

gdzie

$$\begin{aligned} t_i &= f(x_i); \quad t_{i-1} = f(x_{i-1}); \quad t_0 = a; \quad t_n = b \\ x_0 &= d; \quad x_n = c; \\ x_{i-1} &\leq \xi_i \leq x_i \end{aligned}$$

$$t_i - t_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f'(\xi_i);$$

a więc

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot [f'(\xi_i)] \cdot f(\xi_i) \\ &= \int_d^c [f'(x)] \cdot f(x) dx. \end{aligned}$$

LICZBY ZESPOLONE.

Wykonywując działania algebraiczne nad liczbami wymiernymi i mierząc zapomocą óbranej jednostki długość odcinków, przekonaliśmy się, że obszar liczb wymiernych jest zbyt wąski, aby w jego zakresie oba wyżej wymienione zagadnienia zawsze były wykonalne. Z tego właśnie powodu musieliśmy obszar liczb wymiernych rozszerzyć, wprowadzając liczby niewymierne; przez połączenie liczb wymiernych z niewymiernymi otrzymaliśmy

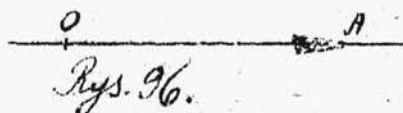
my obszar t.zw. liczb rzeczywistych. Jednakże i ten rozszerzony obszar liczb jest jeszcze niewystarczający; jeszcze niewszystkie działania są w zakresie liczb rzeczywistych, naogół biorąc wykonalne. Wiemy bowiem dobrze, że gdy np. $a > 0$, to symbol $\sqrt{-a}$ nie posiada żadnego znaczenia, ani też niema rozwiązań równanie

$$x^2 + 2 = 0$$

. Ukazuje się więc konieczność rozszerzenia zakresu liczb rzeczywistych do tego stopnia, aby wszystkie działania algebraiczne były w zakresie tych nowych liczb w każdym wypadku możliwe do wykonania. Ponieważ nadto nowy obszar ma być rozszerzeniem zakresu liczb rzeczywistych, czyli liczby rzeczywiste mają być częścią tego rozszerzonego zakresu liczb, przeto prawa formalne, dotyczące działań nad liczbami, powinny być zachowane.

Na innej drodze, zupełnie odrębnej od tej, którą wyżej postępowaliśmy, również dochodzimy do wnios-

ku, że bardzo pożądanym jest rozszerzenie zakresu liczb rzeczywistych.

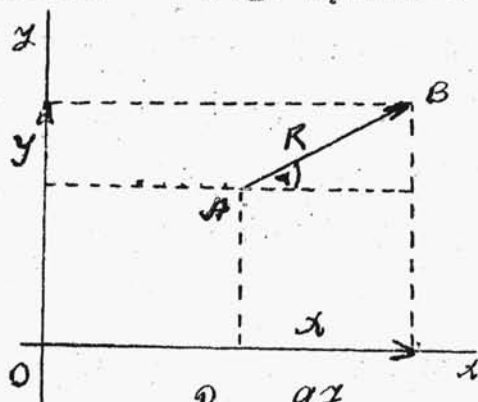


Obierzmy na linii prostej /osi/ dowolny odcinek OA ; możemy również uważać ten odcinek za przesunięcie punktu wzdłuż prostej. Przyjmijmy kierunek od O do A za dodatni. Odcin-

OA będzie wektorem; punkt O nazwiemy jego początkiem, punkt A końcem. Pomiędzy wektorami na osi, a zbiorem liczb rzeczywistych zachodzi odpowiedniość doskonała. Gdybyśmy jednak rozpatrywali wektory nie na jednej osi, lecz na płaszczyźnie /przesunięcie na płaszczyźnie/, to okazałoby się, że na to, aby każdemu wektorowi podporządkować liczbę, trzeba zbiór liczb rzeczywistych rozszerzyć.

