

wykazuje ono bowiem związek pomiędzy różnicami napozór dziedzinami. Gdy bowiem podzielimy wzór /3/ przez otrzymany wzór, który udowodniliśmy dla pochodnej funkcji dwóch zmiennych zależnych:

$$1/4 \quad \frac{dz}{dt} = f'_x(x,y) \frac{dx}{dt} + f'_y(x,y) \frac{dy}{dt}$$

A zatem różniczka funkcji dwóch zmiennych x i y wyraża się przez x i y zawsze jednakowo, bez względu na to, czy x i y są niezależne, czy też zależne od siebie. Dlatego wygodnie jest nieraz zastąpić wzór /2/ przez wzór /3/.

POCHODNE FUNKCJI UWIKŁANYCH /jednej zmiennej/.

Gdy pomiędzy dwiema zmiennymi zachodzi zależność

$$f(x,y)=0$$

to y jest naogół funkcją uwikłaną x /lub odwrotnie/. Udowodnimy, że istnieje y jako funkcja x , przyjmująca wartość $y=b$ dla $x=a$, jeżeli są spełnione następujące warunki: 1/ wartości $x=a$ i $y=b$ czynią zadość równaniu

$$f(x,y)=0,$$

czyli

$$f(a,b)=0;$$

2/ funkcja

$$z = f(x,y)$$

jest ciągła w otoczeniu punktu

$M(a,b)$. 3/ gdy x

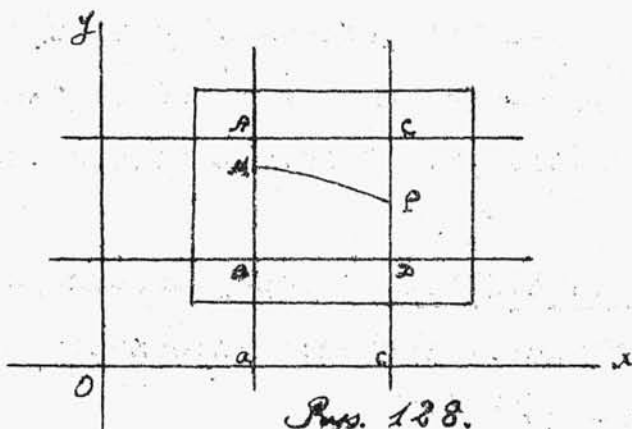
ma wartość stałą, z jest funkcją rosnącą /lub maleją-

ca, czyli t.zw. monotoniczną/ zmiennej y . Gdy zatem są spełnione trzy powyższe warunki, to y jest funkcją x czyli

$$y = f(x)$$

Niech otoczeniem punktu M będzie pewien prostokąt. Z założenia dla punktu $M(a, b)$

$$f(M) = 0$$



Rys. 128.

Poprowadźmy przez ten punkt równoległą do osi y . Dla każdego punktu tej równoległej

$$z = f(a, y)$$

Obierzmy na tej równoległej

dwa punkty: $A(a, y_1)$ i $B(a, y_2)$. $A(a, y_1) : B(a, y_2)$

Przypuśćmy, że $y_1 > b$ i że $y_2 < b$; w takim razie

$$f(A) > 0 = f(M)$$

oraz

$$f(B) < 0 = f(M)$$

Przesuńmy następnie punkt A wzdłuż równoległej do osi x . Na mocy ciągłości istnieć musi na tej równoległej takie otoczenie punktu A /odcinek AC /, w którym funkcja z byłaby również dodatnia /jak w punkcie A /. Podobnie przesunąć punkt B Dla rew-

negu odcinka BD , również na mocy ciągłości funkcja z jest ujemna. Przez punkty C i D /lub tylko przez ten, którego odcięta jest bliższa a / wykreślimy równoległą do osi y o równaniu $x=c$. Dla każdego punktu jej znówu prostej $z = f(c, y)$

Ponieważ w punkcie C funkcja jest dodatnia, zaś w punkcie D ujemna, więc pomiędzy temi punktami istnieje przynajmniej jeden taki punkt P , w którym

$$z = f(P) = 0$$

Tak samo można znaleźć na każdej równoległej do osi y , pomiędzy AB i CD taki punkt /przynajmniej jeden/, w którym funkcja z byłaby równa zeru. Łącząc wszystkie te punkty ze sobą, otrzymamy pewną taką krzywą, analitycznie zaś funkcję

$$y = f(x)$$

iz dla każdego jej punktu jest spełnione równanie

$$f(x, y) = 0$$

co właśnie mieliśmy na celu udowodnić.

