

zajających się asymptotycznie do prostych równoległych do osi  $y$  i leżących od niej w odległości  $\frac{(2k+1)\pi}{2}$  ( $k=0, \pm 1$ ).

**§ 2.** Krzywa przecina oś  $x$  w punktach, mających odcięte  $k\pi$ , gdzie  $k=0, 1, 2, \dots$  oraz  $k=-1, -2, -3, \dots$ . Tak więc, pomiędzy dwiema równoległymi, położonymi w odległości  $\frac{\pi}{2}$  od siebie, krzywa rośnie od 0 do  $+\infty$  albo też od  $-\infty$  do 0. Dla wartości odciętych  $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2$  są przerwy w ciągłości funkcji. Jednakże i ta funkcja jest okresową. Przy przesunięciu o  $\pi$  w kierunku osi  $x$  każda poprzednia gałąź krzywej przystanie do następnej.

Funkcje odwrotne względem trygonometrycznych, czyli funkcje kołowe. Niech będzie dana funkcja

$$y = \arctg x$$

Jak wiadomo, można tę samą zależność napisać w postaci

$$\operatorname{tg} y = x$$

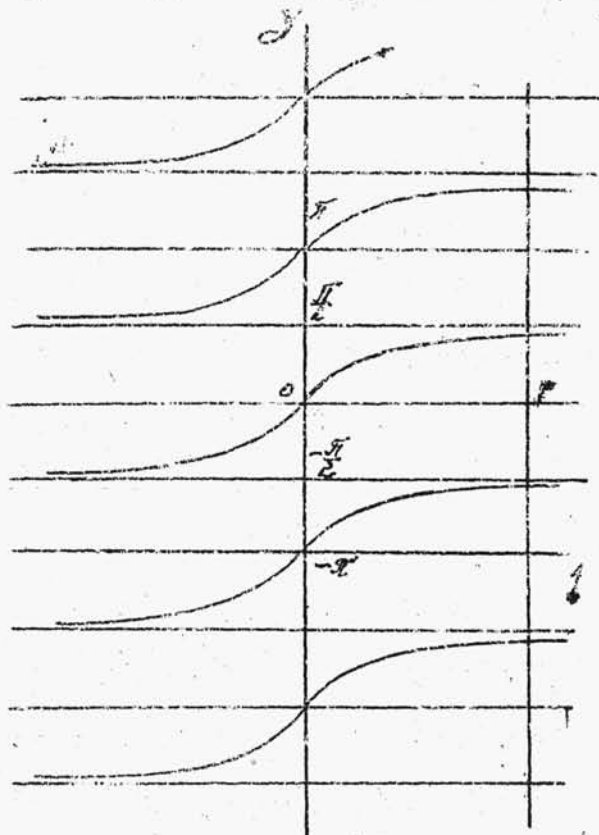
Aby otrzymać wykres, podstawiamy  $x = y'$  i  $y = x'$  i budujemy krzywą  $y' = \operatorname{tg} x'$  (rys. 23). Zastępując wreszcie oś  $x'$  przez oś  $y$  i oś  $y'$  przez  $x$ , otrzymamy wykres żądany. Na tym wykresie uwidacznia się wielowartościowość funkcji. Chcąc znaleźć rzędną danego punktu, mając jego odciętą, prowadzimy przez punkt dany równoległą do osi  $y$ . Z rysunku widać, że ta prosta może być przecięta przez krzywą w wielu punktach. Wszystkie



wartości  $y$ , odpowiadające danej wartości  $x$ , tworzą postęp arytmetyczny o różnicy  $\pi$ . Mając jedną wartość rzędnej  $Y$ , możemy znaleźć pozostałe z wzoru:

$$y = Y + n\pi$$

gdzie  $n$  może przybierać wszystkie wartości całkowite.



Rys. 24.

Zawsze słuszną jest nierówność

$$-\frac{\pi}{2} < \text{Arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

Zależność pomiędzy  $x$  i  $\text{Arctg} x$  uwidocznia następująca tabliczka:

Przy badaniu krzywej można się ograniczyć

do rozpatrywania tylko jednej gałęzi, np. tej która przechodzi przez punkt 0. W tym wypadku

międzyczeka będziemy do czynienia z funkcją jednowartościową. Dla odróżnienia jej od poprzedniej funkcji wielowartościowej  $y = \text{arctg} x$  oznaczmy ją przez

$$y = \text{Arctg} x$$



$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & \rightarrow 0 & \rightarrow +\infty \\ \hline \text{Arctg} x & -\frac{\pi}{2} & \rightarrow 0 & \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Podobnie rozpatrywać możemy inną gałąź krzywej, korzystając ze wzoru:

$$\arctg x = \text{Arctg} x + n \cdot \pi$$

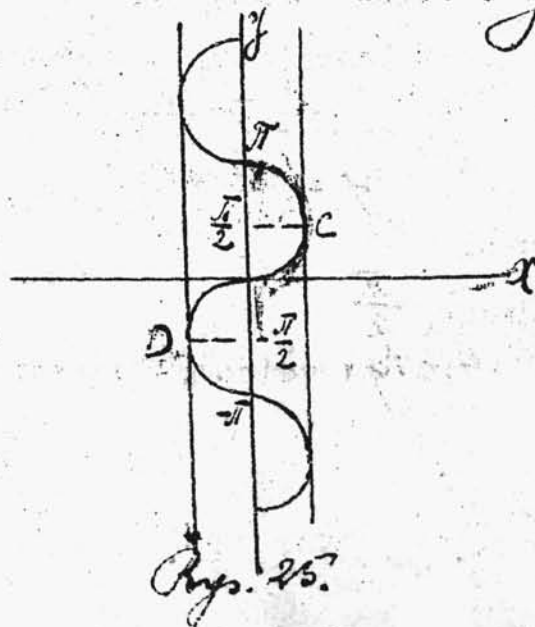
Niech będzie dana do wykreślenia funkcja

$$y = \arcsin x$$

Postępujemy jak w zagadnieniu poprzednim: wykreślimy sinusoidę i zastąpimy oś odciętych przez oś rzędnych i odwrotnie /rys. 25/. W tym wypadku  $x$  nie może przybierać wszelkich wartości, musi zachodzić nierówność

$$-1 \leq x \leq 1$$

Każdej wartości  $x$  w tych granicach odpowiada nieskończenie wiele wartości  $y$ . Tworzą one dwa postępy



arytmetyczne, każdy o wykładniku  $2\pi$ . Przy przesuwanie krzywej o  $2\pi$  wzdłuż osi  $y$  odpowiednie punkty zajądą się ze sobą. Możemy wyodrębnić część krzywej, np. COD i rozpatrywać ją jako funkcję jednowartościową

$$y = \text{Arcsin} x$$



przyczem

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arcsin} x \leq \frac{\pi}{2}$$

Dodając do niej  $2n\pi$  lub odejmując od  $(2n+1)\pi$  otrzymać możemy każdą wartość funkcji pierwotnej. Ogólnie tedy  $\arcsin x$  da się wyrazić za pomocą dwu wzorów, odpowiadających dwu szeregom wartości:

$$1A/ \arcsin x = \operatorname{Arcsin} x + 2\pi n$$

$$1B/ \arcsin x = (2n+1)\pi - \operatorname{Arcsin} x$$

a które można zastąpić jednym:

$$\arcsin x = m\pi + (-1)^m \operatorname{Arcsin} x$$

Przy  $m$  parzystym wzór ten przybiera kształt 1A/.  
Przy  $m$  nieparzystym - kształt 1B/.

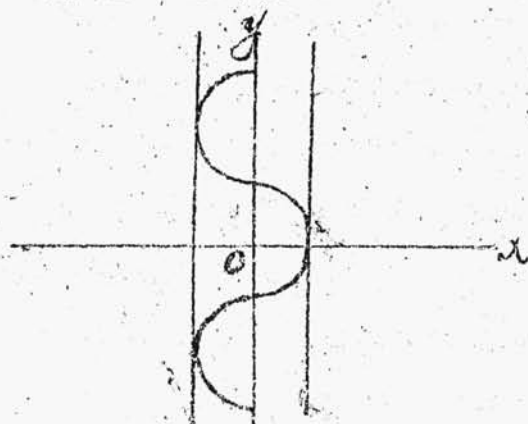
Analogiczne badanie da się zastosować do funkcji:

$$y = \arccos x$$

Wykreślmy  $x$  jako cos  $y$ . Rzecz jasna, że i tutaj  $y$  jest określone tylko przy

$$-1 \leq x \leq 1$$

i ma nieskończenie wiele wartości, odpowiadających tym



Rys. 26.

wartościom  $x$ . Jedną z tych wartości jest

$$0 \leq \operatorname{Arccos} x \leq \pi.$$

Inne wartości znaleźć możemy ze wzoru

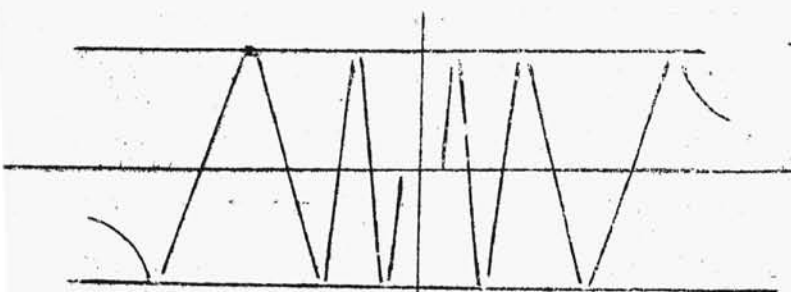
$$\arccos x = \pm \operatorname{Arccos} x + 2\pi n$$



PRZYKŁADY: 1/ Niech będzie teraz dana funkcja

$$y = \sin \frac{1}{x}$$

Łatwo ją wykreślić, mając sinusoidę. Należy tylko dla tych samych wartości  $y$  odkładać odwrotności odpowiednich wartości  $x$ . Krzywa, podobnie jak sinusoida, zawiera się



Rys. 27.

całkowicie pomiędzy dwiema prostymi, przeciętymi równoległo do osi  $x$  w odległości 1 i -1.

