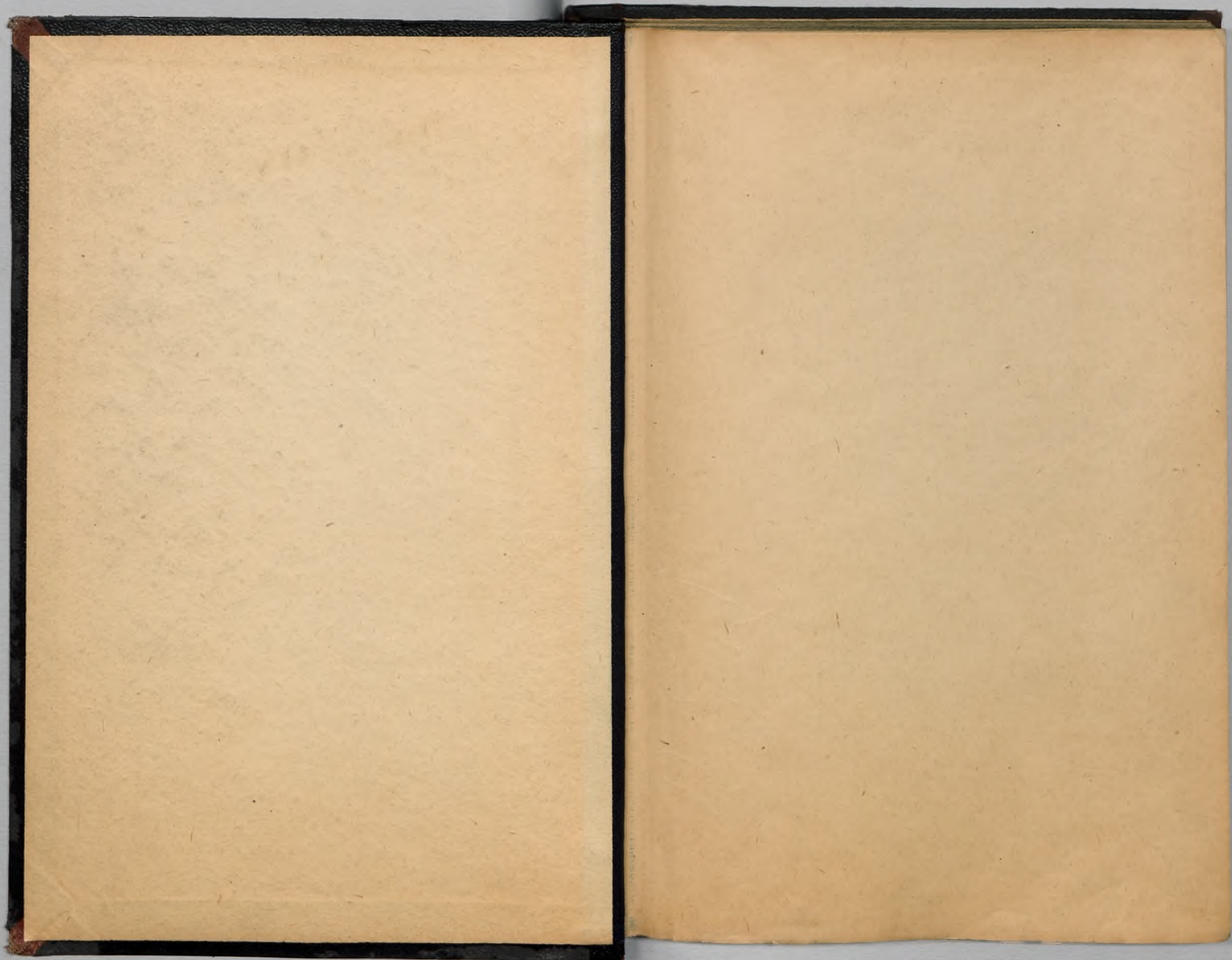


*Władysław Findeisen*

*Metoda analizy i syntezy układu  
automatycznej regulacji w oparciu  
o odpowiedź na wymuszenie o kształcie  
skoku jednostkowego*



Władysław Findeisen

Metoda analizy i syntezy układu automatycznej regulacji w o-  
siedzinie o odpości na wyznaczenie o kształcie skoku jednostkowego

Wł. Findeisen  
Warszawa, 1954 r.

