

rzędu, to spełnione być muszą warunki następujące:

$$1/ \quad \varphi(x) = (a-x_0)^2 + (b-y_0)^2 - r^2 = 0$$

$$2/ \quad \varphi'(a) = \varphi'(a)$$

Pierwszy z nich wyraża, że okrąg przechodzi przez punkt M drugi zaś, że jest styczny w tym punkcie do danej krzywej. Te dwa warunki nie wyznaczają jednak koła w zupełności, albowiem równanie koła posiada trzy parametry: współrzędne środka i promień. Można więc postawić jeszcze trzeci warunek, aby

$$3/ \quad \varphi''(a) = \varphi''(a)$$

A zatem można zawsze znaleźć koło, którego styczność z krzywą byłaby rzędu drugiego /punkt styczności trzykrotny/. Takie koło nazywa się **kołem ściśle stycznym** lub **kołem krzywizny**; jego promień - **promieniem krzywizny**, zaś odwrotność promienia - **miarą krzywizny** lub wprost **krzywizną**.

Nieraz można znaleźć na krzywej punkty szczególne w których styczność z kołem może być rzędu wyższego niż drugi.

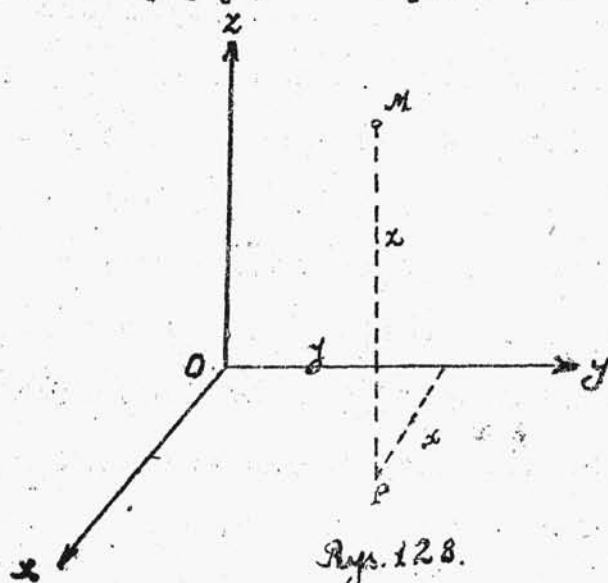
FUNKCJE DWUCH ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH.

Przejdziemy teraz do innego tematu, mianowicie do

badania funkcji dwóch zmiennych niezależnych. Przypuśćmy, że dana jest funkcja

$$z = f(x, y)$$

Podobnie jak przy wprowadzaniu każdego nowego pojęcia zwróćmy się do interpretacji geometrycznej. Metoda przedstawienia wykreślnego funkcji dwóch zmiennych jest w zasadzie ta sama, jak ta, którą stosowaliśmy przy badaniu funkcji jednej zmiennej. Musimy tylko obrać w przestrzeni trójwymiarowej trzy wzajemnie prostopadłe osie: x , y i z . Położenie dowolnego punktu M jest w zupełności wyznaczone przez trzy je-



Rys. 128.

go spółrzędne - odległości od płaszczyzn:

yoz , zox , xoy .

Odległości te oznaczamy odpowiednio literami x , y i

z ; sam punkt zaś

przez $M(x, y, z)$

Oczywiście spółrzednym przypisujemy odpowiednie znaki; na rys. 128 kierunki dodatnie na każdej osi są zaznaczone przez strzałkę.

Gdy pomiędzy spółrzednymi bieżącymi zachodzi za-

leżność

$$z = f(x, y)$$

to każdej parze odcinków (x, y) na płaszczyźnie xoy lub też każdemu punktowi P na tejże płaszczyźnie odpowiada w przestrzeni pewien punkt M , wniesiony o z nad tą płaszczyzną.

