

Przyjawszy to oznaczenie, będziemy mogli wzór napisać w postaci skróconej:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k \right)_{x,y}^{(1)} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot h + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot k \right)_{x,y}^{(2)} + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x^n} \cdot h + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \cdot k \right)_{x,y}^{(n)} + \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}} \cdot h + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}} \cdot k \right)_{x+\theta h, y+\theta k}^{(n+1)}$$

MAXIMUM I MINIMUM funkcji dwóch zmiennych. Niech będzie dana funkcja dwóch zmiennych

$$z = f(x, y)$$

Wiemy już, że jej ilustracją geometryczną będzie powierzchnia. Jeżeli w punkcie $M(a, b)$ funkcja osiąga maximum, to znaczy, iż istnieje takie otoczenie punktu M , że w każdym punkcie $P(x, y)$ tego otoczenia

$$f(a, b) > f(x, y)$$

Gdyby zaś w punkcie M funkcja osiągała minimum to dla każdego punktu pewnego otoczenia musiałaby zachodzić nierówność przeciwna:

$$f(a, b) < f(x, y)$$

Udowodnimy teraz twierdzenie następujące:

Warunkiem koniecznym /lecz nie dostatecznym/, żeby funkcja posiadała w punkcie $M(a, b)$ maximum lub minimum jest, aby obie pochodne cząstkowe w tym punkcie były zerami:

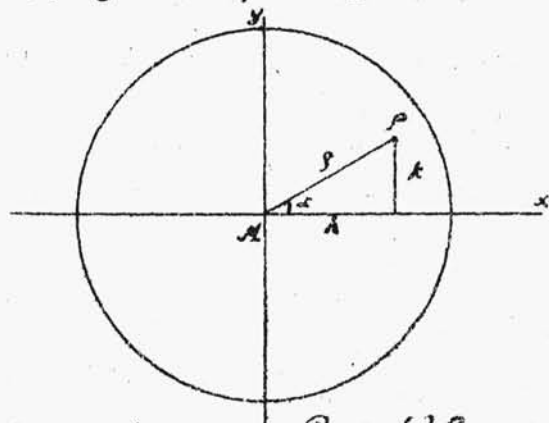
$$f'_x(a, b) = 0; f'_y(a, b) = 0$$

Dowód tego twierdzenia oparty jest na wzorze Taylora. Napiżmy mianowicie ten wzór, przyjmując $n=1$:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \\ + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(a+\theta h, b+\theta k)h^2 + 2f''_{xy}(a+\theta h, b+\theta k)h \cdot k + \\ + f''_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)k^2].$$

Jeżeli funkcja w punkcie M osiąga maximum lub minimum, to różnica funkcji w punkcie $M(a, b)$ i w punkcie $P(a+\theta h, b+\theta k)$ znajdującym się w otoczeniu punktu M musi zachowywać znak stały /t.j. być zawsze dodatnia lub zawsze ujemna/. Z rys. 129 widać, że

$$h = \rho \cos \alpha, \quad k = \rho \sin \alpha.$$



Rys. 129

$$\text{Stąd } f(a+h, b+k) - f(a, b) = \\ = \rho [f'_x(a, b) \cos \alpha + f'_y(a, b) \sin \alpha] + \\ + \frac{\rho^2}{2!} [f''_{xx}(a+\theta h, b+\theta k) \cos^2 \alpha + \\ + f''_{yy}(a+\theta h, b+\theta k) \sin^2 \alpha],$$

albo też w skróceniu:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \\ = \rho A_1 + \rho^2 A_2 = \rho (A_1 + \rho A_2)$$

Przypuśćmy, że dla jakiejś wartości α_1 kąt α

$$A_1 = f'_x(a, b) \cos \alpha + f'_y(a, b) \sin \alpha$$

nie jest równe zero. Oznaczmy wartość bezwzględną wyrażenia A_1 , dla tej wartości przez m .

Można dobrać taką liczbę l , iżby w pewnym określonym otoczeniu punktu $M(a, b)$ był spełniony warunek

$$|A_2| < l$$

Weźmy $\rho < \frac{m}{l}$ i jednocześnie dość małe, by punkt oddalony o ρ od $M(a, b)$ leżał we wzmiarkowanym otoczeniu.

