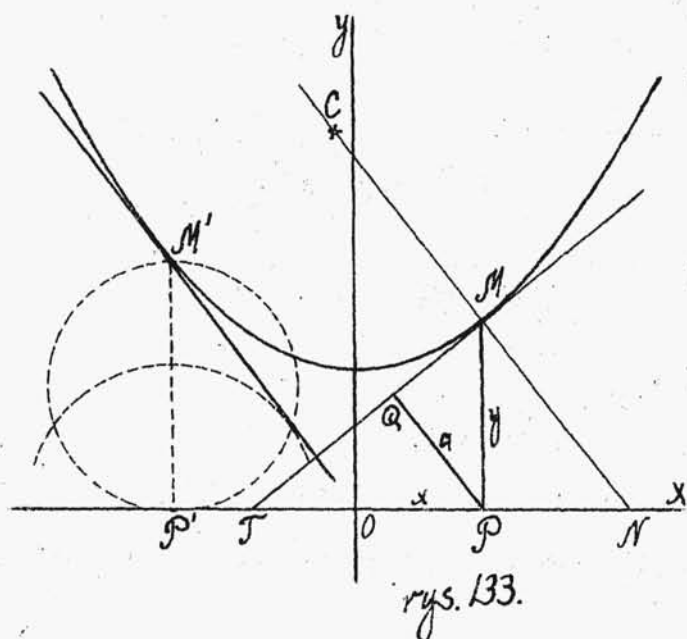
$$dx = f_1'(t) dt; \quad dy = f_2'(t) dt;$$

a zatem pochodna

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f_2'(t)}{f_1'(t)}$$

Gdy jest dane równanie krzywej w jakiejkolwiek bądź postaci, to można łatwo obliczyć odcinki stycznej MT

i normalnej MM' , zawarte między krzywą i osią rzędnych /rys.133/ oraz ich rzuty na tę oś TP i PN



Odcinki te nazywamy wprost odpowiednio styczną, normalną, podstyczną i podnormalną.

Zakładając $Y=0$ w równaniu stycznej

$$Y-y = y'(X-x)$$

otrzymamy

$$X = x - \frac{y}{y'} = OT$$

A więc

$$TP = OP - OT = x - X = x - x + \frac{y}{y'}$$

czyli długość podstycznej

$$TP = \frac{y}{y'}$$

i wogóle przy dowolnym znaku pochodnej y' i y : długość bezwzględna podstycznej $= \left| \frac{y}{y'} \right|$.

Jeżeli teraz założymy $Y=0$ w równaniu normalnej

$$Y-y = -\frac{1}{y'}(X-x)$$

to otrzymamy:

$$X = x + yy' = ON$$

A zatem

$$PN = ON - OP = x + yy' - x$$

czyli długość podnormalnej

$$PN = yy'$$

i w ogólności przy dowolnym znaku wartości y i y' długość bezwzględna podnormalnej $= |yy'|$.

Z trójkątów prostokątnych MPT i MNR znajdziemy:

$$MT = \sqrt{y^2 + \frac{y'^2}{y^2}}; \quad MN = \sqrt{y^2 + y'^2 \cdot y'^2};$$

czyli długość stycznej

$$MT = y \sqrt{1 + \frac{1}{y^2}}$$

czyli długość normalnej

$$MN = y \sqrt{1 + y'^2}$$

Wzory powyższe dadzą się zastosować w każdym przypadku, bez względu na to, w jakiej postaci jest dane równanie krzywej.

Przypuśćmy np., że jest dane równanie krzywej łańcuchowej czyli katenoidy:

$$1/1 \quad y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

Różniczkując je względem x znajdziemy:

$$y' = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a}$$

czyli

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$$

A zatem

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

Podstawiając to we wzór, wyznaczający długość normalnej, otrzymamy:

$$MN = \frac{y^2}{a}$$

Poprowadźmy z punktu P odcinek PB , prosto-

padły do stycznej MT . Stosując znany z geometrii analitycznej wzór, wyznaczający odległość punktu $P(x, 0)$

$P(x, 0)$ od prostej

$$Y - y'X + y = 0$$

będzie można napisać, że

$$d = PO = \frac{-y'x + y'x - y}{\pm \sqrt{1 + y'^2}} = \frac{-y}{\pm \sqrt{1 + y'^2}}$$

Ponieważ chodzi tutaj tylko o wartość bezwzględną, przeto można przyjąć, że

$$PO = \frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{a \operatorname{ch} \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}$$

czyli, że

$$PO = a$$

A zatem odległość stycznej do łańcuchowej w danym punkcie od rzutu tegoż punktu oś X jest wielkością stałą. Stąd wynika też sposób wykreślenia stycznej w dowolnym punkcie M' , należy mianowicie wykreślić rzędną tego punktu $M'P'$, zakreślić na niej, jako na średnicy okrąg koła i jeden z punktów przecięcia się tego okręgu z okręgiem zatoczonym promieniem a ze środka P' /wybór tego punktu zależy od znaku pochodnej/ połączyć z punktem M' . Otrzymana prosta i prostopadła do niej w punkcie M' będą to styczna i normalna do łańcuchowej.