Jeżeli

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{\frac{5\pi}{2}}, \frac{1}{\frac{9\pi}{2}}, \dots = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}$$

to  $y = 1$ ; gdy zaś  $x = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}}, \frac{1}{\frac{7\pi}{2}}, \dots = \frac{1}{(2n - \frac{1}{2})\pi}$

wtedy  $y = -1$ .  $y$  przybiera wartość 0 dla  $x = \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, \dots = \frac{1}{n\pi}$ . Krzywa waha się nieskończenie

wiele razy od 1 do -1; przytem wahania następują coraz częściej, gdy  $x$  zbliża się do zera. Przy  $x = 0$

funkcja jest nieokreślona, w otoczeniu zaś tego punktu

przybiera nieskończenie wiele razy wszystkie wartości

od -1 do 1. Gdy  $x$  przybiera duże wartości dodatnie,

$y$  jest małą liczbą dodatnią. Począwszy od  $\frac{1}{x}$  krzywa

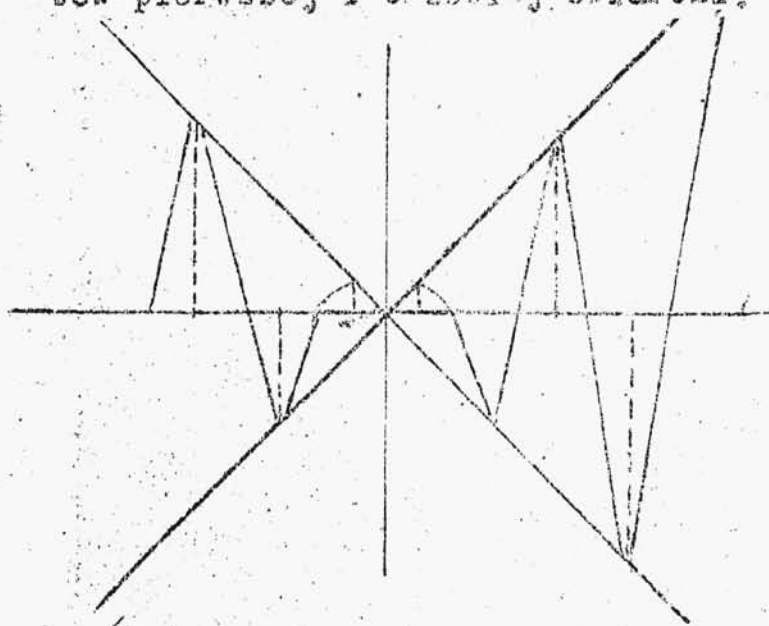


zbliża się asymptotycznie do osi  $X$ . Część ujemna krzywej jest odwróceniem części dodatniej.

2/ Mając sinusoidę, możemy otrzymać również wykres funkcji

$$y = x \sin x$$

Krzywa przecina się z osią w tych samych punktach, co i sinusoida  $\sin x = 0$ ; gdy zaś sinusoida osiąga wartość 1, t.j. gdy  $\sin x = 1$ , to dla tych wartości  $x$  mamy  $y = x$  i punkt odpowiedni leży na dwusiecznej kątów pierwszej i trzeciej ćwiartki. Gdy zaś  $\sin x = -1$



to  $y = -x$  i punkt odpowiedni leży na dwusiecznej drugiej i czwartej ćwiartki. Krzywa więc waha się między dwiema dwusiecznymi, przy czem szerokość fali się nie zmienia i równa się  $\pi$ .

Rys. 26.

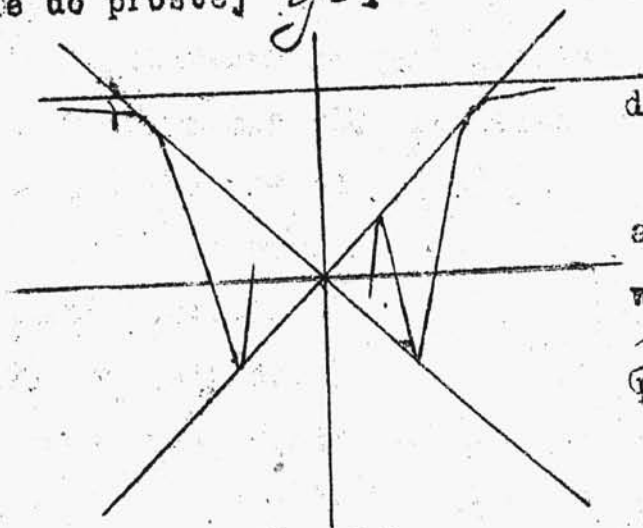
W ten sam sposób tworzy się część krzywej, odpowiadająca wartościom ujemnym zmiennej  $x$ .