Udowodnimy teraz, że funkcja uwikłana $f(x, y) = 0$ musi posiadać w punkcie (a, b) pochodną wówczas, gdy są spełnione warunki następujące: 1/ sama funkcja i jej pochodne cząstkowe są w tym punkcie ciągłe: 2/ przy

$$x=a \text{ i } y=b$$

$$f'(x, y) \neq 0$$

czyli

$$f'_b(a, b) \neq 0$$

Wtedy y przybierze dowolną wartość stałą, to

$$x = f(x, y)$$

będzie rosnącą lub malejącą funkcją jednej zmiennej x

Zauważmy, że gdy są spełnione wyżej wyszczególnione

warunki, to y można wyrazić jako funkcję x :

$$y = \varphi(x)$$

Na zasadzie dowiedzionego już twierdzenia istnieje takie otoczenie punktu (a, b) na krzywej, wyrażonej przez to równanie/, że w każdym punkcie tego otoczenia

$$f(x, y) = 0$$

Nadajmy zmiennej x przyrost $\Delta x = h$; wówczas

y przybierze przyrost $\Delta y = k$. A więc

$$f(a, b) = 0$$

oraz

$$f(a+h, b+k) = 0$$

Utwórzmy różnicę funkcji w tych punktach:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = 0$$

Na zasadzie wzoru, dotyczącego wartości pośredniej, można napisać:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = h \cdot f'_x(\alpha, b) + k \cdot f'_y(\alpha, \beta')$$

przyczem

$$\alpha = a + \theta h, \quad \alpha' = a + h, \quad \beta' = b + \theta' k,$$

gdzie

$$0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta' < 1.$$

A więc

$$h \cdot f'_x(\alpha, b) + k \cdot f'_y(\alpha', \beta') = 0$$

Stąd

$$\frac{k}{h} = - \frac{f'_x(\alpha, b)}{f'_y(\alpha', \beta')}$$

W granicy, gdy $h \rightarrow 0$, to $\alpha \rightarrow 0$, $\beta' \rightarrow 0$ i t.d.

Zatem znaleźć możemy

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = - \frac{f'_x(a, b)}{f'_y(a, b)}$$

Używając poprzedniego znakowania, napiszemy:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

Gdy mamy funkcję uwikłaną, wyrażoną zapomocą równania

$$f(x, y) = 0$$

możemy znaleźć pochodną tej funkcji y względem x .

Utwórzmy funkcję $z = f(x, y)$

Oczywiście z można uważać za funkcję złożoną jednej tylko zmiennej x , gdyż

$$y = \varphi(x)$$

jest samo funkcją x , chociaż kształt funkcji $\varphi(x)$ nie zawsze potrafimy znaleźć. Obliczmy pochodną z względem x

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Ponieważ

$$z = f(x, y) = 0 \quad \frac{dz}{dx} = 0$$

więc pochodna wielkości stałej

A zatem

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

To właśnie jest wzór, określający pochodną funkcji uwikłanej.

Przykład 1. Niech będzie dane równanie:

$$1 + x^3 y^2 + xy^2 - y^5 = 0$$

Ponieważ równanie to jest stopnia piątego względem y , więc nie można y wyrazić algebraicznie za pomocą x . Możemy jednak znaleźć pochodną y' . Mianowicie:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{3x^2 y^2 + y^2}{2x^3 y + 2xy^2 - 5y^4}$$

Przykład 2. Niech: $x - e^{xy} = 0$

W takim razie:

$$y' = - \frac{1 - ye^{xy}}{-e^{xy}} = - \frac{1 - xy}{-x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x}$$

To samo otrzymalibyśmy, rozwiązując równanie względem y :

$$\log_e x = xy$$

skąd

$$y = \frac{\log_e x}{x}$$

A zatem:

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log_e x}{x^2} = \frac{1 - xy}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x}$$

Przykład 3. Niech będzie: $y - e^{xy} = 0$

Tutaj nie można otrzymać y bezpośrednio w zależności od x . Jest tylko jeden sposób znalezienia y' .