Treść

1. Skok jednostkowy - określenie, własności .....str. 1

2. Odpowiedź na skok jednostkowy jako kryterium jakości układu regulacji .....str. 4

3. Związek odpowiedzi na skok jednostkowy z innymi kryteriami jakości układów .....str. 8

4. Synteza układów automatycznej regulacji w oparciu o odpowiedzi elementów na skok jednostkowy

4.1 Wstęp .....str. 11

4.2 Omówienie i dyskusja metody rachunkowej...str. 17

4.3 Zastosowanie operatorów liczbowych do syntezy układów automatycznej regulacji .....str. 54

4.4 Kryterium stabilności w oparciu o odpowiedź jednostkową układu otwartego .....str. 86

5. Przejście z odpowiedzi jednostkowej na charakterystykę amplitudowo-fazową .....str. 92

6. Ocena ogólna metody .....str. 110

Wydawnictwo  
1984

1. Skok jednostkowy - określenie, własności.

Funkcją o kształcie skoku jednostkowego, albo funkcją skoku jednostkowego, funkcją jednostkową, czy też krótko skokiem jednostkowym nazywamy następującą funkcję czasu:

$$f(t) = 0, \quad t < 0$$
$$f(t) = 1, \quad t \geq 0 \quad \dots\dots\dots 1$$

Skok jednostkowy będę w dalszym ciągu oznaczał przez literę  $M$  - np.  $M(t)$ ,  $M(s)$  i t.d. — *Skok jednostkowy*

Skok jednostkowy odgrywał zawsze dużą rolę w teorii stanów niustalonych, czego dowodem jest jego szczególne znaczenie w rachunku operatorowym Heaviside'a.

Przekształcenie Laplace'a skoku jednostkowego równe jest  $1/s$ :

$$M(s) = L[M(t)] = \frac{1}{s} \quad \dots\dots\dots 2$$

Widno zespolone skoku jednostkowego, a więc również charakterystykę amplitudowo-fazową wyraża się wzorem

$$M(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad \dots\dots\dots 3$$

co daje następujące charakterystyki częstotliwościowe tej funkcji:

charakterystykę amplitudową /rys. 1 a/

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad \dots\dots\dots 4$$

charakterystykę fazową /rys. 1 b/

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\dots 5$$

składową rzeczywistą charakterystyki częstotliwościowej

$$Re M(j\omega) = 0 \quad \dots\dots\dots 6$$

składową urojoną charakterystyki częstotliwościowej /rys. 2/

$f(\omega)$

$f(y)$

$M(s)$

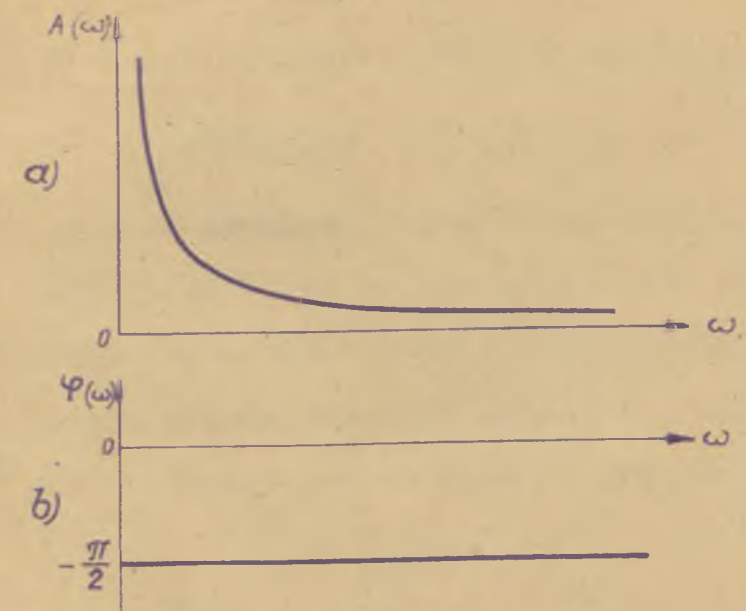
$M(s)$

$M(s)$

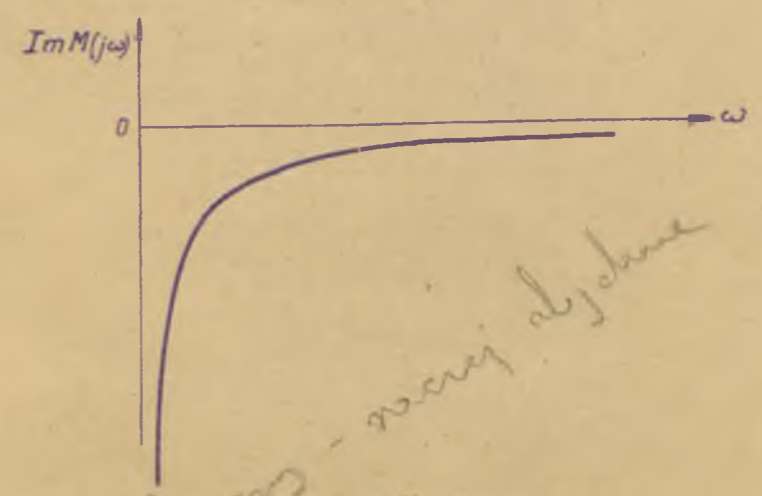
$M = M$

2

$$\text{Im } M(j\omega) = -\frac{1}{\omega}$$



Rys. 1.



Rys. 2

*Przebieg wyznaczenia - macierz algebra*

$$M'(t) = \delta(t)$$

.....

$$0 \leq t < \infty$$

$$\int_0^t M(t) dt$$

.....

.....

nie Fourierowskiego

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad \dots\dots 10$$

gdyż N/t/ nie spełnia warunku bezwzględnej zbieżności

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < A \quad \dots\dots 11$$

gdzie A jest ~~liczbą~~ liczbą rzeczywistą.

Tym niemniej można otrzymać siłno zespolone skoku jednostkowego nawet wprost z przekształcenia Fouriera, bez pomocy przekształcenia Laplace'a, mnożąc N/t/ przez  $e^{-\beta t}$ , a następnie przechodząc do granicy  $\beta \rightarrow 0$ .



2. Odpowiedź na skok jednostkowy jako kryterium jakości układu regulacji.

Zagadnienie kryterium jakości układu regulacji było dość wyczerpująco opracowywane w literaturze, jednak nie określono dotąd jakiegoś kryterium uniwersalnego. W ogólnym przypadku oceną jakości układu regulacji powinno niewątpliwie być statystyczne zachowanie się parametru regulowanego w realnych, statystycznie określonych warunkach pracy układu regulacji - to jest z właściwym uwzględnieniem wielkości, kształtu i miejsca przyłożenia wszelkich czynników zakłócających. Tęego rodzaju zasadnicze podejście nie znalazło dotąd opracowania, poza serwo-mechanizmami, przy których stosuje się je z pewnym uproszczeniem, mianowicie tylko względem stosunku  $\frac{\theta}{\alpha}$ .