Przypuśćmy, że y jest wielkością stałą, a zmienia się tylko x ; punkt $P(x, y)$ posuwać się będzie na płaszczyźnie xoy wzdłuż prostej, równoległej do osi x ; punkt M , oczywiście, będzie się poruszał w płaszczyznierównoległej do xoz i zakreśli w tej płaszczyźnie pewną krzywą. Gdybyśmy teraz postąpili odwrotnie, t.j. ustalili x a zmieniali tylko y , to punkt M zakreśliłby pewną krzywą w płaszczyźnie równoległej do yoz . Można teraz obrać na płaszczyźnie xoy pewien obszar dwuwymiarowy, np. prostokąt wewnątrz którego może się poruszać dowolnie punkt $P(x, y)$ wówczas punkt M poruszać się będzie po pewnej powierzchni. Rzutem tej powierzchni na płaszczyznę xoy będzie właśnie dany obszar. Gdyby zmienna y nie była zupełnie niezależną, lecz zależała od zmiennej x , to zmienna z byłaby funkcją tylko x . Punkt P mógłby się poruszać nie po całej płaszczyźnie xoy lub jej części, ale tylko po pewnej krzywej w tej płaszczyźnie

której równanie np.

$$y = f(x)$$

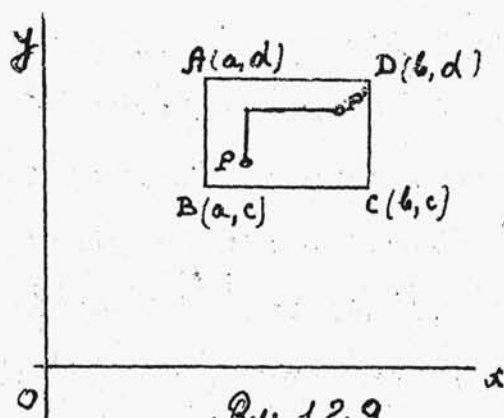
zaś punkt M zakreślałby pewną krzywą w przestrzeni,

Mówimy, że funkcja

$$z = f(x, y)$$

jest określona w pewnym obszarze, gdy znamy jej wartość w każdym punkcie tego obszaru. Jeżeli danym obszarem jest prostokąt, wówczas możemy to wyrazić analitycznie mówiąc, że funkcja jest określona dla

$$a \leq x \leq b; \quad c \leq y \leq d$$



Rys. 129.

Przypuśćmy, że punkt P został przesunięty do P' . Przesunięcie to mogło być uskutecznione różnymi drogami; często będziemy uważali, że punkt posuwa się najpierw

równoległe do osi y / x zostało ustalone/, a następnie równoległe do osi x / y zostało ustalone/.

Otoczeniem punktu P na płaszczyźnie nazywamy taki obszar /zwykle prostokąt lub koło/, wewnątrz którego znajduje się punkt P .

Jeżeli otoczeniem jest prostokąt /rys. 129/, którego bokami są $AD = 2m$ i $BA = 2n$, to warunek, a-

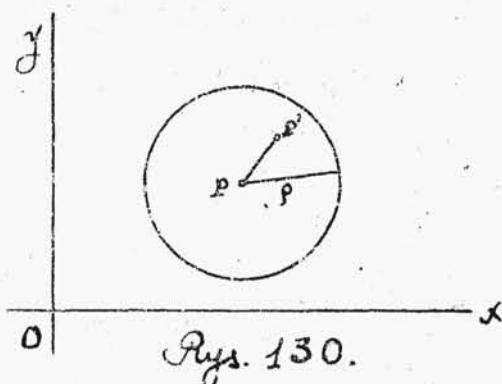
by punkt $P'(x, y)$ należał do otoczenia punktu wyraża się w sposób następujący:

$$|x - x_0| \leq m ; |y - y_0| \leq n$$

Gdy chodzi o otoczenie kołowe /rys.130/, to warunkiem tym jest: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \rho$.

