

Mianowicie

$$f'(x) = \frac{P'(x) \cdot Q(x) - P(x) \cdot Q'(x)}{Q^2(x)}$$

Niech np.

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$$

Pochodna

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 2 - (2x+3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-6x-2}{(x^2+1)^2}$$

Z kolei uzasadnimy wzór dla pochodnej t.zw. funkcji złożonej.

Przypuśćmy, że funkcja jest dana nie bezpośrednio w zależności od zmiennej x , ale w zależności od innej funkcji $f(x)$, to jest, że mamy do czynienia z funkcją o postaci:

$$f[f(x)]$$

Przykładów funkcji złożonych można dać bardzo wiele, np. $\log \sin x$. $\sin x$ oznaczmy przez z i naszą funkcją będzie $\log z$. Obliczenie pochodnej funkcji złożonej nie przedstawia trudności.

Niech

gdy oznaczmy $f(x)$ przez z , funkcja przybierze kształt

$$y = f(z)$$

Pochodną jej będzie

$$y' = \{ f[f(x)] \}' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ponieważ żaden z przyrostów Δx , Δz nie może być równym zeru,* więc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Przechodząc do granicy znajdziemy, że

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

Przypuśćmy, że funkcje $y = f(z)$ oraz $z = f(x)$ są ciągłe; wówczas gdy $\Delta x \rightarrow 0$, to i $\Delta z \rightarrow 0$, a gdy $\Delta z \rightarrow 0$, to $\Delta y \rightarrow 0$. Jeżeli $f(z)$ i $f(x)$ nie tylko są ciągłe, lecz i posiadają pochodne w rozważanych przedziałkach, to ostatecznie

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(z) \cdot f'(x)$$

* Gdyby funkcja $f(x)$, wyrażająca z , była stałą, to $\Delta z = 0$, pomimo że $\Delta x \neq 0$; ten przypadek odsuwamy przy niniejszym dowodzie. Zresztą wtedy wzór na pochodną funkcji złożonej jest także prawdziwy, jak to sprawdzamy bezpośrednio, bo jeśli $f(x) = \text{const}$, to $f[f(x)]$ jest także stałą, a więc $f'(x) = 0$, $f'[f(x)]$ także $= 0$.

A więc pochodna funkcji złożonej

$$\{f[\varphi(x)]\}' = f'(z) \cdot \varphi'(x)$$

gdzie

$$z = \varphi(x)$$

Obliczymy teraz pochodne funkcji trygonometrycznych.

Niech będzie dana funkcja

$$f(x) = \sin x$$

Pochodna tej funkcji

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

Zmieniając licznik na iloraz otrzymamy:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot 2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \sin \frac{h}{2} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x \end{aligned}$$

Czyli

$$(\sin x)' = \cos x$$

W podobny sposób znajdziemy, że

$$(\cos x)' = -\sin x$$

W istocie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right] = -\sin x$$

Mając pochodną funkcji $\sin x$ i $\cos x$, z łatwością znajdziemy pochodną funkcji

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Mianowicie

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

A więc

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Zupełnie tak samo można obliczyć pochodną funkcji

$$f(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Znajdziemy

$$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Przeróbmy teraz kilka przykładów na obliczanie pochodnych funkcji złożonych.

Niech będzie dana funkcja złożona

$$y = f(x) = \sin x^n$$

Oznaczmy x^n przez z :

$$x^n = z$$

A więc

$$y = \sin z$$

Stosując wzór dla pochodnej funkcji złożonej znajdziemy

$$y' = (\sin z)' \cdot (x^n)' = \cos z \cdot n x^{n-1} = n x^{n-1} \cdot \cos x^n$$

Niech będzie dana funkcja

$$y = \operatorname{tg} \frac{z}{x}$$

Oznaczmy podobnie jak w poprzednim przykładzie

$$\frac{z}{x} = z$$

W takim razie

$$y = \operatorname{tg} z$$

Stąd znajdziemy pochodną

$$y' = (\operatorname{tg} z) \cdot \left(\frac{z}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 z} \cdot (-x)^{-2} = \frac{-x^{-2}}{\cos^2 \frac{z}{x}} = -\frac{1}{x^2 \cos^2 \frac{z}{x}}$$

Przypuśćmy teraz, że

$$y = [\sin(a \cdot \operatorname{tg} x)]^n$$

Gdy oznaczmy $\sin(a \cdot \operatorname{tg} x) = t$, to $y = t^n$ zaś $y' = n t^{n-1}$
 Oznaczmy dalej $\operatorname{tg} x = z$ a więc $t = \sin(a \cdot z)$. Zauważmy następnie, że

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

A zatem

$$y' = n t^{n-1} \cdot a \cdot \cos(a \cdot z) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = n \cdot a \cdot \sin^{n-1}(a \cdot \operatorname{tg} x) \cdot \cos(a \cdot \operatorname{tg} x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Z samego pojęcia funkcji wynika, że zależność funkcjonalna jest odwracalna. To znaczy, że jeżeli

$$(1) \quad y = f(x)$$

To zależność x od y , uważanego za zmienną niezależną może być oznaczona za pomocą nowego symbolu funkcyjnego

$$(2) \quad x = f(y)$$

Aby takie odwrócenie było celowe, musi funkcja $f(y)$ spełniać pewne warunki, dotyczące się np. jednoznaczności w pewnym przedziale, ciągłości i t.p. Później zbadamy pod jakimi warunkami funkcja $f(y)$ będzie zadośćczyniła tym wymaganiom, koniecznym do tego, by mogła być użyta w naszych warunkach.