Wykres funkcji

$$y = x \sin \frac{x}{2}$$



jest czymś pośrednim pomiędzy dwoma poprzednimi wykresami. Waha się on, podobnie jak ostatni wykres, pomiędzy dwusiecznymi; szerokość fal jednak jest tym mniejsza, im bardziej zbliża się krzywa do punktu 0. W tym punkcie funkcja jest nieokreślona. Dla wartości  $x = \frac{2}{\pi}$  krzywa po raz ostatni osiąga dwusiecznej, poczem, pozostając przez cały czas nad osią  $x$ , zbliża się asymptotycznie do prostej  $y = 1$



Rys. 29.

4/ Niech teraz będzie dana funkcja  

$$\operatorname{tg} y = k \operatorname{tg} x$$
  
 albo też, co na jedno wychodzi:  

$$y = \operatorname{arctg}(k \operatorname{tg} x)$$
  
 Krzywa, przedstawiająca tę zależność, posiada własność

okresowości, którą już spotykaliśmy u sinusoidy, tangensoidy i t.p. lecz rozwiniętą w wyższym stopniu. Możemy mianowicie przesunąć krzywą o  $\pi$ , czy to w kierunku osi  $x$ , czy też  $y$ , zawsze odpowiednie gałęzie jej upadną na siebie. W rzeczy samej, punkt  $M(x, y)$  przy przesunięciu w kierunku osi  $x$ , znajdzie się w pewnym punkcie  $M'(x', y')$ . Przytem



$$x' = x + \pi$$

$$y' = y$$

Wobec tego

$$\operatorname{tg} x' = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} y' = \operatorname{tg} y$$

Możemy zatem w pierwsze równanie podstawić zamiast

$x$  i  $y$ ,  $x'$  i  $y'$ .

$$\operatorname{tg} y' = k \operatorname{tg} x'$$

A więc punkt  $M'$  należy również do krzywej.

Przy przesunięciu w kierunku osi  $y$  punkt  $M$  pokryje punkt  $M''(x'', y'')$ , który jest również punktem krzywej, gdyż

$$x'' = x$$

$$y'' = y + \pi$$

$$\operatorname{tg} x'' = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} y'' = \operatorname{tg} y$$

A więc

i

Przystąpmy teraz do wykreślenia samej krzywej. Założmy nasamprzód, że  $k=1$ . W takim razie równanie przybiera postać

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x$$

Stąd znajdziemy

$$y = x + n\pi$$

gdzie

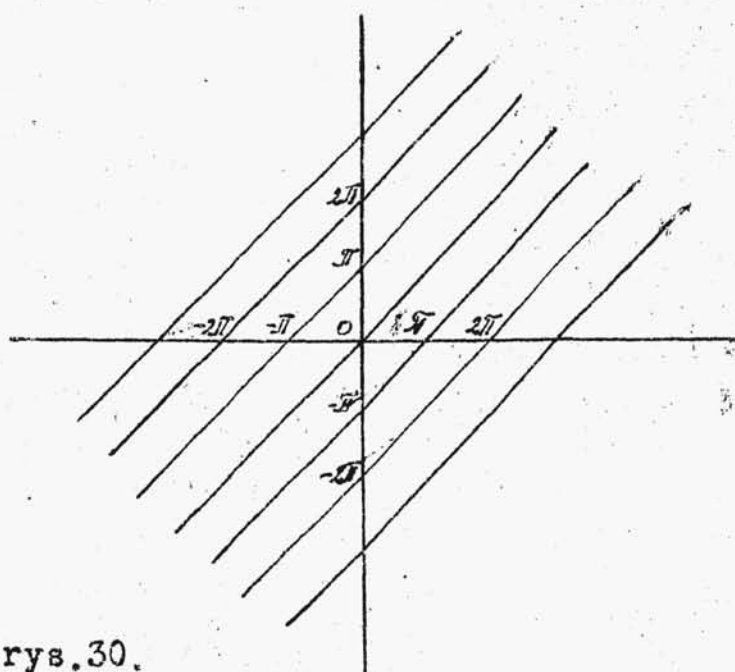
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \dots$$