Po ustaleniu tych pojęć możemy przejść do określenia ciągłości funkcji dwóch zmiennych.

Będziemy mówili, że funkcja $f(x, y)$ jest w punkcie $P(x, y)$ ciągła /albo: punkt P jest punktem ciągłości/, jeżeli dowolnie małej liczbie $\varepsilon > 0$ odpowiada jakie otoczenie, że dla dowolnego punktu M tego



Rys. 130.

otoczenia zachodzi nierówność

$$|f(M) - f(P)| < \varepsilon.$$

/UWAGA: gdy x i y są współrzędnymi punktu M , to często zamiast $f(x, y)$

pisze się $f(M)$ i t.p./.

Mogłoby się wydawać, że jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła oddzielnie względem x /przy y stałym ale dowolnym/ i oddzielnie względem y /przy x stałym, lecz dowolnym/, to jest ciągła i względem obu zmiennych jednocześnie. Przykład jednak nas przekona, że tak nie jest. Niech będzie dana funkcja

$$Z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

z zastrzeżeniem, że gdy jednocześnie $x=0$ i $y=0$, wówczas $Z=0$. Ta funkcja jest ciągła względem x i y oddzielnie w otoczeniu punktu początkowego współrzędnych. Udowodnimy najpierw, że jest ona ciągła względem x , gdy y jest stałe. Należy rozpatrzyć dwa wypadki:

1/ $y = y_0 \neq 0$

W takim razie

$$Z = \frac{2y_0 x}{y_0^2 + x^2}$$

Oczywiście w tym wypadku Z jest funkcją ciągłą względem x : Z jest funkcją wymierną zmiennej x , przy czem mianownik jest zawsze różny od zera.

2/ $y = 0$

W tym wypadku

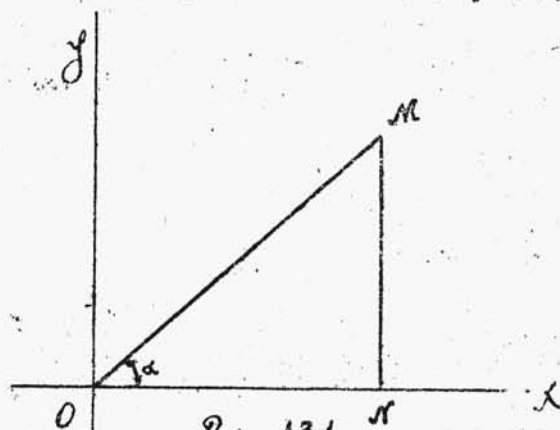
$$Z = 0$$

przy wszelkich wartościach $x \neq 0$, oraz $Z = 0$, gdy $x = 0$. /z określenia funkcji Z mamy: $Z = 0$ gdy $x = 0$ i $y = 0$ /. A zatem i w tym wypadku Z jest funkcją ciągłą względem x w otoczeniu punktu 0 .

Na mocy symetrii funkcji Z względem obu zmiennych można teraz twierdzić, że funkcja ta jest ciągła względem y , gdy x jest wielkością stałą.

Udowodnimy następnie, że w punkcie 0 funkcja

jest nieciągła względem obu zmiennych jednocześnie.
Zwróćmy uwagę na wartość funkcji w punkcie $M(x, y)$ w otoczeniu punktu O /aby $x \neq 0$ /.



Rys. 131.

$$f(M) = \frac{2 \frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2}$$

Gdy oznaczymy kąt MOx przez α , to

$$f(M) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Niech teraz punkt M zbliża się do punktu O wzdłuż prostej OM .

Stosunek $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \alpha$ będzie miał wartość stałą, a więc i funkcja $f(M)$ będzie wielkością stałą /różną od 0/. W punkcie O funkcja ta jest równa zeru; jest to więc funkcja nieciągła, gdyż niema takiego otoczenia punktu O , w którym zawsze

$$|f(O) - f(M)| < \varepsilon.$$

To właśnie chcieliśmy udowodnić.