mianowicie zapomocą wzoru wyznaczającego pochodną funkcji uwikłanej:

$$y' = - \frac{y e^{xy}}{1 - x e^{xy}} = - \frac{e^{xy}}{1 - x e^{xy}}$$

POCHODNE CZĄSTKOWE WYŻSZYCH RZĘDÓW. Mając daną funkcję

$$z = f(x, y)$$

można znaleźć jej dwie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$$f'_x(x, y) \quad \text{oraz} \quad f'_y(x, y)$$

Dla każdej z tych pochodnych można znaleźć znowu dwie pochodne: jedną względem x , drugą względem y . A zatem mieć będziemy cztery pochodne cząstkowe rzędu drugiego, które powstają przez różniczkowanie funkcji dwa razy względem x , albo raz względem x , i drugi raz względem y , albo raz względem y , a następnie względem x , lub wreszcie dwa razy względem y :

$$f''_{xx}(x, y); \quad f''_{yx}(x, y);$$

$$f''_{xy}(x, y); \quad f''_{yy}(x, y);$$

oznaczają się również przez

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Istotnie jest tych pochodnych tylko trzy, gdyż dwie z powyższych są sobie równe, mianowicie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Dowód tego opiera się na twierdzeniu o wartości pośredniej. Utwóramy mianowicie wyrażenie:

$$V = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$

Oznaczmy

$$f(x, y+k) - f(x, y) = \varphi(x, y),$$

skąd

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) = \varphi(x+h, y)$$

A więc

$$V = \varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)$$

Stosując wzór na wartość średnią, napiszemy:

$$V = h \cdot \varphi'_x(x+\theta h, y),$$

albo

$$V = h \cdot [\varphi'_x(x+\theta h, y+k) - \varphi'_x(x+\theta h, y)].$$

Stosując ten sam wzór po raz drugi dla zmiennej

y , otrzymamy:

$$V = h \cdot k \cdot f''_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k)$$

Zmienne x i y odgrywają w tym wzorze jednakowe role; gdybyśmy bowiem oznaczyli

$$f(x+h, y) - f(x, y) = \varphi(x, y)$$

to

$$V = \varphi(x, y+k) - \varphi(x, y),$$

skąd znowu

$$V = k \cdot h \cdot f''_{yx}(x+\theta_2 h, y+\theta'_2 k)$$

Ponieważ zaś

$$h \neq 0, k \neq 0$$

więc

$$f''_{xy}(x+\theta h, y+\theta' k) = f''_{yx}(x+\theta_2 h, y+\theta'_2 k).$$

Ta równość ma miejsce przy wszelkich wartościach

h i k w obszarze, w którym pochodne istnieją i są ciągłe. W granicy, gdy $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$,

mamy

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) \quad \text{c. b. d. d.}$$

P r z y k ł a d .

$$Z \equiv f(x, y) = x^3 + xy^2 + y^3$$

Pochodne rzędu pierwszego:

$$f'_x = 3x^2 + y^2; \quad f'_y = 2xy + 3y^2$$

Pochodne rzędu drugiego:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 6x; & f''_{xy} &= 2y \\ f''_{yx} &= 2y; & f''_{yy} &= 2x + 6y \end{aligned}$$

Mając pochodne cząstkowe rzędu drugiego, można otrzymać cztery różne pochodne cząstkowe rzędu trzeciego:

$$f'''_{x^3}, f'''_{x^2y}, f'''_{xy^2}, f'''_{y^3},$$

gdzie

$$f'''_{xyx} = f'''_{xxy} = f'''_{yx^2},$$

oraz

$$f'''_{yxy} = f'''_{yyx} = f'''_{xy^2}$$

Następnie można znaleźć pięć pochodnych rzędu czwartego i t.d. wogóle $n+1$ pochodnych rzędu n , albowiem porządek tworzenia pochodnych mieszanych /względem x i y / jest dowolny. Postacią ogólną pochodnej rzędu n jest

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha \partial y^{n-\alpha}}$$

gdzie α może przybierać $n+1$ wartości: $0, 1, 2, \dots, n$.