Wybermy zatem prostokątny układ współrzędnych.

Wektor \vec{AB} będzie w zupełności określony przez



Rys. 97.

swoje rzuty na osi x i

y ; o ile rzutom tym będziemy przypisywali odpowiednie kierunki. Rzuty te będą wektorami, leżącymi na osiach i jako takie, dadzą się wyrazić za pomocą

liczb rzeczywistych. Oznaczmy te dwa rzuty /wektory/ przez x i y . Mając te rzuty możemy znaleźć wektor dany \vec{AB} . Pod względem długości /moduł/

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Łatwo jest znaleźć kąt, jaki tworzy wektor z osią x /amplituda/, mianowicie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \quad \cos \alpha = \frac{x}{R}; \quad \sin \alpha = \frac{y}{R}$$

Nawzajem, gdy są znane R i α , można znaleźć rzuty x i y :

$$x = R \cos \alpha; y = R \sin \alpha$$

Tak więc wektor \vec{AB} jest w zupełności określony przez dwie liczby rzeczywiste: parę rzutów x i y lub też moduł R i amplitudę α . W pierwszym wypadku x i y są liczbami dowolnymi, w drugim zaś wystarczy przyjąć, iż

$$R > 0 \\ 0 \leq \alpha < 2\pi$$

Możemy powiedzieć, że pomiędzy parą liczb (x, y) i wektorem R zachodzi odpowiedniość doskonała: możemy wektor określać zapomocą tej właśnie pary liczb (x, y) i parę liczb przedstawiać geometrycznie zapomocą wektora.

R ó w n o ś ć w e k t o r ó w . /par liczbowych/

Dwa wektory (x, y) i (x', y') , nazywać będziemy równymi, gdy

$$x = x' \\ y = y'$$

Nad wektorami /parami liczbowymi/ wykonywać można wszystkie działania algebraiczne.

D o d a w a n i e w e k t o r ó w . Aby dodać dwa wektory, leżące na jednej osi, np. \vec{OA} i \vec{AB}

/rys.98/, przesuwamy wektor \vec{AB} wzdłuż osi tak, aby jego początek upadł na koniec wektora \vec{OA} . Wektor \vec{OB} będzie sumą wektorów \vec{OA} i \vec{AB} .

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$



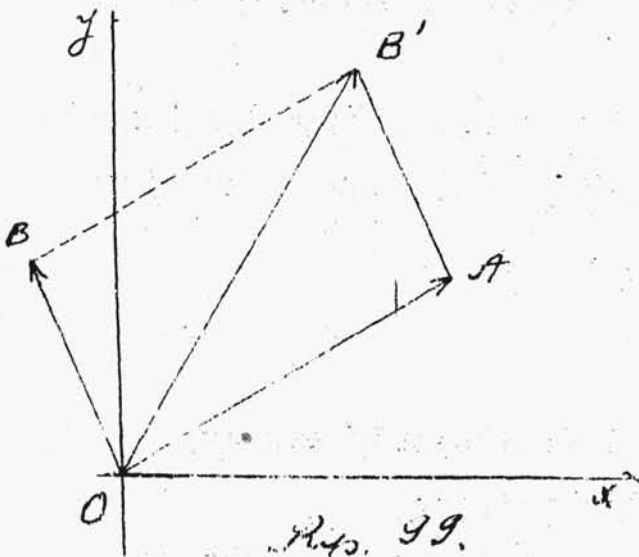
Rys. 98.

W ten sam sposób znajdujemy sumę większej liczby wektorów, leżących na tej samej osi.

Gdy mamy dodać dwa wektory, leżące na jednej płaszczyźnie, np. \vec{OA} i \vec{OB} /rys.99/, postępujemy podobnie jak poprzednio. Przenosimy drugi wektor równolegle tak, aby jego początek upadł w końcu wektora pierwszego. Wektor, łączący początek pierwszego wektora z

końcem drugiego, będzie sumą wektorów danych.