POCHODNE FUNKCJI DWUCH ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH.

Niech będzie dana funkcja:

$$z = f(x, y)$$

Jeżeli jedną zmienną ustalimy i znajdziemy pochodną funkcji z względem drugiej zmiennej, otrzymamy t.jw. pochodną cząstkową. Gdy usta-

limy y i zróżniczkujemy funkcję względem x , to pochodną cząstkową będziemy oznaczali zapomocą symbolu $f'_x(x, y)$ albo też $\frac{df}{dx}$; analogicznie, gdy podczas różniczkowania x pozostaje stałe, a y się zmienia, otrzymujemy:

$$f'_y(x, y)$$

lub

$$\frac{df}{dy}.$$

Określając w ten sposób pochodną cząstkową funkcji dwóch zmiennych niezależnych, nadajemy jej to znaczenie, jakie posiadała dla funkcji jednej zmiennej.

Weźmy np.,

$$z = \frac{x^2 + y^2}{x + 1}$$

Pochodną cząstkową względem y będzie.

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2y}{x+1}$$

zaś względem x

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2x(x+1) - (x^2 + y^2) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

Niech teraz

$$z = x e^{xy}$$

Pochodna cząstkowa względem x :

$$\frac{dz}{dx} = e^{xy} + x y e^{xy};$$

a pochodna cząstkowa względem y :

$$\frac{dz}{dy} = x^2 e^{xy}$$

Przypuśćmy teraz, że x i y są funkcjami jednej zmiennej niezależnej t :

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

przytem te funkcje są ciągłe i posiadają pochodne.

Utwórzmy funkcję dwóch zmiennych x i y :

$$z = f(x, y)$$

Znalezienie pochodnej funkcji z sprowadza się do znalezienia pochodnej funkcji złożonej, ale nie za pośrednictwem jednej funkcji, jak zwykle, lecz dwóch.

Znajdźmy więc pochodną $\frac{dz}{dt}$

$$\text{Udowodnimy, że } \frac{dz}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dt}$$

$$\text{czyli: } \frac{dz}{dt} = f'_x(x, y) \cdot \varphi'(t) + f'_y(x, y) \cdot \psi'(t)$$

Oznaczmy różnicę dwóch wartości zmiennej t przez

$$\Delta t = t_2 - t$$

Gdy zmienna niezależna ma wartość t , to, jak wiemy,

$$x = \varphi(t)$$

zaś

$$y = \psi(t);$$

gdy zaś przybierze wartość t_2 , to

$$x_2 = \varphi(t_2)$$

oraz

$$y_2 = \psi(t_2)$$

W pierwszym wypadku $z = f(x, y)$,

a w drugim

$$z_1 = f(x_1, y_1)$$

Wprowadźmy jeszcze oznaczenie następujące:

$$\Delta x = x_1 - x = \varphi(t_1) - \varphi(t)$$

$$\Delta y = y_1 - y = \psi(t_1) - \psi(t)$$

i analogicznie

$$\Delta z = z_1 - z = f(x_1, y_1) - f(x, y).$$

Utwórzmy stosunek przyrostu funkcji z do przyrostu zmiennej niezależnej t :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta t} &= \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y)}{\Delta t} = \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1) + f(x, y_1) - f(x, y)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę na różnicę

$$f(x_1, y_1) - f(x, y_1)$$

W odjemnej i odjemniku zmienna y ma tę samą wartość y_1 ; a zatem różnica ta, przy ustalonej wartości y_1 , jest funkcją tylko jednej zmiennej x . Na zasadzie twierdzenia o wartości pośredniej /dla funkcji jednej zmiennej/:

$$f(x_1, y_1) - f(x, y_1) = (x_1 - x) \cdot f'_x(\xi, y_1)$$

gdzie

$$x \leq \xi \leq x_1.$$

Podobnie różnica

$$f(x, y_2) - f(x, y)$$

jest przy ustalonej wartości x funkcją tylko jednej zmiennej niezależnej y ; na zasadzie tegoż samego twierdzenia można napisać:

$$f(x, y_2) - f(x, y) = (y_2 - y) f'_y(x, \eta)$$

gdzie znowu

$$y \leq \eta \leq y_2$$

A zatem

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{(x_2 - x) \cdot f'_x(\xi, y_2)}{x_2 - x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{(y_2 - y) \cdot f'_y(x, \eta)}{y_2 - y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

albo po skróceniu:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(\xi, y_2) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, \eta) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Teraz można przejść do pochodnej:

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f'_x(\xi, y_2) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f'_y(x, \eta) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t};$$

gdy $\Delta t \rightarrow 0$ to $\Delta x \rightarrow 0$ oraz $\Delta y \rightarrow 0$ Stąd wynika, że

gdy $\Delta t \rightarrow 0$ to $x_2 \rightarrow x$ a $y_2 \rightarrow y$; ponieważ następnie

$$x \leq \xi \leq x_2; \quad y \leq \eta \leq y_2;$$

więc

$$\xi \rightarrow x; \quad \eta \rightarrow y$$

A zatem

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f'_y(x, y) \frac{dy}{dt} \quad \text{c.b.d.d.}$$

Przykład: Niech $z = e^t \cdot \sin^2 t$

Oznaczmy $e^t = x$, $\sin t = y$

w takim razie

$$x = xy^2$$

A więc pochodna

$$\frac{dx}{dt} = y^2 \cdot e^t + 2xy \cdot \cos t = \sin^2 t \cdot e^t + 2e^t \sin t \cos t.$$

To samo znaleźlibyśmy, uważając x nie za funkcję dwóch zmiennych, lecz za iloczyn dwóch funkcji jednej zmiennej:

$$x' = e^t (\sin^2 t)' + \sin^2 t (e^t)' = e^t 2 \sin t \cos t + \sin^2 t \cdot e^t.$$

Uogólnijmy teraz dla funkcji dwóch zmiennych niezależnych twierdzenie o wartości pośredniej. Niech będzie dana funkcja

$$z = f(x, y)$$

i po dwie odpowiadające sobie wartości każdej ze zmiennych niezależnych: x_1 i x_2 oraz y_1 i y_2 ; w takim razie mieć będziemy również dwie wartości funkcji:

$$z_1 = f(x_1, y_1)$$

oraz

$$z_2 = f(x_2, y_2)$$

Różnicą tych wartości funkcji jest

$$z_2 - z_1 = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

albo też

$$z_2 - z_1 = [f(x_2, y_2) - f(x_2, y_1)] + [f(x_2, y_1) - f(x_1, y_1)]$$

Każdy ze składników prawej strony powyższej równości można uważać, jak powyżej, za funkcję tylko jed-

nej zmiennej; można więc zastosować do niego twierdzenie o wartości pośredniej w zwykłej postaci /dla funkcji jednej zmiennej/:

$$z_2 - z_1 = (y_2 - y_1) \cdot f'_y(x_2, \eta) + (x_2 - x_1) \cdot f'_x(\xi, y_1)$$

przyczem

$$x_1 \leq \xi \leq x_2 \\ y_1 \leq \eta \leq y_2.$$

Jeżeli oznaczymy przyrosty zmiennych i funkcji za pomocą symbolu Δ , to będziemy mogli napisać:

$$1/1/ \quad \Delta z = f'_x(\xi, y_1) \cdot \Delta x + f'_y(x_2, \eta) \cdot \Delta y$$

Przypuszczamy, że pochodne cząstkowe są ciągłe;

gdy $y_2 \rightarrow y_1$ oraz $x_2 \rightarrow x_1$, wówczas

$$f'_x(\xi, y_1) \rightarrow f'_x(x_1, y_1); f'_y(x_2, \eta) \rightarrow f'_y(x_1, y_1)$$

