

Ze wzorów na dodawanie funkcji hiperbolicznych wynikają wzory na podwojenie

Przys. 69. $\text{Sh } 2u = 2\text{Sh } u \cdot \text{Ch } u$

$$\text{Ch } 2u = \text{Ch}^2 u + \text{Sh}^2 u = 2\text{Sh}^2 u + 1 = 2\text{Ch}^2 u - 1$$

Wszystkie wyżej uzasadnione wzory są słuszne i wtedy, gdy $u < 0$.

dy, gdy $u < 0$.

Przejdźmy w końcu do ROZNICZKOWANIA FUNKCJI HIPERBOLICZNYCH.

Zauważmy więc, że

$$\frac{\text{Ch}(x+\Delta x) - \text{Ch } x}{\Delta x} = \frac{2\text{Sh}(x+\frac{\Delta x}{2}) \cdot \text{Sh } \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

a zatem

$$(\text{Ch } x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{Sh}(x+\frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Sh } \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \text{Sh } x$$

czyli

$$(\text{Ch } x)' = \text{Sh } x$$

zupełnie podobnie

$$\frac{\text{Sh}(x+\Delta x) - \text{Sh } x}{\Delta x} = \text{Ch}(x+\frac{\Delta x}{2}) = \frac{\text{Sh } \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Przechodząc do granicy znajdziemy z łatwością, że

$$(\text{Sh } x)' = \text{Ch } x$$

Zajmiemy się teraz badaniem funkcji niezmiernie ważnej i ciekawej, będącej sumą funkcji hiperbolicznych

$$(1) \quad f(x) = \operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x$$

Zasadniczą własność tej funkcji polega na tem, że jej pochodna jest równa samej funkcji. Istotnie różniczkując równanie /1/ znajdziemy, że

$$f'(x) = \operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x$$

czyli

$$(2) \quad f'(x) = f(x)$$

Jej następną własnością jest to, że funkcja sumy dwóch składników jest równa iloczynowi funkcji tych składników. W rzeczy samej

$$f(x+y) = \operatorname{Sh}(x+y) + \operatorname{Ch}(x+y) = \operatorname{Sh} x \cdot \operatorname{Ch} y + \operatorname{Ch} x \cdot \operatorname{Sh} y + \operatorname{Ch} x \cdot \operatorname{Ch} y + \operatorname{Sh} x \cdot \operatorname{Sh} y = (\operatorname{Sh} x + \operatorname{Ch} x)(\operatorname{Sh} y + \operatorname{Ch} y)$$

czyli

$$(3) \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

Równość /3/ można rozszerzyć na większą liczbę składników, np.

$$f[x+(y+z)] = f(x) \cdot f(y+z) = f(x) \cdot f(y) \cdot f(z)$$

Ogólnie można napisać:

$$(4) \quad f(x+y+z+t+\dots) = f(x) \cdot f(y) \cdot f(z) \cdot f(t) \cdot \dots$$

Gdy założymy, że

$$x=y=z=\dots$$

otrzymamy wzór

$$(5) \quad f(x \cdot n) = [f(x)]^n$$

Oznaczmy przez e sumę funkcji hiperbolicznych, gdy $x=1$, czyli

$$f(1) = \text{Sh } 1 + \text{Ch } 1 = e$$

łatwo dowieść że

$$3 > e > 1 + \sqrt{2}$$

W istocie, pole wycinka $OMA=1$ /rys. 69/; a więc pole trójkąta $OMP > 1$. Stąd zaś

$$OP \cdot OM > 2$$

Zauważmy dalej, że

$$\text{Ch}^2 1 = \text{Sh}^2 1 + 1, \quad \text{czyli} \quad OP^2 = MP^2 + 1,$$

a, że $\text{Sh}^2 1 > 1$ czyli $MP > 1$

zatem

$$OP^2 > 2$$

zaś

$$OP > \sqrt{2}$$

$$MP + OP = \text{Sh } 1 + \text{Ch } 1 = e > 1 + \sqrt{2}$$

Podobnie można dowieść, że $e < 3$.