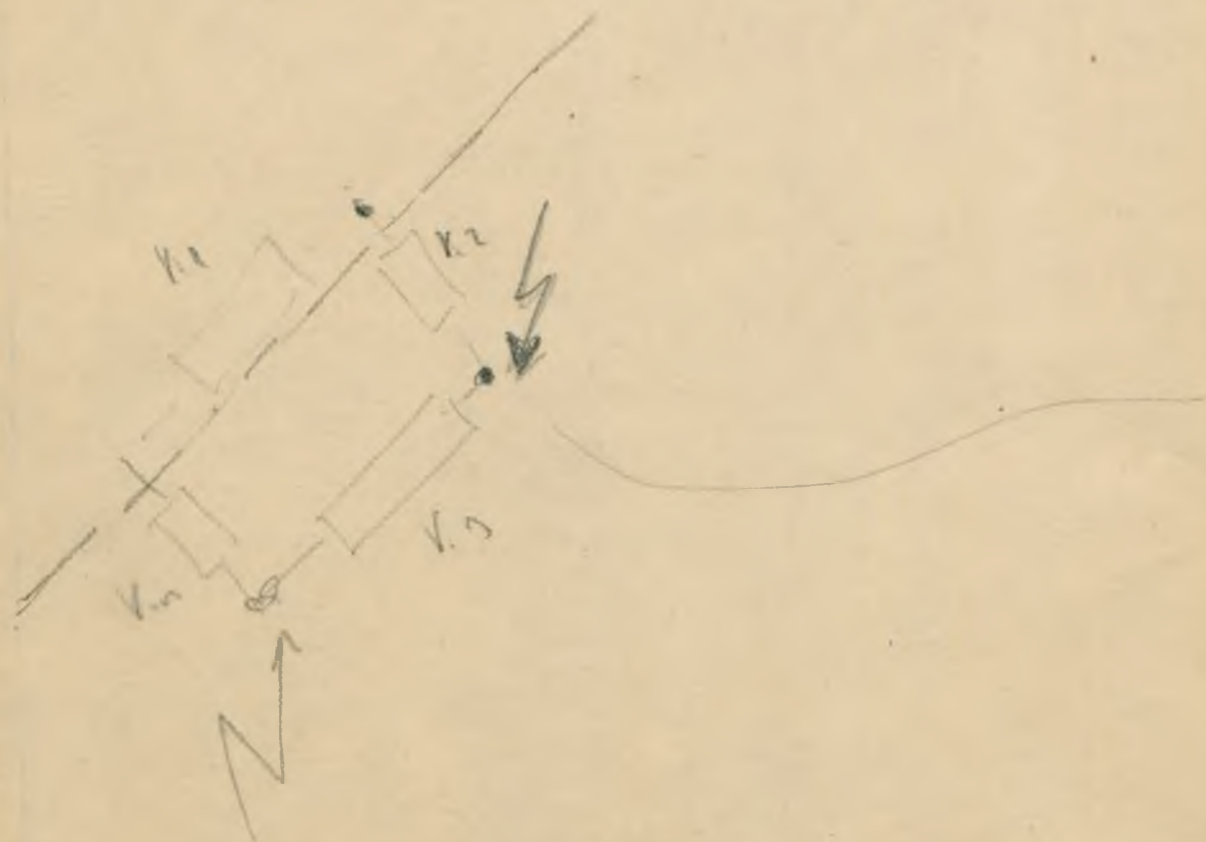
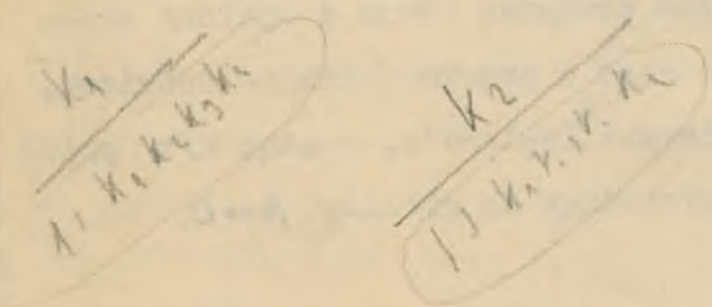
Podejście statystyczne nie jest łatwe i dogodne do stosowania; dla celów praktycznych używane zatem bywają inne kryteria, z reguły - w przemysłowych układach regulacji - odnoszące się do przebiegu przejściowego.

Jedno z takich kryteriów, a raczej całą grupę kryteriów, jest oparte o odpowiedź układu na skok jednostkowy. To próbne zakłócenie powinno przy tym być w zasadzie przyłożone w takim miejscu układu, by jaknajbardziej zbliżyć się do zakłóceń realnie występujących.

Aby móc porównywać między sobą różne odpowiedzi jednostkowe, stosowane bywają różne mierniki.