A zatem

$$f'_x(\xi, y_1) = f'_x(x_1, y_1) + \varepsilon; f'_y(x_2, \eta) = f'_y(x_1, y_1) + \varepsilon';$$

gdzie ε i ε' są zależne od x i y ; gdy $x_2 \rightarrow x_1$ /albo $\Delta x \rightarrow 0$ / oraz $y_2 \rightarrow y_1$ ($\Delta y \rightarrow 0$), to $\varepsilon \rightarrow 0$ i $\varepsilon' \rightarrow 0$

$$\Delta z = [f'_x(x, y) + \varepsilon] \Delta x + [f'_y(x, y) + \varepsilon'] \Delta y$$

albo też

$$1/2/ \quad \Delta z = [f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y] + [\Delta x \cdot \varepsilon + \Delta y \cdot \varepsilon']$$

To właśnie jest wzór o który chodziło. Zauważmy, że jeżeli Δx i Δy są nieskończenie małymi pierwszego rzędu, to wyrażenie w pierwszym nawiasie, o ile wyjątkowo nie równa się zeru, /t.j. o ile jednocześnie nie jest $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$ / jest nieskoń-

czenie małą pierwszego rzędu /pochodne cząstkowe są to wielkości stałe/, a w drugim nawiasie przynajmniej drugiego rzędu:

$$\frac{\varepsilon \Delta x}{\Delta x} = \varepsilon \neq 0$$

Wyrażenie rzędu pierwszego /wyższego/ we wzorze /2/ nazywamy częścią główną. Zauważmy, że wyrażenie dla Δx jest linjowe /pierwszego stopnia/.

Na zasadzie powyższego wzoru określamy r ó ż - n i c z k i funkcji 2-ch zmiennych; część główną przyrostu funkcji nazywamy różniczką funkcji i oznaczamy ją przez

$$dz = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y$$

Przypuścimy, że /przypadek szczególny/:

$$x = x$$

czyli, że

$$f(x, y) = x;$$

w takim razie

$$dx = \Delta x;$$

podobnie, gdy

$$f(x, y) = y$$

to

$$dy = \Delta y$$

Na zasadzie tego można napisać:

$$13/ \quad dz = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$$

To znakowanie różniczkowe jest bardzo dogodne;

wykazuje ono bowiem związek pomiędzy różnicami napozór dziedzinami. Gdy bowiem podzielimy wzór /3/ przez otrzymany wzór, który udowodniliśmy dla pochodnej funkcji dwóch zmiennych zależnych:

$$1/4 \quad \frac{dz}{dt} = f'_x(x,y) \frac{dx}{dt} + f'_y(x,y) \frac{dy}{dt}$$

A zatem różniczka funkcji dwóch zmiennych x i y wyraża się przez x i y zawsze jednakowo, bez względu na to, czy x i y są niezależne, czy też zależne od siebie. Dlatego wygodnie jest nieraz zastąpić wzór /2/ przez wzór /3/.

POCHODNE FUNKCJI UWIKŁANYCH /jednej zmiennej/.

Gdy pomiędzy dwiema zmiennymi zachodzi zależność

$$f(x,y)=0$$

to y jest naogół funkcją uwikłaną x /lub odwrotnie/. Udowodnimy, że istnieje y jako funkcja x , przyjmująca wartość $y=b$ dla $x=a$, jeżeli są spełnione następujące warunki: 1/ wartości $x=a$ i $y=b$ czynią zadość równaniu

$$f(x,y)=0,$$

czyli

$$f(a,b)=0;$$

2/ funkcja

$$z = f(x,y)$$

jest ciągła w otoczeniu punktu

$M(a,b)$. 3/ gdy x

ma wartość stałą, z jest funkcją rosnącą /lub maleją-