Zakładając we wzorze /5/ $x=1$ znajdziemy wzór:

$$f(n) = [f(1)]^n = e^n$$

czyniąc zaś w tym wzorze /5/ $x = \frac{1}{n}$, otrzymamy

$$f(1) = [f(\frac{1}{n})]^n$$

stąd napiszemy

$$f(\frac{1}{n}) = [f(1)]^{\frac{1}{n}}, \quad (7) \quad f(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}}$$

Idąc dalej jeszcze i zakładając we wzorze /5/ $x = \frac{1}{m}$ mieć będziemy

$$f(\frac{1}{m}) = [f(\frac{1}{m})]^m;$$

stąd

$$(8) \quad f(\frac{1}{m}) = e^{\frac{1}{m}}$$

Widzimy więc, że utożsamiliśmy wartości naszej funkcji /1/ z funkcją wykładniczą dla wszystkich wartości wymiernych argumentu.

Wzory te możemy rozszerzyć i na ten wypadek, gdy x jest liczbą niewymierną. W rzeczy samej będziemy mogli wówczas ją określić, jako granicę pewnego ciągu, np.

$$H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots$$

przyczem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = x$$

Na mocy wzoru /8/ można napisać

$$f(H_n) = e^{H_n}$$

Przechodząc do granicy dla $n \rightarrow \infty$, napiszemy /przy-

puszczamy, że funkcja e^x jest ciągła/:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(H_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} H_n) = f(x)$$

Stąd zaś wynika wzór

$$(9) \quad f(x) = e^x$$

Ta równość będzie miała miejsce przy wszelkich wartościach x .

Wszystko więc, co udowodniliśmy dla funkcji /1/ będzie słuszne i dla funkcji e^x .

A więc

$$(e^x)' = e^x$$
$$\operatorname{Sh} x + \operatorname{Ch} x = e^x$$

Ponieważ

$$\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x = \frac{1}{\operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x}$$

więc

$$\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x = e^{-x}$$

Dodając i odejmując dwa ostatnie wzory, otrzymamy

$$\operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Wzór /5/ można napisać również w innej postaci, znanej pod nazwą WZORU MOIVRE'A:

$$(\operatorname{Sh} x + \operatorname{Ch} x)^n = \operatorname{Sh} nx + \operatorname{Ch} nx$$

Podobnie

$$(\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x)^n = \operatorname{Ch} nx - \operatorname{Sh} nx$$

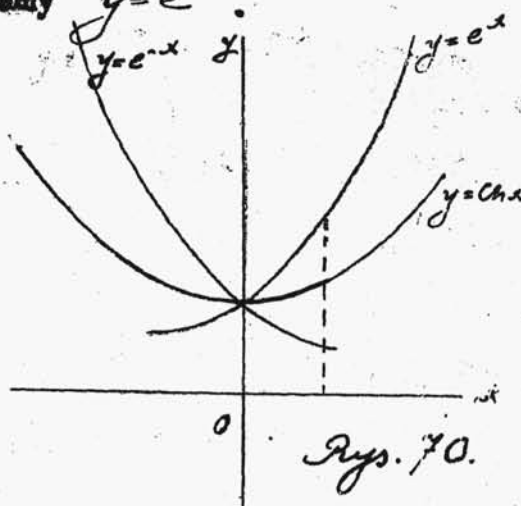
To samo zresztą wyraża równość

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

Przejdźmy teraz do wykresu funkcji

$$y = e^x$$

Ponieważ przy wszelkich wartościach zmiennej x funkcja y jest liczbą dodatnią, cały wykres leżąc będzie nad osią x . Łatwo spostrzec, że krzywa przecina oś y w punkcie $A(0, 1)$, gdyż z skrótu równania wynika, że dla $x=0$ mamy $y=1$. Podobnie dla $x=1$ mamy $y=e$.



Rys. 70.

Wykres funkcji

$$y = e^{-x}$$

jest symetryczny do poprzedniego wykresu; osią symetrii jest oś y .