Możemy znaleźć sumę jeszcze innym sposobem. Przenosimy, mianowicie, wektory równolegle tak, aby ich początki przystały do punktu O' ; następnie budujemy na



Rys. 99.

tych wektorach równoległobok. Przekątna łącząca punkt O z przeciwległym wierzchołkiem równoległoboku będzie sumą wektorów danych. Oczywiście, zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku otrzymamy ten sam wynik.

Z rysunku 99 widoczne jest, że dodawanie wektorów podlega prawu przemienności.

Określenie sumy dwóch wektorów możemy rozszerzyć na większą liczbę składników: przenosimy wektory równoległe w ten sposób, aby początek następnego znajdował się w końcu poprzedniego: wektor, łączący początek pierwszego wektora z końcem ostatniego, będzie sumą wektorów danych.

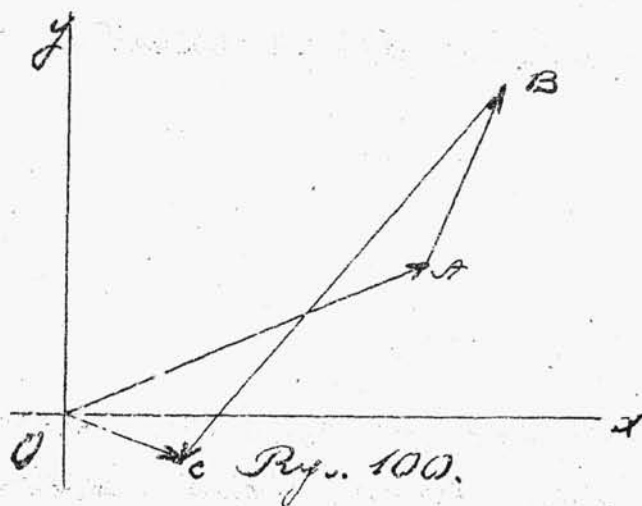
Na rys. 100

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC}$$

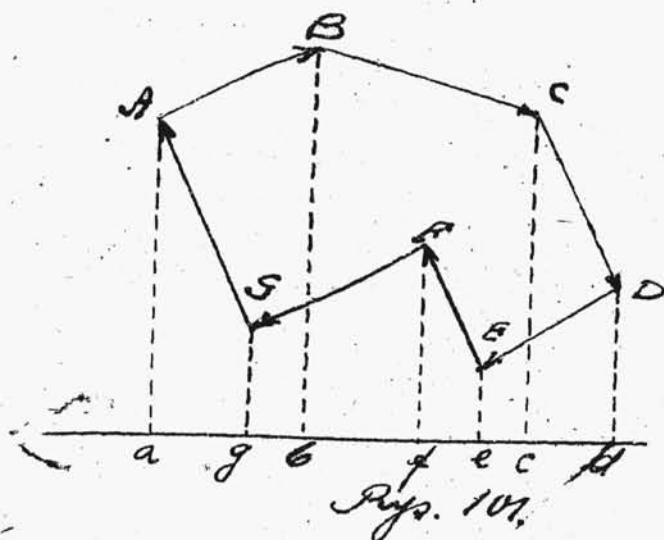
U w a g a .

W wypadku szczególnym gdy wektory składowe tworzą linię zamkniętą /o jed-

nym kierunkiem/, ich suma jest równa zeru. Również suma rzutów takiej linii zamkniętej na każdą prostą jest równa zeru, gdyż suma rzutów dodatnich zawsze będzie się



równać sumie rzutów ujemnych /rys. 101/.



Określenie dodawania dwóch wektorów możemy wyrazić zapomocą par liczbowych. Niech będzie:

W takim razie

Należy zwrócić uwagę na to, że znak w lewej stronie powyżej napisanej równości ma znaczenie umówione: równie dobrze moglibyśmy użyć tu zamiast niego jakiegoś innego znaku.