Dla każdego  $n$  otrzymamy na wykresie prostą, nachyloną pod kątem  $45^\circ$  do osi  $x$ . Gdy  $n=0$

$$y = x;$$

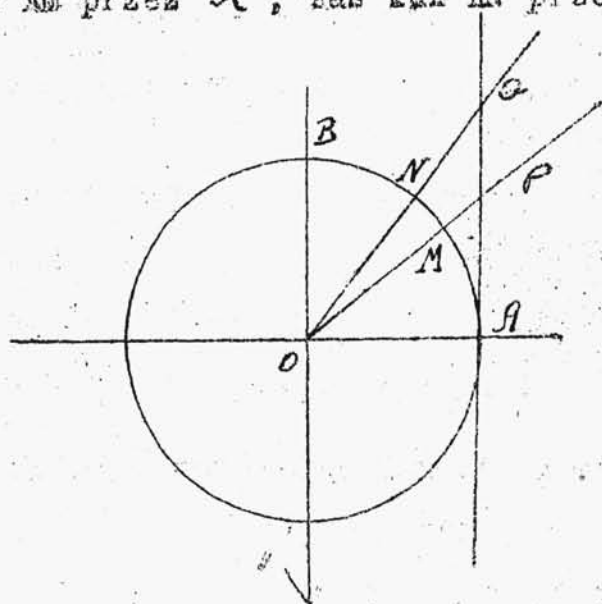


prosta jest dwusieczną kątów I i III ćwiartki.



rys.30.

lamy styczną do nęgo w punkcie A /rys.31/. Oznaczmy łuk AM przez  $x$ , zaś łuk AN przez  $y$ . A więc



rys.31.

Zbadajmy te-  
raz wypadek, gdy  
 $k > 1$  /w wypadku, gdy  
 $k > 1$  możemy dane  
równanie zastąpić  
przez równanie  
 $\operatorname{tg} x = k' \operatorname{tg} y$  przy  
 $k' > 1$ / Kreslimy  
koło trygonometry-  
czne i promieniu  
równym 1 i wykreś-

$$AP = \operatorname{tg} x$$

$$AQ = \operatorname{tg} y = k' \operatorname{tg} x$$

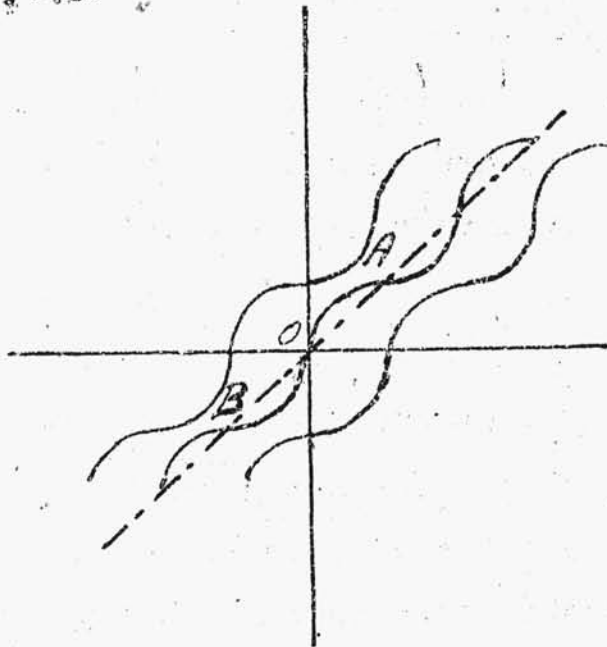
Wyobraźmy sobie  
teraz, że promienie  
OP i OQ mogą  
się obracać dokoła  
punktu O, przyczem  
jednak stosunek  
AP : AQ jest wiel-  
kością stałą.



Zawsze  $y > x$ . Tylko w punktach A  $x = 0$  i  $y = 0$ ,  
oraz w B  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $y = \frac{\pi}{2}$

$x$	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
$y$	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

rys. 31<sup>a</sup>



Możemy teraz narysować naszą zależność, mając wykres poprzedni /rys. 30/. Otrzymamy łuk leżący ponad prostą OA i przechodzący przez punkty O i A. Zbadajmy teraz naszą zależność dla wartości  $x$  ujemnych

$x$	$0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$
$y$	$0 \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

Łuk, odpowiadający tej części wykresu, przechodzi przez punkty O i B i jest symetryczny do łuku OA oprócznio nakreślonego, przyozem punkt początkowy O jest środkiem symetrii. Na mocy okresowości względem  $x$  i  $y$  po przesunięciu z łuku BOA krzywej, otrzymamy pozostałą część wykresu.

Cały wykres funkcji składać się będzie z szeregu linii faliastych, wijących się dookoła prostych równole-



głych. Możemy je przesuwac o  $\pi$  wzdłuż osi  $x$  i  $y$ ,  
przyczem się nie zmienia. Jest to przykład funkcji  
wielowartościowej zarówno względem  $x$ , jak i  
względem  $y$ .