Na razie założymy, że funkcja $f(y)$ w badanym przedziale oznacza funkcję, posiadającą tylko co wspomniane własności, a także że posiada pochodną.

Nie trudno jest podać związek pomiędzy pochodnymi funkcji /1/ i /2/. Określimy obie pochodne:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

W obu wypadkach symbole Δx i Δy oznaczają to samo, mamy więc prawo napisać:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Jeżeli teraz przejdziemy do granicy i granica lewej strony będzie różna od zera, to

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Używając poprzednich symbolów napiszemy:

$$f'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Mając więc pochodną funkcji danej, będziemy mogli znaleźć pochodną funkcji odwrotnej. Zastosujemy ten wzór do obliczenia pochodnych tych funkcji, których dotychczas różniczkować nie potrafiliśmy

Rozszerzymy przedewszystkiem wzór wyznaczający pochodną funkcji

$$y = x^n$$

i na ten przypadek, gdy n jest liczbą ułamkową, równą np. $\frac{1}{p}$. Niech zatem

$$y = x^{\frac{1}{p}}$$

czyli

$$y = \sqrt[p]{x}$$

Odwróćmy daną zależność, podnosząc obie strony do potęgi p .

$$x = y^p$$

Pochodną x względem y będzie

$$x' = f'(y) = p \cdot y^{p-1}$$

a więc pochodną szukana

$$f'(x) = \frac{1}{p \cdot y^{p-1}} = \frac{1}{p \cdot x^{\frac{p-1}{p}}} = \frac{1}{p \cdot x^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{1}{p} \cdot x^{\frac{1}{p}-1}$$

Wyrażając p przez n otrzymamy

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Przypuśćmy teraz, że wykładnik jest dowolną liczbą ułamkową

$$n = \frac{q}{p}$$

i niech znowu

$$y = x^n = x^{\frac{q}{p}}$$

Możemy to napisać w sposób następujący:

$$y = (x^{\frac{1}{p}})^q$$

Oznaczmy $x^{\frac{1}{p}} = z$ i zastosujmy wzór dla pochodnej funkcji złożonej

$$y' = q \cdot z^{q-1} \cdot \frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1} = \frac{q}{p} \cdot x^{\frac{q-1}{p} + \frac{1}{p} - 1} = \frac{q}{p} x^{\frac{q}{p}-1}$$

Wracając do oznaczenia poprzedniego, napiszemy:

$$y' = n x^{n-1}$$

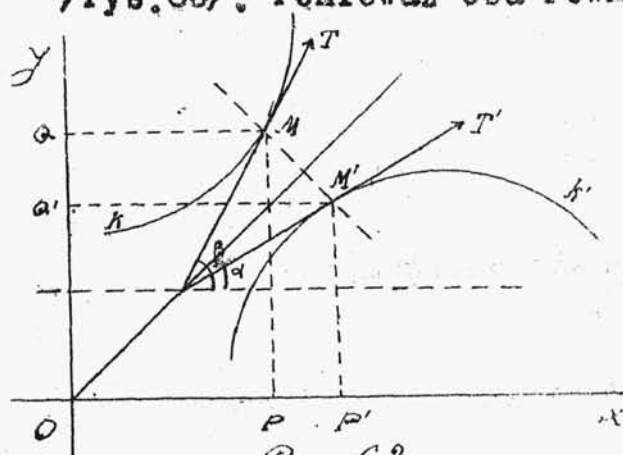
A więc wzór uzasadniony dla wykładników całkowitych dodatnich, rozszerzony następnie dla wykładników całkowitych ujemnych, stosuje się też do wykładników ułamkowych; innymi słowy wzór ten jest słuszny dla każdego wykładnika wymiernego.

Przypuśćmy, że mamy dwie funkcje odwrotne względem siebie: $y = f(x)$ oraz $x = f^{-1}(y)$. Jak wiemy, pomiędzy ich pochodnymi zachodzi zależność następująca:

$$f'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Zobaczmy, jak się ta zależność wyrazi w interpretacji geometrycznej. Niech krzywa K będzie wykresem

pierwszego równania /rys.62/, krzywa K' - drugiego /rys.63/. Ponieważ oba równania wyrażają tę samą zależność, różnica zaś ich



Rys. 62.