Dowodziemy teraz u o g ó l n i o n e g o

twierdzenia o wartości pośredniej dla funkcji dwóch zmiennych. Niech będzie dana funkcja $f(x, y)$

Utwórzmy funkcję pomocniczą:

$$\Phi(t) = f(x+ht, y+kt);$$

wówczas różnica $\Delta f = f(x+h, y+k) - f(x, y)$

może być wyrażona w postaci

$$\Delta f = \Phi(1) - \Phi(0).$$

Wzór Taylora jest następujący:

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h),$$

gdzie

$$h = b-a$$

zaś

$$0 \leq \theta \leq 1$$

A więc, jeżeli uważamy $\Phi(t)$ za funkcję jednej zmiennej t , co można zawsze uczynić, uważając wartości zmiennych x i y chwilowo za stałe:

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(0) + \frac{1}{2!} \Phi''(0) + \dots + \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} \Phi^{(n+1)}(0)$$

gdzie

$$0 \leq \theta \leq 1$$

Zauważymy, że

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= h \cdot f'_x(x+ht, y+kt) + k \cdot f'_y(x+ht, y+kt); \\ \Phi''(t) &= h^2 f''_{xx} + 2hk f''_{xy} + k^2 f''_{yy} \end{aligned}$$

czyli $\bar{\Phi}''(t) = h^2 f''_{xx} + 2h \cdot k \cdot f''_{xy} + k^2 f''_{yy}$;
i t.d. A zatem otrzymamy wzór następujący:

$$\begin{aligned} \Phi = f(x+h, y+k) - f(x, y) &= h \cdot f'_x(x, y) + k \cdot f'_y(x, y) + \\ &+ \frac{1}{2!} [h^2 f''_{xx}(x, y) + 2h \cdot k f''_{xy}(x, y) + k^2 f''_{yy}(x, y)] + \\ &+ \frac{1}{3!} [h^3 f'''_{xxx}(x, y) + 3h^2 k f'''_{xxy}(x, y) + 3h k^2 f'''_{xyy}(x, y) + k^3 f'''_{yyy}(x, y)] + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} [h^n f^{(n)}_{xxx\dots x}(x, y) + C_n^2 h^{n-2} k^2 f^{(n)}_{xyy\dots y}(x, y) + \\ &+ C_n^2 h^{n-2} k^2 f^{(n)}_{xyy\dots y}(x, y) + \dots + h^n f^{(n)}_{xxx\dots x}(x, y) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} [h^{n+1} f^{(n+1)}_{xxx\dots x}(x+0h, y+0k) + C_{n+1}^2 h^{n-1} k^2 f^{(n+1)}_{xyy\dots y}(x+0h, y+0k) + \\ &+ \dots + h^{n+1} f^{(n+1)}_{xyy\dots y}(x+0h, y+0k)] \end{aligned}$$

Wyrażenia zamknięte w nawiasach kwadratowych są analogiczne z rozwinięciem odpowiednich potęg dwumianu Newtona. Z powodu tej analogii oznaczają niektórzy n -ty wyraz wzoru Taylora dla funkcji dwóch zmiennych symbolicznie przez

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k \right)^{(n)}_{xy}$$

Należy pamiętać jednak, że przy podnoszeniu symbolu pochodnej do potęgi, należy wykładnik zastąpić nie przez rząd pochodnej, np.

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$$

Przyjawszy to oznaczenie, będziemy mogli wzór napisać w postaci skróconej:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k \right)_{x,y}^{(1)} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k \right)_{x,y}^{(2)} + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k \right)_{x,y}^{(n)} + \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k \right)_{x+\theta h, y+\theta k}^{(n+1)}$$

MAXIMUM I MINIMUM funkcji dwóch zmiennych. Niech będzie dana funkcja dwóch zmiennych

$$z = f(x, y)$$

Wiemy już, że jej ilustracją geometryczną będzie powierzchnia. Jeżeli w punkcie $M(a, b)$ funkcja osiąga maximum, to znaczy, iż istnieje takie otoczenie punktu M , że w każdym punkcie $P(x, y)$ tego otoczenia

$$f(a, b) > f(x, y)$$

Gdyby zaś w punkcie M funkcja osiągała minimum to dla każdego punktu pewnego otoczenia musiałaby zachodzić nierówność przeciwna:

$$f(a, b) < f(x, y)$$

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

Warunkiem koniecznym /lecz nie dostatecznym/, żeby funkcja posiadała w punkcie $M(a, b)$ maximum lub minimum jest, aby obie pochodne cząstkowe w tym punkcie były zerami:

$$f'_x(a, b) = 0; f'_y(a, b) = 0$$