### Graficzne rozwiązywanie równań.

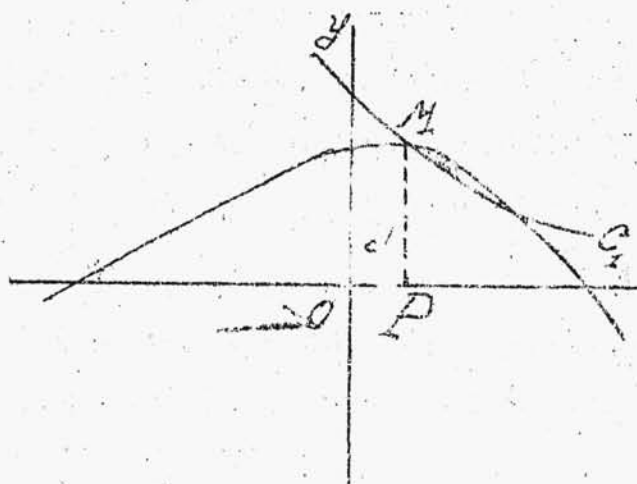
Wykresy funkcji mogą mieć praktyczne zastosowanie  
przy graficznym rozwiązywaniu równań. Niech będzie dane  
jakieś równanie względem  $x$ . Po przekształceniu można  
je przedstawić w postaci:

$$1/1/ \quad y(x) = f(x)$$

Każdą ze stron równania możemy oznaczyć przez  $y$ .

$$1/2/ \quad y = f(x) \quad 1/3/ \quad y = g(x)$$

Wykreślmy krzywe  $C_1$  i  $C_2$ , odpowiadające równaniom  
1/2/ i 1/3/. Rzecz jasna, że punkty przecięcia tych krzy-  
wych odpowiadają pierwiastkom równania 1/1/. Jeżeli krzy-  
we się nie przecinają, równanie rozwiązań nie posiada.



Jeśli zaś się  
przecinają, to  
równanie ma ty-  
le pierwiastków  
ile jest punktów  
przecięcia.



Gdy krzywe się zlewają, każdy punkt uważać możemy za punkt przecięcia. Równanie /1/ jest wtedy tożsamością.

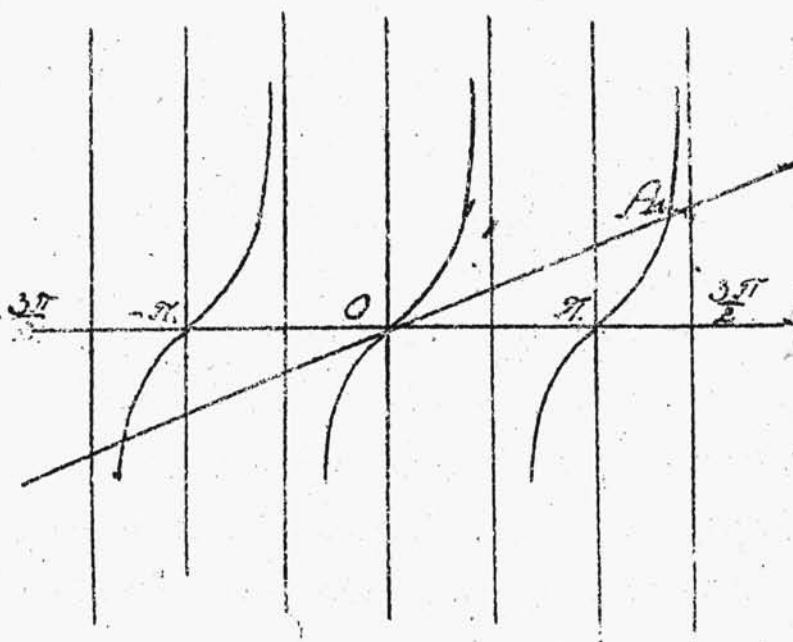
Rozwiążmy graficznie równanie

$$\operatorname{tg} x = kx$$

w którym  $k$  jest pewną daną liczbą. Oznaczmy każdą ze stron tego równania przez  $y$ ; otrzymamy zamiast niego układ dwóch równań.

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{tg} x \\ y &= kx \end{aligned}$$

Wykresem pierwszego z tych równań jest tangensoida, drugiego zaś prosta, przechodząca przez punkt 0. Oba



wykresy przecinają się w punktach  $0, A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ . Równanie posiada zatem nieskończenie wiele pierwiastków. Możemy je ponumerować w sposób następujący:

rys. 33.



$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ \pi &< x_1 < \frac{3\pi}{2} \\ 2\pi &< x_2 < \frac{5\pi}{2} \\ &\dots \end{aligned}$$

Jeżeli punkt ma dostatecznie wielką rzędną, to jego odcięta bardzo mało się różni od odciętej punktu przecięcia danej prostej z asymptotą. Odcięte zaś tych punktów są kształtu  $\frac{(2n+1)\pi}{2}$ . Różnica zatem pomiędzy tem wyrażeniem i pierwiastkiem równania jest tem mniejszą, im  $n$  jest większe, czyli im dalej leży punkt od początku układu.

PRZYKŁAD 2-gi.