Zauważmy, że

A więc

zatem dodawanie par liczbowych podlega prawu przemienności, co zresztą już udowodniliśmy, mówiąc o wektorach.

Dodawanie par liczbowych naprowadza nas na myśl uważania pary liczb za liczbę nowego typu, dającą się

określić przy pomocy dwóch liczb rzeczywistych.

Gdy jedna z liczb pary /mia-
nowicie druga/ jest równa
para sprowadza się do jednej
liczby rzeczywistej /gdy rzut wek-
tora na jedną oś równy jest, to wektor leży na drugiej
osi/. Dodawanie takich par jest równoważne z dodawaniem
liczb rzeczywistych:

$$(x+x', 0+0)$$

Dwie pary liczbowe, których suma równa się 0
nazywamy przeciwnymi:

$$(x, y) + (x', y') = 0$$

Wówczas, oczywiście

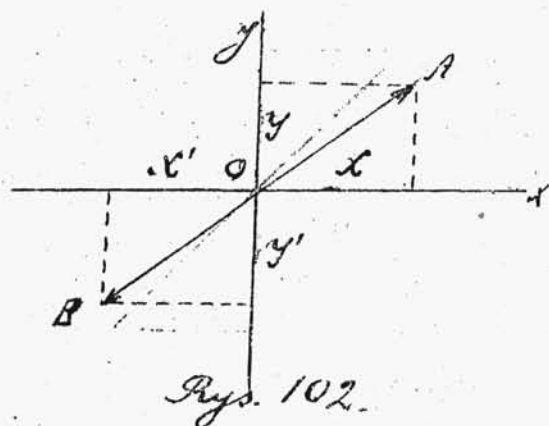
$$x+x' = 0$$

$$y+y' = 0,$$

skąd

$$x = -x'$$

$$y = -y'$$



W interpretacji geome-
trycznej takim parom
odpowiadają wektory ró-
wne co do długości,
lecz przeciwne co do
kierunku.

Będziemy teraz mogli określić odejmowanie par liczbowych w sposób następujący:

$$(x, y) - (x', y') = (x, y) + (-x', -y') = (x - x', y - y').$$

Z kolei rzeczy należy dać określenie mnożenia par liczbowych. Określenie to powinno być ułożone przedewszystkiem w ten sposób, aby iloczyn dwóch par liczbowych był również parą liczbową:

$$(x, y) \cdot (x', y') = (A, B)$$

Ponadto iloczyn takich par liczbowych, które się sprowadzają do liczb rzeczywistych, powinien też być liczbą rzeczywistą, t.zn.:

$$(x, 0) \cdot (x', 0) = (x \cdot x', 0)$$

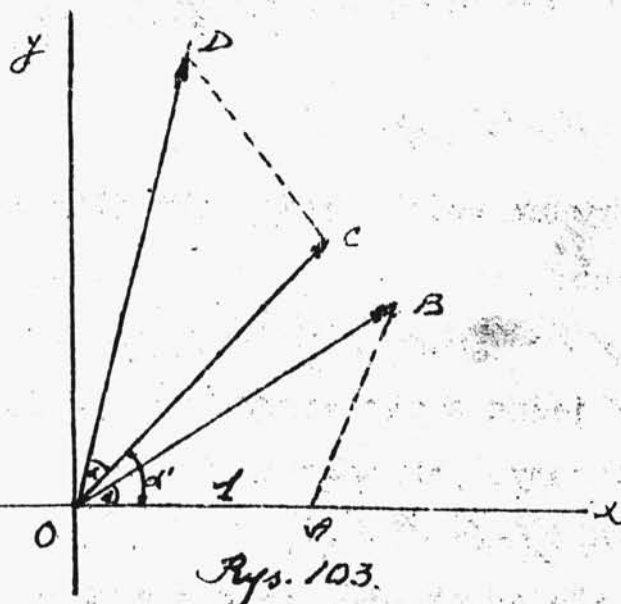
Prócz tego jest rzeczą bardzo pożądaną, aby było