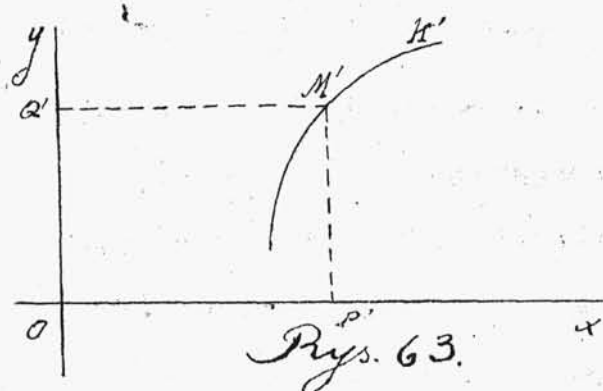
y-ów krzywej K' i odwrotnie. Obierzmy na krzywej K punkt M i znajdziemy na krzywej K' odpowiadający mu

punkt M' :

$$OP' = MP$$

$$OQ' = MQ$$

przenieśmy obie krzywe na jeden wykres. Będą one symetryczne względem dwu-



Rys. 63.

siecznej i ćwiartki: punkty M i M' będą leżeć na prostopadłej do tej dwusiecznej. Wykreślmy następnie styczne do krzywych w tych punktach. Ponieważ ich współczynniki kierunkowe są odwrotnościami, więc kąty które te styczne tworzą z osiami, muszą dopełniać się do $\frac{\pi}{2}$:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Istotnie: współczynniki kierunkowe stycznych są to

$$f'(x) = \operatorname{tg} \beta \quad \text{ i } \quad f'(y) = \operatorname{tg} \alpha$$

Iloczyn tych współczynników $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 1$

skąd $\operatorname{tg} \alpha = \cotg \beta$, a więc $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Styczne w M i M' przecinają się na dwusiecznej I-ej ćwiartki

Znając już pochodne funkcji goniometrycznych, obliczymy pochodne funkcji kołowych. Przypuśćmy zatem, że jest dana funkcja

$$y = \arcsin x$$

Jest to, jak wiadomo, funkcja wielowartościowa: jednej wartości x odpowiada nieskończenie wiele wartości y /rys. 25/. Jeżeli jednak ograniczymy się do części krzywej, zawartej między dwoma punktami $(1, \frac{\pi}{2})$ i $(-1, -\frac{\pi}{2})$, otrzymamy funkcję jednowartościową, którą oznaczymy przez

$$y = \operatorname{Arcsin} x$$

Pochodna tej funkcji

$$(\operatorname{Arcsin} x)' = (\sin y)' = \frac{1}{\cos y}$$

Ponieważ zaś $x = \sin y$, więc

$$\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Zauważmy dalej, że styczne w punktach, mających

tę samą odciętą, zaś rzędne różniące się mniej niż o 2π mają współczynniki kierunkowe, które różnią się tylko znakami. Styczna we wszystkich punktach wyodrębnionej części krzywej ma współczynnik dodatni.

$$(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

W zupełnie podobny sposób można badać funkcję

$$y = \arccos x$$

Wyodrębnimy część krzywej, zawartą między punktami $(1, 0)$ i $(-1, \pi)$ i oznaczmy ją przez

$$y = \operatorname{Arccos} x$$

Pochodną powyższej funkcji

$$(\operatorname{Arccos} x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sin y}$$

Podstawiając

$$\sin y = \pm \sqrt{1 - \cos^2 y} = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

i uwzględniając znak $+$, otrzymamy

$$(\operatorname{Arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Warto zwrócić uwagę na zależność, zachodzącą pomiędzy sumą dwóch ostatnio rozpatrywanych funkcji i sumą ich pochodnych:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x &= \frac{\pi}{2} \\ (\operatorname{Arcsin} x)' + (\operatorname{Arccos} x)' &= 0 \end{aligned}$$

Przejdźmy teraz do funkcji

$$y = \operatorname{arctg} x$$

Podobnie jak w przykładach poprzednich, dla otrzymania funkcji jednowartościowej, oznaczmy jedną gałąź krzywej przez

$$y = \operatorname{Arctg} x$$

Wówczas

$$(\operatorname{Arctg} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} y} \right)' = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$$

Ponieważ zaś

$$x = \operatorname{tg} y$$

więc

$$(\operatorname{Arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

FUNKCJE HYPERBOLICZNE. Uwydatniając podobieństwa, zachodzące pomiędzy różnymi działami matematyki, wprowadzimy nowy rodzaj funkcji, mianowicie t.j.w. funkcje hyperboliczne.

Niech będzie dane koło trygonometryczne o promieniu $r = 1$ i na nim punkt $M(x, y)$. Oznaczmy kąt $MO P$ wyrażony w mierze bezwzględnej, przez α . Pamiętajmy określenia:

$$y = \sinh \alpha ; x = \cosh \alpha$$

Zauważmy, że pole wycinka kołowego równa się dłu-