Zajmiemy się teraz obliczeniem długości łuku krzywej płaskiej. Zagadnienie to, podobnie jak obliczenie

poła krzywej, prowadzi do całkowania, jest jednak nie-
co od niego trudniejsze. Przedewszystkiem należałoby
określić ściśle, co będziemy rozumieli przez wyrażenie
"łuk krzywej". My jednak postąpimy inaczej: założymy
mianowicie, że istnieje funkcja, posiadająca pewne
charakterystyczne dla danej własności, którą będziemy
mogli, bez ściślejszego narazie określenia, nazwać
"łukiem krzywej".

Niech zatem będzie dana krzywa C , posiadająca
równanie:

$$y = f(x)$$

i na niej dwa punkty: jeden stały M / a, b /, dru-
gi zmienny N / x, y /. Założmy, że: 1/ istnieje funk-
cja $s(x)$ / zmiennej x , która wyrażałaby długość
łuku MN i czyniła z tego tytułu zadość pewnym okre-
ślonym warunkom: 2/ $s(x)$ / jest funkcją ciągłą zmien-
nej x w granicach odpowiadających badanemu łukowi, 3/
granica stosunku długości badanego łuku MN do cię-
ciwy MN , gdy punkt N dąży do M , jest równa
jedności, czyli

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{łuk } MN}{\text{cięciwa } MN} = 1$$

Z łatwością można obliczyć pochodną tej funkcji.
Gdy mianowicie zmienna x otrzyma przyrost h , punkt

N znajdzie się w punkcie N' , zaś łuk $s / x /$ będzie miał wartość $s / x + h /$. Utwórzmy stosunek przyrostów:

$$\frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \frac{\text{łuk } NN'}{h} = \frac{\text{łuk } NN'}{\text{cięciwa } NN'} \cdot \frac{\text{cięciwa } NN'}{h}$$

Przechodząc następnie do granicy dla h , dążącego do zera i uwzględniając trzeci punkt założenia, można napisać:

$$\begin{aligned} s'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{łuk } NN'}{\text{cięciwa } NN'} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cięciwa } NN'}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{cięciwa } NN'}{h} \end{aligned}$$

Jeżeli teraz oznaczymy przyrost rzędnych przez k , to:

$$s'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{k}{h}\right)^2} = \sqrt{1 + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{k}{h}\right)^2} = \sqrt{1 + y'^2}$$

A zatem

$$s'(x) = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

Całkując wzór powyższy, znajdziemy wartość funkcji $s / x /$:

$$12/ \quad s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Nieraz wygodnie jest napisać wzór /1/ w postaci nieco innej

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

skąd

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

i wreszcie

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

P r z y k ł a d . Obliczyć długość łuku krzywej łańcuchowej:

$$y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

w granicach od punktu A do M , o odciętych 0 i x

/rys. 133/. Jak wiemy:

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$$

zaś

$$1 + y'^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$$

a zatem

$$\text{Łuk } AM = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{x}{a} \cdot dx = \left[a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \right]_0^x = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$$

Zauważmy tutaj, że

$$PO = a ; MP = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} ;$$

więc

$$MO = \sqrt{MP^2 - PO^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} - a^2} = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} - 1} = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$$

Odcinek MO wyraża zatem długość łuku AM krzywej. Jest to charakterystyczna własność linii łańcuchowej.

Uzasadnione powyżej wzory /1/ i /2/ są najzupełniej ogólne. Można zaś je stosować i wówczas, gdy krzywa jest dana przez układ równań parametrycznych:

$$x = t_1(t); \quad y = t_2(t)$$

lub równanie o postaci uwikłanej:

$$F(x, y) = 0$$

Należy tylko mieć na względzie, że w pierwszym przypadku

$$y' = \frac{P_2(t)}{P_1(t)},$$

zaś w drugim

$$y' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Wzory te pozwalają więc nam obliczyć długość łuku krzywej bez względu na to w jakiej postaci jest dane jej równanie

Musimy się teraz zastanowić nad tym, jakim warunkom powinna czynić zadość dana funkcja, ażeby można było mówić o długości łuku, czyli na to, aby krzywa była wyprostowalna. Wyżej wspomnieliśmy, że dana funkcja musi spełnić pewne trzy warunki. Otóż te wszystkie warunki będą z kolei spełnione, gdy pochodna danej funkcji jest ciągła. A zatem krzywa:

$$y = f(x)$$

jest wyprostowalna, gdy

$$y' = f'(x)$$

jest funkcją ciągłą. Istotnie, wówczas będą spełnione trzy warunki, o których było mowa wyżej: 1/ funkcja

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

musi być ciągłą, gdyż funkcja pod znakiem całki jest ciągła.