$$k(x, y) = (kx, ky)$$

czyli:

$$(k, 0) \cdot (x, y) = (kx, ky)$$

Określenie mnożenia nasuwa nam rozważanie geometryczne. Niech będą dane dwa wektory \vec{OB} i \vec{OC} . Odłóżmy na osi x odcinek $OA=1$: łącząc punkty A i B otrzymamy trójkąt OAB . Zbudujmy następnie trójkąt OCD , podobny do OAB , w ten sposób, aby bokowi OA odpowiadał bok OC , a b-



rót wszystkich boków dokoła punktu O miał ten sam kierunek, przy przejściu od $\triangle OAB$ do $\triangle OCD$.

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA}$$

Stąd

$$OD = OC \cdot OB$$

Łatwo sprawdzić, że jeżeli będziemy uważali odcinek OD za wektor, to czynić on będzie zadość wszystkim wyżej postawionym warunkom.

Wyrazmy wektor \vec{OB} zapomocą liczby R /mierzącej odcinek OB / i α /mierzącej $\angle AOB$ /: podobnie \vec{OC} zapomocą R' i α' . W takim razie wektor \vec{OD} da się całkowicie określić przez moduł $R \cdot R'$ i amplitudę $\alpha + \alpha'$. Istotnie, oznaczmy rzuty wektora \vec{OD} na osi x i y odpowiednio przez A i B . Wówczas:

$$A = R \cdot R' \cos(\alpha + \alpha') = R \cos \alpha \cdot R' \cos \alpha' - R \sin \alpha \cdot R' \sin \alpha',$$

czyli

$$A = x \cdot x' - y \cdot y'$$

Podobnie obliczymy, że

$$B = R \cdot R' \sin(\alpha + \alpha') = R \sin \alpha \cdot R' \sin \alpha' + R \cos \alpha \cdot R' \cos \alpha'$$

skąd

$$B = I \cdot X' + X \cdot Y'$$

Ostatecznie otrzymamy wzór, będący określeniem mnożenia par liczbowych:

$$(X, Y) \cdot (X', Y') = (X \cdot X' - Y \cdot Y', X \cdot Y' + Y \cdot X')$$

Zauważmy, że gdy jedna z par sprowadza się do liczby rzeczywistej, to mamy, jak tego chcieliśmy,

$$(k, 0) \cdot (X, Y) = (k \cdot X, k \cdot Y).$$

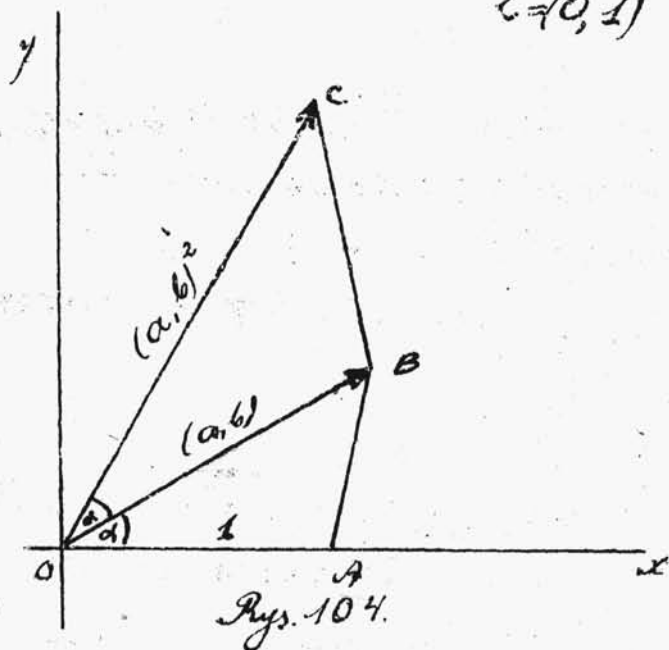
Podobnie możemy się przekonać, że dla mnożenia, w ten sposób określonego, słuszne jest prawo łączności, przemienności i t.d.