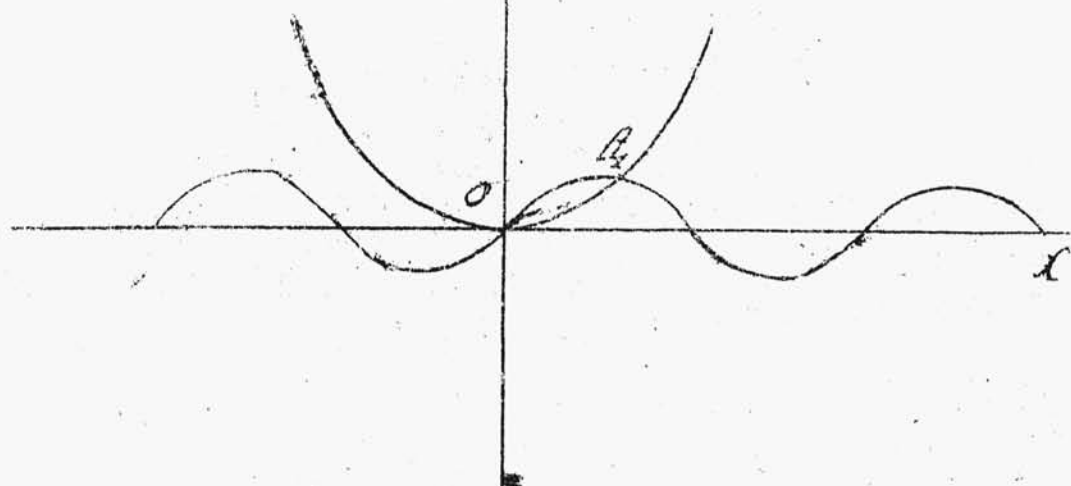
$$\sin x = Kx^2$$

Oznaczając sobie jego strony przez  $y$ , otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned} y &= \sin x \\ y &= Kx^2 \end{aligned}$$

których wykresami są odpowiednio sinusoida i parabola. Ilość punktów przecięcia tych krzywych, a więc i ilość pierwiastków równania jest liczbą, zależną od współczynnika  $K$ . Przypuśćmy, że  $K = 1$ . Parabola przecina się z sinusoidą w punktach  $O$  i  $A_1$ . Jeżeli teraz założymy, że  $K$  wzrasta, w takim razie parabola się zwęża i punkt  $A_2$  zbliża się do punktu początkowego.





rys. 34.

Gdy zaś  $K$  się zmniejsza, parabola się rozszerza i punkt  $A_1$  oddala się od punktu 0. Zawsze jednak jego odcięta  $x_1 < \pi$

Przy pewnej wartości  $K$  parabola zetnie się z sinusoidą w punkcie  $A_2$ ; ukaże się wówczas nowy pierwiastek równania  $A_2$ , zawarty między zerem i  $\pi$ . Jeżeli jeszcze cokolwiek zmniejszymy, otrzymamy nowy pierwiastek  $x_3$ , również ujemny. Gdy  $K \rightarrow 0$ , to

$$x_1 \rightarrow \pi, x_2 \rightarrow -\pi, x_3 \rightarrow -2\pi$$

Przy pewnej określonej wartości współczynnika  $K$  otrzymamy nowy punkt wspólny obu krzywych  $A_4$  i nowe rozwiązanie  $x_4$ . Gdybyśmy  $K$  zmniejszali w dalszym ciągu, otrzymalibyśmy nowe punkty  $A_5, A_6, \dots$  odpowiadające rozwiązaniom  $x_5, x_6, \dots$  t.d.



Wykreślmy na zakończenie jeszcze kilka charakterystycznych funkcji.

Niech  $E(x)$  oznacza największą liczbę całkowitą, zawartą w liczbie  $x$ . /Funkcja ta jest szczegółowo rozważana w analitycznej teorii liczb/.

Jeżeli

to

$$0 \leq x < 1 \quad E(x) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \quad E(x) = 1$$

$$2 \leq x < 3 \quad E(x) = 2$$

Wykres funkcji  $y = E(x)$  składać się więc będzie z szeregu odcinków o długości równej jednostce i równoległych do osi  $x$ . Punkty początkowe każdego z tych odcinków mają współrzędne  $y = x$ , więc leżą na dwusiecznej kątów I i III ćwiartki.