Bloch [1] wyznacza, na przykład;

czas regulacji  $T$ , określony bądź jako  $T_1$  potrzebne do zmniejszenia początkowego odchylenia o 90%, bądź jako  $T_2$  potrzebne do zmniejszenia tegoż odchylenia o 98%; w układzie mającym równanie pierwszego rzędu i stałą cza-





$$\int_0^{\infty} e(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e(t) e^{-pt} dt$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} [F(p)] = [F(p)]_{p=0}$$

$$\frac{p^2}{p+2} \Big|_{p=0} = 0$$

$$\frac{p^2}{p+2} \approx p - \frac{p^2}{2} \approx \frac{d}{dt} e - 2e$$

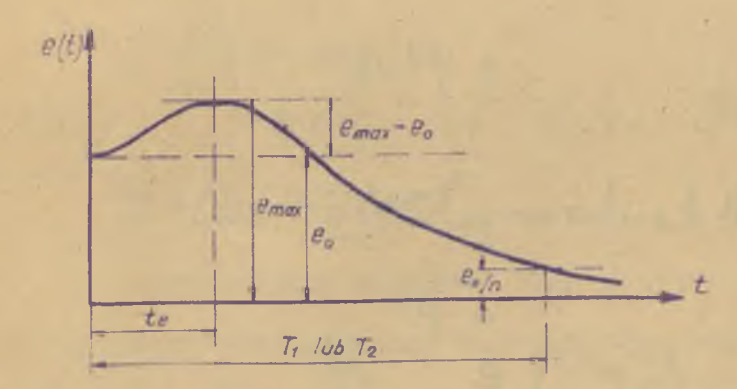
dlc to jest  $J_1 = \int_0^{\infty} e(s) ds = 0$

$$p^2 \cdot p = p^3$$

$$p^2 \cdot \frac{p}{p+2} = \frac{p^3}{p+2}$$

$$p^2 \cdot \frac{p}{p+2} = \frac{p^3}{p+2}$$

su  $T$  odpowiada to warto cion  $T_1 \approx 23T$  lub  $T_2 \approx 4T$ .  
 przeregulowanie, polegające na wystąpieniu  $e_{max} > e_0$ ;  
 miarą przeregulowania jest  $e_{max} - e_0$  /rys.3/



Rys. 3

maksymalne odchylenie,  $e_{max}$  na rys. 3.  
czas maksymalnego odchylenia,  $t_e$  na rys. 3.

Ważne podkreśli jednak, że analityczne określenie parametrów charakteryzujących jakość regulacji jest możliwe tylko dla prostszych układów, opisywanych równaniami pierwszego i drugiego rzędu. Dla układów bardziej złożonych powstał problem oceny jakości na podstawie współczynników równania charakterystycznego /niekiedy również warunków początkowych/, bez potrzeby rozwiązywania równań.

Jednym z nadejających się do tego mierników jakości jest proste kryterium całkowe, określające t.zw. pole regulacji:

$$J_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt = e(0) - e(\infty) \dots \dots \dots 12$$

Kryterium to, stosowane p.inn. przez Oldenburga i Sartoriusa [2], daje możliwość obliczenia całki /12/ wprost z wyrażenia operatorowego - mianowicie

$$J_1 = [e(s)]_0^{\infty} \dots \dots \dots 13$$

dlaczego po odwróceniu kierunku  
 struktury oddebrano

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{\infty} [e(t) - e(\infty)] e^{-pt} dt$$

$$= \int_0^{\infty} [e(t)]_{p=0} - e(\infty) dt$$

$$2 \int_0^{\infty} [e(t) - e(\infty)]_{p=0} dt$$

$$= \left[ \bar{e}(p) - \frac{e(\infty)}{p} \right]_{p=0}$$

$$\left[ \bar{e}(p) - \frac{e(\infty)}{p} \right]_{p=0}$$

$$f'(p) \hat{=} p f(p) - p f(0)$$

Dla odpowiedzi jednostkowych, występujących w statycznych układach regulacji, całka /12/ równa jest zawsze niekończoności; dlatego też ogólniejsze jest następujące określenie kryterium całkowego

$$J_1 = \int_0^{\infty} [e(t) - e(\infty)] dt \quad \dots\dots\dots 14$$

i zatem

$$J_1 = [e(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s e(s)]_{s=0}^{\infty} \quad \dots\dots\dots 15$$