Gdy powyższa nierówność będzie spełniona, znak różnicy $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ będzie zależał jedynie od znaku A_2 (gdyż $|PA_2| < \frac{m}{l} \cdot l = m$).

Otóż wystarczy nadać kątowi α wartość $\pi - \alpha_2$ aby A_2 zmieniło znak; wraz z A_2 musi zmienić w takim razie znak cała omawiana różnica i nie może być mowy o maximum ani o minimum. Należy tedy wnioskować, że o ile funkcja osiąga maximum lub minimum w punkcie $M(a, b)$ - nie istnieje żadna wartość kąta α , dla której A_2 nie byłoby równe zero; to zaś wymaga koniecznie, iżbyśmy mieli jednocześnie

$$f'_x(a, b) = 0; f'_y(a, b) = 0$$

Istotnie, gdyby np. $f'_x(a, b) \neq 0$ to dla $\alpha = 0^\circ$ mielibyśmy

$$A = f'_x(a, b) \cos 0^\circ + f'_y(a, b) \sin 0^\circ = f'_x(a, b) \neq 0.$$

Ostateczne warunki niezbędne istnienia maximum lub minimum w punkcie $M(a, b)$ są następujące:

$$f'_x(a, b) = 0; f'_y(a, b) = 0.$$

Przypuśćmy więc, że funkcja w punkcie M czyni
maksimum powyższemu warunkom. Napişmy wzór Taylora, za-
kładając, że $n=2$:

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = \frac{\rho^2}{2!} [f''_{xx}(a, b) \cos^2 \alpha + 2f''_{xy}(a, b) \sin \alpha \cos \alpha + f''_{yy}(a, b) \sin^2 \alpha] + \frac{\rho^3}{3!} [f'''_{x^2x}(a + \theta \cos \alpha, b + \theta \sin \alpha) \cos^3 \alpha + \dots + f'''_{y^2x}(a + \theta \cos \alpha, b + \theta \sin \alpha) \sin^3 \alpha] = \rho^2 (A_2 + \rho B)$$

Gdy ρ będzie dostatecznie małe, to znak różnicy
dwuś wartości funkcji będzie zależał jedynie od zna-
ku A_2 , czyli od znaku trójmianu

$$f'''_{xx}(a, b) \cos^3 \alpha + 2f'''_{xy}(a, b) \sin \alpha \cos^2 \alpha + f'''_{yy}(a, b) \sin^3 \alpha.$$

Aby funkcja osiągała w punkcie $M(a, b)$ maximum
lub minimum, to różnica funkcji, a więc A_2 , czyli
powyższy trójmian musi być dla wszystkich wartości ką-
ta α dodatni lub ujemny. Wiemy zaś z teorii równań
kwadratowych, że trójmian

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = y^2 [a(\frac{x}{y})^2 + 2b(\frac{x}{y}) + c],$$

gdy $b^2 < ac$ zmienia swój znak /dla niektórych wartości
zmiennych jest dodatni, dla innych ujemny/; gdy $b^2 = ac$
to trójmian nie zmienia swego znaku, przy pewnej jed-
nak wartości stosunku $\frac{x}{y}$ otrzymuje wartość zero; gdy
zaś $b^2 > ac$, trójmian nie zmienia swego znaku i nig-
dy nie staje się równym zero /oczywiście, gdy bierze-

my pod uwagę tylko rzeczywiste wartości zmiennych/. A zatem w pierwszym przypadku trójmian nie może mieć ani maximum ani minimum, w drugim trójmian może mieć maximum lub minimum; w trzecim zaś wypadku musi posiadać albo minimum albo maximum; gdy a i c są ujemne, jest maximum, gdy zaś dodatnie - minimum. Pochodne $f'_x(M)$ i $f'_y(M)$ muszą posiadać zawsze ten sam znak, ponieważ ich iloczyn, jako większy od $[f'_{xy}(M)]^2$ musi być dodatni. A więc warunkiem osiągnięcia maximum jest:

$$[f'_{xy}(M)]^2 < f''_{xx}(M) f''_{yy}(M)$$

przyczem

$$f''_{xx}(M) < 0, f''_{yy}(M) < 0;$$

a warunkiem minimum również

$$[f'_{xy}(M)]^2 < f''_{xx}(M) f''_{yy}(M)$$

gdzie jednak

$$f''_{xx}(M) > 0, f''_{yy}(M) > 0$$

Jeżeli jest

$$[f'_{xy}(M)]^2 > f''_{xx}(M) f''_{yy}(M)$$

to funkcja nie może posiadać w punkcie M ani maximum ani minimum.