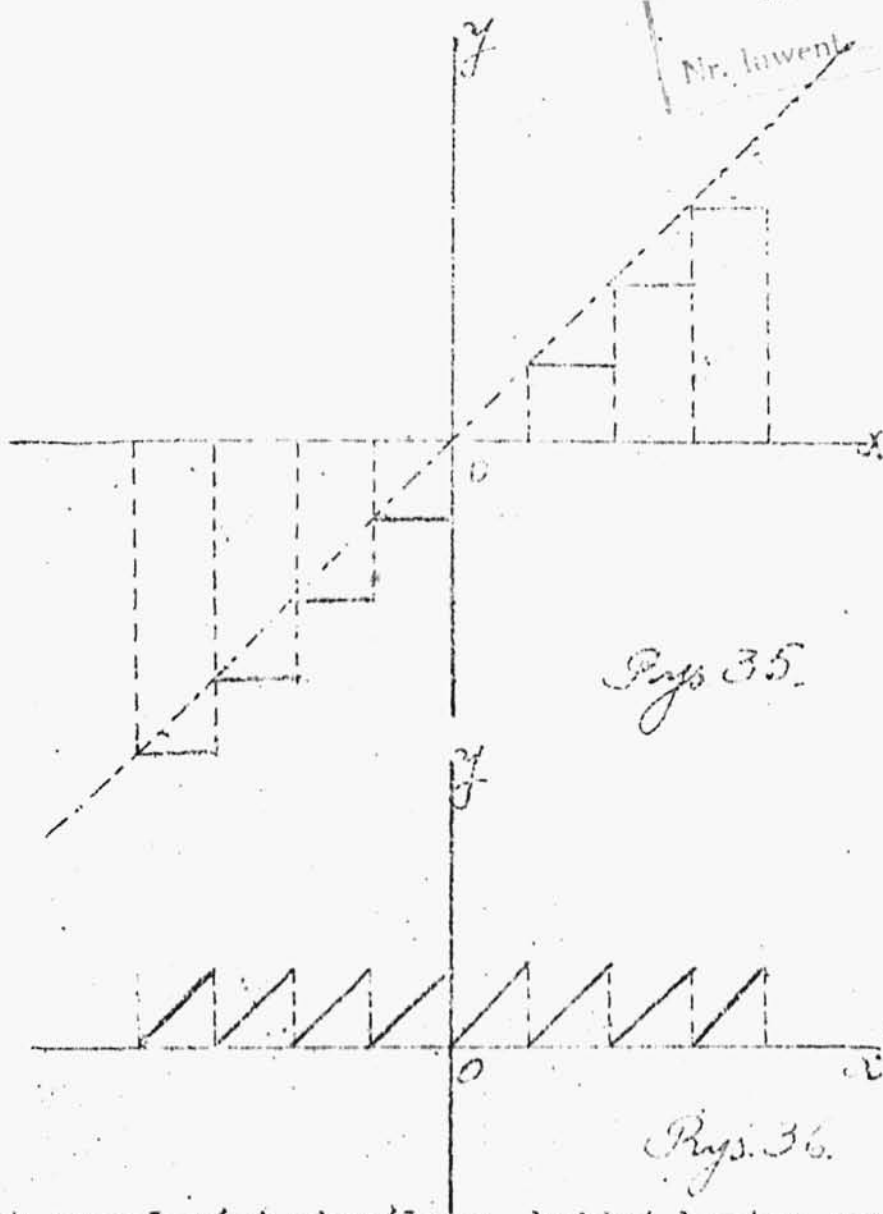
Niech teraz

$$y = x - E(x)$$

Punkty krzywej otrzymamy, odejmując od rzędnych punktów dwusiecznej  $y = x$  rzędne funkcji  $y = E(x)$ . Wykres zatem składać się będzie z nieskończonej ilości odcinków równoległych do dwusiecznej I-iej ćwiartki, których rzędne końcowe są równe jedności.

/UWAGA. Punkty o rzędnych  $= 1$  nie należą do wykresu stanowiąc tylko punkty graniczne, do których zbieżają punkty wykresu z lewej strony; punkty o rzędnych  $= 0$





/należą do badanej linii/.  
Nie dla każdej funkcji da się wykres narysować.

Określmy np.

$$y = f(x)$$

w sposób następujący,  
gdy  $x$  jest liczbą wymierną, to  $y = 0$   
gdy zaś  $x$  jest niewymierne, to  $y = 1$ , funkcja ta jest

w zupełności określona, każdej bowiem wartości  $x$  odpowiada pewna wartość  $y$ . Do wykresu należeć będą wszystkie punkty wymienione osi, jednakże pomiędzy każdymi dwoma punktami wymiernymi jest punkt niewymierne, który należy zastąpić punktem o tej samej odciętej.



położonym na prostej  $y=x$ . Krzywa ta jest więc nieciągła. W dowolnie małym odcinku przeskakuje ona nieskończenie wiele razy od 0 do 1.

### POJĘCIE GRANICY.

Zanim wyjaśnimy samo pojęcie granicy, musimy zapoznać się z kilkoma pojęciami podstawowymi, zaczerpniętymi z t. zw. teorii mnogości. Nie będziemy określali zbioru, uważając go za pojęcie pierwotne, niedające się sprowadzić do pojęć prostszych, za pojęcie dla każdego zrozumiałe. Zajmować się będziemy zbiorami, których elementami są liczby i punkty. Zbiory mogą być skończone i nieskończone. Niechaj będzie danym skończony zbiór liczb. Wśród jego elementów musi istnieć pewna liczba największa i pewna liczba najmniejsza. Nic podobnego jednak nie da się powiedzieć o zbiorze nieskończonym. Weźmy np. zbiór złożony z odwrotności kolejnych liczb całkowitych dodatnich

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Ten zbiór nie posiada liczby najmniejszej. Zbiory nieskończone mogą nie posiadać również liczby największej. Gdy mamy zbiór skończony, możemy jego ele-