Kryterium całkowe /12/ i /14/ nie nadaje się do oceny odpowiedzi jednostkowych oscylacyjnych; wprowadzono /patrz np. [1], [2]/ kryterium kwadratowe

$$J_2 = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt \quad \dots\dots\dots 16$$

Ocenę względną przeregulowania może dąć następujący współczynnik, wprowadzony przez Boldbauma [wg. 1]:

$$\rho = \frac{J_2}{J_1} \quad \dots\dots\dots 17$$

przy czym, jeśli przyjąć  $e_0 = 1$ , zawsze  $\rho < 1$  dla przebiegów bez przeregulowania, a może być  $\rho > 1$  dla przebiegów z dużym przeregulowaniem.

Należy zauważyć, że kryteria całkowe powstały - jak się wydaje - dlatego, że łatwiej je można obliczyć przy posługiwaniu się metodami czysto analitycznymi, gdyż nie wymagają wyznaczania przebiegu regulacji. Nie są one jednak nigdy tak informatywne, jak kształt przebiegu przejściowego oraz charakteryzujące ten kształt parametry  $e_{max}$ ,  $T$ ,  $t_0$  i t.d. Stąd też należy raczej zapisać na dobro używanej w dalszej części pracy metody obliczeniowej tę okoliczność, że otrzymano się przy niej przybliżony wyznacznik odpowiedzi jednostkowej.

Powstałe teraz zasadniczy problem, w jakim stopniu odpowiedź na skok jednostkowy jest miarą jakości

Try do wie w ogólnie  
jednostki

układu, czyli miarą jego przyszłego zachowania się w realnych warunkach pracy. W realnych bowiem warunkach zakłócenia działające na układ nie są - ogólnie biorąc - skokami jednostkowymi.

Nawet jeśli przyjmemy, że próbny skok jednostkowy został do układu przyłożony w tym samym miejscu, co powstające się później główne zakłócenie, zachowanie się układu może znacznie odbiegać od otrzymanego przy skoku jednostkowym.

Na przykład, jeśli układ będzie miał choćby nieznaczny rezonans dla pewnej częstotliwości, to przyłożenie w miejscu zakłócenia tej tylko częstotliwości z amplitudą równą jedności wywoła "niebezpieczne" zjawisko rezonansowe. Stąd też niektórzy autorzy [3] zalecają, by w przypadkach, gdy możliwe są zakłócenia okresowe o określonej częstotliwości, zdajnoważ wzgl. obliczać również charakterystykę częstotliwościową układu regulacji, oprócz samej odpowiedzi jednostkowej.

3. Związek odpowiedzi na skok jednostkowy z innymi kryteriami jakości układów.

Jak dotąd najbardziej konkretne kryteria jakości układów znajdujemy w teorii serwomechanizmów - mianowicie, stawia się tu w runki dla stanu ustalonego:

zero odchylenia przy  $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$  /"klasa I"/

zero odchylenia przy  $\frac{d\theta_1}{dt} = const \neq 0$  /"klasa II"/

zero odchylenia przy  $\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = const \neq 0$  /"klasa III"/

i t.d. Znane jest stwierdzenie spełnienia tych kryteriów na podstawie asymptoty charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego przy  $\omega = 0, [ ]$ .

Poszukajmy związku odpowiedzi na skok jednostkowy z tymi kryteriami. Chodzi tu przy tym o odpowiedź  $\theta_2$  na skok jednostkowy  $\theta_1$  w układzie zamkniętym, bowiem odpowiedź  $\theta_2$  na skok jednostkowy  $e$  w układzie otwartym zdradza zupełnie bezpośrednio charakter układu, to jest ilość całkowań, od której jak wiadomo zależy przynależność do klasy I, II czy III /por. np. [1] [2] [3]/.