Niech będzie dane powierze z a:

$$z = f(x, y)$$

Przez punkt $M(x, y, z)$ tej powierzchni poprowadź-

my płaszczyznę styczną. Jej równaniem będzie

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0$$

gdzie A, B i C są proporcjonalne do dostaw kątów kierunkowych normalnej do powierzchni w punkcie

M : $\cos \alpha$, $\cos \beta$ i $\cos \gamma$. Na zasadzie udowodnionego poprzednio wzoru można napisać, że:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

albo też

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy - dz = 0$$

Dwa kierunki są do siebie prostopadłe, jeżeli dostawy kątów kierunkowych pierwszego kierunku są proporcjonalne do

$$dx, dy, dz$$

zaś drugiego do

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1$$

Istotnie, niech dostawy kątów kierunkowych / α , β , γ / oraz / α' , β' , γ' / czynią zadość powyższym warunkom, wówczas

$$\cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma' = 0$$

Jest to istotnie znany warunek prostopadłości.

Stąd wynika, że $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1$ są proporcjo-

nalne do dostaw takiego kierunku, który jest prostopadły do wszelkiego kierunku o współczynnikach dx , dy , dz , t.j. do kierunku wszelkiej prostej, położonej w płaszczyźnie stycznej;

Inaczej: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, -1 są proporcjonalne do dostaw normalnej.

Zatem równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni będziemy mogli napisać w postaci:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) = Z-z$$

Przypuśćmy, że punkt M posiada tę własność, że

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

/stanowi maximum, lub minimum/. Wówczas równanie płaszczyzny stycznej będzie:

$$Z = z$$

czyli

$$Z = \text{const.}$$

Płaszczyzna ta będzie więc równoległa do płaszczyzny XOY /prostopadła do osi Z /. Było zresztą do przewidzenia, że w punkcie najwyższym lub najniższym płaszczyzna styczna będzie równoległa do płaszczyzny XOY .

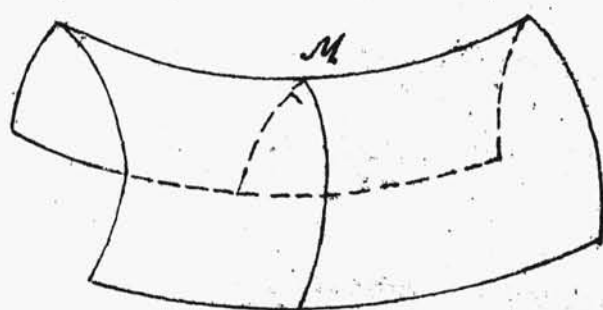
Jednakże równoległość płaszczyzny stycznej w punkcie M do płaszczyzny xoy , równoważna z warunkami

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

niezawsze pociąga za sobą maximum lub minimum funkcji w tym punkcie; należy jeszcze wziąć pod uwagę wartości

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Albowiem istnieją takie powierzchnie, że dla pewnych krzywych, leżących na tych powierzchniach, punkt M stanowi maximum, dla innych zaś minimum, a więc



funkcja nie osiąga w tym punkcie ani maximum ani minimum.

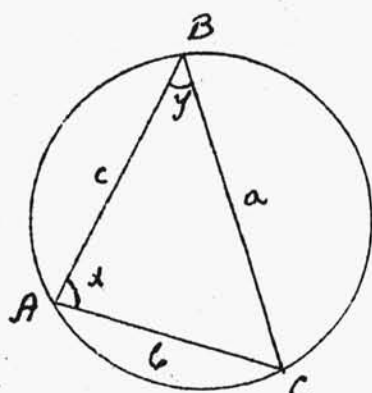
Przerobimy teraz kilka przykładów znajdowania

Rys. 130

maximum i minimum funkcji dwóch zmiennych.

Przykład I. Jaki z pośród trójkątów wpisanych w koło ma obwód największy?