Mając wykresy obu powyższych funkcji łatwo można otrzymać wykres funkcji

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Nianowicie rzędna jakiegokolwiek punktu tej krzywej jest równa połowie sumy rzędnych punktów, mających te same odcięte, co i punkt dany, na poprzednich wykresach. Łatwo zauważyć, że będą to środki odcinków rzędnych, zawartych pomiędzy obiema krzywymi. Krzywa ta

nosi nazwę krzywej łancuchowej.
Przebieg jej zmienności jest widoczny z następującej tabliczki.

$$\text{Ch } x$$

x	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$
$\text{Ch } x$	$+\infty \searrow 1 \nearrow +\infty$

Zauważmy, że $\text{Ch } x = \pm \sqrt{1 + \text{Sh}^2 x}$. Widać jednak z wykresu i z samego określenia funkcji $\text{Ch } x$ dla wartości dodatnich i ujemnych, że znak $-$ należy odrzucić.

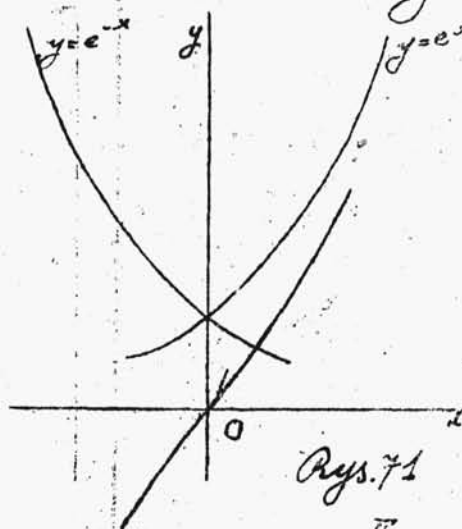
Dla otrzymania rzędnych funkcji

$$y = \text{Sh } x$$

należy podzielić przez 2 różnice rzędnych odpowiednich punktów krzywych

$$y = e^x \text{ i } y = e^{-x}$$

/rys. 71/



x	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$
$\text{Sh } x$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$

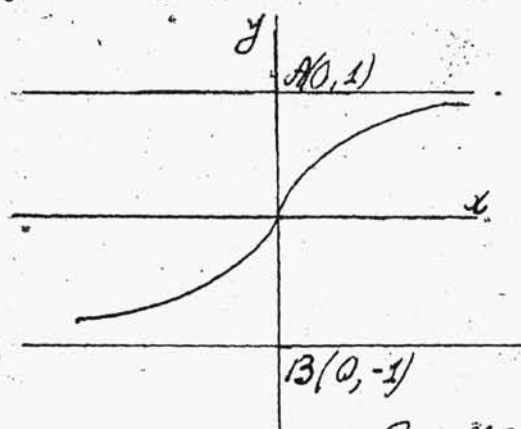
Rys. 71

Łatwo jest również otrzymać wykres funkcji $y = \text{Th } x$.

Z rysunku 68 widać, że kąt KOA

jest mniejszy od $\frac{\pi}{4}$ dla każdego x (x podwójne po-

le wycinka hyperbolicznego), a więc $AK = Thx < 1 = OA$
 Cała krzywa zawiera się między dwiema prostymi równole-
 głymi do osi odciętych, o równaniach: $y=1$ oraz $y=-1$
 Ponadto dla $x=0$ mamy $Th0=0$. Przebieg zmienności
 tej funkcji jest następujący:



Thx	
x	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$
Thx	$-1 \nearrow 0 \nearrow +1$

Rys. 72.

Przejdźmy teraz do funkcji odwrotnych. Przypuśćmy
 że jest dana funkcja wykładnicza

$$(2) \quad x = e^y$$

Funkcję względem niej odwrotną nazywamy funkcją
 logarytmiczną i oznaczamy symbolem

$$(1') \quad y = \log_e x$$

Funkcja ta ma wartości określone tylko dla wartości do-
 datnich x . Łatwo znajdziemy jej pochodną funkcji /1/
 względem y jest $x'_y = e^y$. Stosując wzór na pochodną
 funkcji odwrotnej napiszemy:

$$y'_x = \frac{1}{e^y}$$

stad

$$y' = \frac{1}{x}$$

czyli

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}.$$

A zatem pochodną funkcji wykładniczej $x = e^y$ względem zmiennej y jest e^y czyli x zaś pochodną funkcji logarytmicznej $y = \log_e x$ jest $\frac{1}{x}$.