Niech będzie dana para liczbowa (a, b) . Z określenia mnożenia wynika, że /rys. 104/:

$$(a, b)^2 = (a^2 - b^2, 2ab)$$

Istnieć musi taka para liczbowa, której kwadrat jest równy -1 . Jest to widoczne z interpretacji geometrycznej. Odłóżmy na obu osiach w dwu różnych kierunkach 4 wektory: \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OD} , o długości 1. Z rysunku 105 łatwo wywnioskować, że \vec{OB} jest kwadratem wektora \vec{OC} . Możemy wektor \vec{OC} napisać jako parę liczbową $(0, 1)$, którą oznacza się symbolicznie przez i .

$$i = (0, 1)$$



Można sprawdzić
bezpośrednio, że

$$(0, 1)^2 = (-1, 0)$$

czyli

$$i^2 = -1$$

Tak więc na o-
siach x i y
mamy cztery we-
ktory jednost-
kowe, których

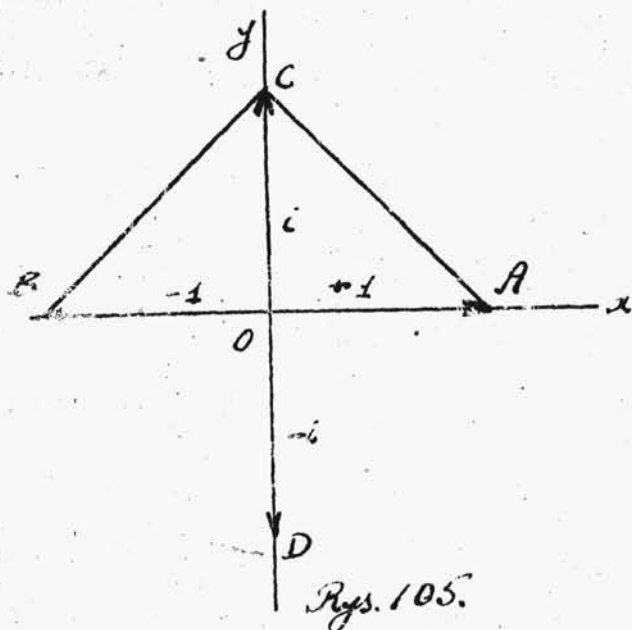
odpowiadają pary
liczbowe:

$$(1, 0) = 1; (-1, 0) = -1$$

$$(0, 1) = i; (0, -1) = -i$$

Niech będzie dana
para liczbowa (a, b) .

Można ją wyrazić
w postaci iloczy-
na liczby rzeczy-
wistej przez i



Rys. 105.

$$(a, b) = (b, 0) \cdot (0, 1)$$

$$(a, b) = b \cdot i$$

czyli

Reguła ta daje się uogólnić na jakąkolwiek parę liczbową: można ją przedstawić jako sumę liczby rzeczywistej i iloczynu liczby rzeczywistej przez i :

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b),$$

skąd

$$(a, b) = a + bi.$$

Suma $a + bi$ nosi nazwę liczby zespolonej. Wszystkie działania nad parami liczbowymi można zastąpić przez działania nad liczbami zespolonymi. Z określenia:

$$i = (0, 1)$$

wynika, że

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = (0, 1)^2 (0, 1) = -1 \cdot i = -i$$

W ten sam sposób znajdziemy, że

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$\dots$$

Wogóle, każdą potęgę pary liczbowej $(0, 1) = i$ można zastąpić bądź liczbami rzeczywistymi $+1$ i -1 , bądź też samą parą $(0, 1)$ lub parą jej przeciwną $(0, -1)$.

Niech będą dane dwie liczby zespolone, które możemy napisać w postaci $a + bi$ oraz $c + di$, wyrażające pary liczbowe (a, b) i (c, d) . Równość tych