Uważajmy na zmiennej niezależne dwa kąty trójkąta x i y . Oznaczmy boki trójkąta przez a , b i c ,



Rys. 131.

zaś promień koła przez R .

$$\frac{a}{\sin x} = \frac{b}{\sin y} = \frac{c}{\sin(x+y)} = 2R$$

Stąd

$$a = 2R \sin x; \quad b = 2R \sin y;$$

$$c = 2R \sin(x+y).$$

A zatem obwód trójkąta

$$2p = 2R[\sin x + \sin y + \sin(x+y)].$$

Oznaczmy

$$\sin x + \sin y + \sin(x+y) = z$$

W takim razie

$$2p = 2Rz$$

Ponieważ R jest stała, więc obwód będzie największy wtedy, gdy z będzie maximum. Utwórzmy zatem pochodne cząstkowe i przyrównajmy je do zera:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x + \cos(x+y) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y + \cos(x+y) = 0$$

Stąd zaś

$$\cos x = \cos y = -\cos(x+y)$$

A zatem

$$x = y$$

(Wartości $x = y + 2\pi n$, gdy $n \neq 0$ odrzuca-
my jako niemożliwe)

Ponieważ również $\cos x = -\cos 2x$,

czyli

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

albo też

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

a więc

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}; \quad \cos = \frac{1}{2}$$

skąd

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad y = \frac{\pi}{3}.$$

A zatem żądanym trójkątem jest trójkąt równoboczny. Ażeby się przekonać, czy ten trójkąt ma naprawdę obwód największy, należy utworzyć pochodne cząstkowe rzędu drugiego.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x - \sin(x+y) = -\sqrt{3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\sin(x+y) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ponieważ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x - \sin(x+y) = -\sqrt{3},$

oraz

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 < \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$$

więc mamy istotnie maximum.

P r z y k ł a d 2. Z pośród prostopadłościanów o danej objętości znaleźć prostopadłościan o najmniejszej powierzchni.

Niech daną objętością będzie a^3 . Oznaczmy wymiary szukanego prostopadłościanu przez x, y i z , zaś jego powierzchnię przez u .

$$x \cdot y \cdot z = a^3$$

$$xy + yz + xz = u$$

Z pierwszego równania mamy:

$$z = \frac{a^3}{x \cdot y}$$

A zatem

$$u = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$$

Gdy u ma być minimum, to musi być

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - \frac{a^3}{x^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{a^3}{y^2} = 0$$

Stąd

$$x^2 y = a^3$$

$$x y^2 = a^3$$

Mnożąc otrzymane równania stronami, znajdziemy:

$$x^3 y^3 = a^6$$

skąd

$$xy = a^2$$

A zatem

$$x = a;$$

$$y = a;$$

$$z = a.$$

Szukiem prostopadłością jest więc sześciąt.

Dla sprawdzenia, czy mamy istotnie minimum powierzchni utworzmy drugie pochodne cząstkowe:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=a} = \left(\frac{2a^3}{x^3} \right)_{x=a} = 2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=a} = \left(\frac{2a^3}{y^3} \right)_{y=a} = 2$$

Ponieważ

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 < \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

zaś

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$$

więc mamy minimum.

ROWNANIA PARAMETRYCZNE KRZYWYCH. Dwa równania:

$$\begin{aligned}x &= f(t) \\ y &= g(t)\end{aligned}$$

wyznaczają w zupełności pewną krzywą. Wspólną zmienną niezależną t , zwaną parametrem, można z obu równań wyrugować, przez co otrzymamy jedno równanie z dwiema niewiadomymi, wyznaczające, jak wiemy, krzywą. Np.

$$x = r \cos t; \quad y = r \sin t$$

są to równania parametryczne koła; gdy bowiem podnieśliemy oba równania do kwadratu i dodamy stronami, to otrzymamy zwykłe równanie koła:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Podobnie równania parametryczne:

$$x = a \cos t; \quad y = b \sin t$$

wyznaczają elipsę, gdyż z równań tych wynika, że

$$\frac{x}{a} = \cos t; \quad \frac{y}{b} = \sin t$$

skąd

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Niech będzie dana krzywa, wyznaczona przez równania parametryczne