Funkcję odwrotną względem $y = \operatorname{Sh} x$ oznaczamy symbolem

$$/1/ \quad y = \operatorname{arg} \operatorname{Sh} x$$

/argument $\operatorname{Sh} x$ /, To samo można wyrazić pisząc:

$$/2/ \quad x = \operatorname{Sh} y$$

albo też

$$x = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

Jeżeli oznaczmy $e^y = z$ oraz $e^{-y} = \frac{1}{z}$, to otrzymamy związek:

$$2x = z - \frac{1}{z},$$

skąd

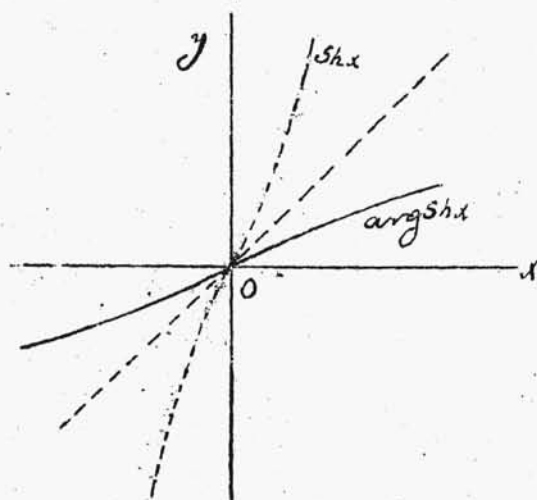
$$x^2 - 2xz - 1 = 0$$

A więc

$$e^y = z = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Znak $-$ należy tu odrzucić bo e^y nie może być ujemne: znajdziemy więc, że

$$y = \log_e (x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{arg} \operatorname{Sh} x.$$



Rys. 73.

Stąd z łatwością obliczymy pochodną:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

gdyż wiemy, że

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \operatorname{Ch} y = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}$$

Niech teraz będzie

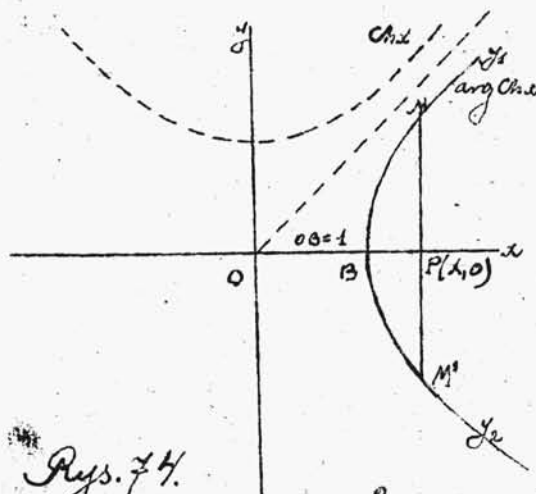
dana funkcja

$$13/ \quad y = \arg \operatorname{Ch} x$$

równoznaczna z funkcją

$$14/ \quad x = \operatorname{Ch} y$$

Jest ona określona tylko dla wartości $x > 1$. Jej wykres /rys. 74/, składa się z dwóch gałęzi: y_1 oraz y_2 , spotyjących ze sobą. Gdy $x = 1$, wówczas $y_1 = y_2 = 0$. Dla



Rys. 74.

dowolnej wartości x

$$\text{mamy } y_1 + y_2 = 0$$

Istotnie, jak wiemy

$$x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Nazwijmy, jak poprzednio

e^x przez z i podstawmy w powyższe równanie:

$$2x = z + \frac{1}{z}$$

$$z^2 - 2xz + 1 = 0$$

skąd znajdziemy

$$z = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Przypuśćmy, że przez y_1 nazwaliśmy dodatnią gałąź krzywej, zaś przez y_2 gałąź ujemną.

W takim razie

$$y_1 = \log_e(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$y_2 = \log_e(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

skąd sprawdzamy, iż, rzeczywiście:

$$y_1 + y_2 = 0$$

Wiemy że

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \operatorname{Sh} y = \pm \sqrt{\operatorname{Ch}^2 y - 1} = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

/Znak + należy wziąć wówczas, gdy $\operatorname{Sh} y > 0$, zaś znak

—, gdy $\operatorname{Sh} y < 0$. Stąd.

$$(\operatorname{arg} \operatorname{Ch} x)' = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

A zatem

$$[\log(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

oraz

$$[\log(x - \sqrt{x^2 - 1})]' = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Niech teraz

$$15) \quad y = \operatorname{arg} \operatorname{Th} x$$

czyli

$$16) \quad x = \operatorname{Th} y$$

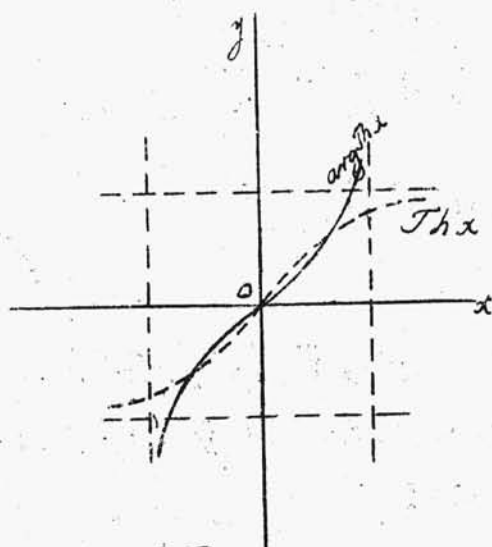
Punkcja ta. jest określona tylko wówczas gdy $|x| < 1$

Wiemy, że

$$\operatorname{Th} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

Jeżeli znowu oznaczymy e^y przez x , to będziemy mogli napisać:

$$x = \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$



Rys. 75.

Po aniesieniu mianownika otrzymamy:

$$x^2 x + x = x^2 - 1$$

Stąd

$$x^2 = \frac{1+x}{1-x}$$

A więc

$$y = \log_e x = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+x}{1-x}$$

Wyznamy pochodną tej funkcji:

$$(\arg Th x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}} = \operatorname{ch}^2 y$$

Ponieważ jednak

$$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$$

wiec po podzieleniu tego wzoru przez $\operatorname{ch}^2 y$ mieć będziemy:

$$1 - \operatorname{Th}^2 y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y}$$

stąd

$$\operatorname{ch}^2 y = \frac{1}{1 - \operatorname{Th}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

A zatem ostatecznie

$$(\arg Thx)' = \frac{1}{1-x^2}$$

ZASTOSOWANIE POCHODNYCH DO BADANIA FUNKCJI. Niech będzie dana funkcja $f(x)$, określona w przedziale (a, b) . Weźmy w tym przedziale dwie wartości zmiennej x , mianowicie x_1 i x_2 takie, ażeby:

$$1/ \quad a < x_1 < x_2 < b$$

Jeśli nierówność 1/ pociąga za sobą zawsze nierówność

$$2/ \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

to funkcję nazywamy **r o s n ą c ą** w tym przedziale.

Jeśli zaś nierówność 1/ pociąga za sobą zawsze nierówność

$$3/ \quad f(x_1) > f(x_2)$$

to funkcję nazywamy **m a l e j ą c ą** w tym przedziale.

Przypuśćmy, że dana funkcja $f(x)$, określona w przedziale (a, b) , w jednym z punktów tego przedziału posiada pochodną dodatnią, czyli $f'(x_0) > 0$.

Można wówczas znaleźć taką liczbę ε dodatnią, że nierówność

$$1/ \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0$$

pociągnie za sobą nierówność

$$2/ \quad f(x) < f(x_0)$$