Ważny, dla uproszczenia rozważań, od razu wielkość odchylenia w układzie zamkniętym:

$$e(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t) = L^{-1} \left[ \frac{1}{1 + K_0(s)} \theta_1(s) \right] \dots\dots 18$$

we wzorze tym  $K_0/s/$  oznacza przepustowość układu otwartego, która dla poszczególnych klas serwomechanizmów ma postać:

klasa I  $K_0(s) = \frac{N(s)}{s Q(s)} \dots\dots 19$

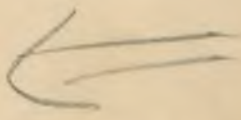
/ tu  $N/s/$  i  $Q/s/$  są wielomianami dającymi się rozłożyć na iloczyn  $/s-s_1//s-s_2//s-s_3/\dots /s-s_n/$ , gdzie  $s_1, s_2, \dots, s_n$  są  $\neq 0/$

klasa II  $K_0(s) = \frac{N(s)}{s^2 Q(s)} \dots\dots 20$

klasa III  $K_0(s) = \frac{N(s)}{s^3 Q(s)} \dots\dots 21$

Ważnym, że  $\theta_1(t)$  jest skokiem jednostkowym, to jest  $\theta_1(s) = \frac{1}{s}$

do dyktu  $Q_2(-)$



Otrzymamy

$$e(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{1 + K_0(s)} \dots\dots 22$$

i zatem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{1}{1 + K_0(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + K_0(s)} \dots\dots 23$$

Biorąc najpierw serwomechanizm klasy I, to jest  $K_0/s/$  wg /19/ otrzymujemy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s + \frac{N(s)}{Q(s)}} = 0, \dots\dots 24$$

bowiem  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s)}{Q(s)} \neq 0$ , zgodnie z określeniem  $N/s/$  i  $Q/s/$ .

Wzór /24/ daje warunek konieczny i zarazem dostateczny na to, że dany serwomechanizm należy do klasy I; jest to przesądą oczywistą już na podstawie określenia klasy I.

Dla serwomechanizmu klasy II ważny wyrażenie, powstające z podzielenia obu stron /22/ przez  $s$ :

$$\frac{e(s)}{s} = \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + K_0(s)} \dots\dots 25$$

Wynika stąd, że

$$\int_0^t e(t) dt = L^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + K_0(s)} \right] \dots\dots 26$$

i zatem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + K_0(s)} \dots\dots 27$$

Podstawiając  $K_0/s/$  wg /20/, otrzymujemy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2 + \frac{N(s)}{Q(s)}} = 0 \dots\dots 28$$

bowiem jak poprzednio  $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{N(s)}{Q(s)} \neq 0$ .

Warunek /28/ jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by dany serwomechanizm należał do klasy II - bowiem jest warunkiem koniecznym i dostatecznym postać  $K_0/s/$

podane wzorem /20/.

Z warunku /26/ wynika ciekawy wniosek, mianowicie, że funkcje e/t/ musi w przedziale 0 ÷ ∞ przybrać wartości dodatnie i ujemne, zatem przebieg θ<sub>2</sub>/t/ musi wykazać przepięgnięcia. Nie jest bowiem w ujęciu fizycznym możliwe osiągnięcie e/t/ = 0 w całym przedziale 0 ÷ ∞, przy wyznaczeniu θ<sub>2</sub>/t/ w jednostkach skoku jednostkowego.

W praktyce, wystarczy obliczyć całkę z odchylenia powstałego po przejściu skoku jednostkowego θ<sub>1</sub>:

$$\int_0^{\infty} e(t) dt \quad \dots\dots 29$$

aby stwierdzić, czy dany serwomechanizm należy lub nie należy do klasy II. Jeżeli oczywiście, musi być pierw spełniony warunek przynależenia do klasy I, wyrażony wzorkiem /27/.

Podobnie, dla serwomechanizmu klasy III otrzymany warunek

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e(t) dt dt = 0 \quad \dots\dots 30$$

I w tym przypadku przebieg e/t/ musi być oscylacyjny, bowiem muszą być najpierw spełnione warunki dla serwomechanizmu klasy I i II.

Podsumowując, otrzyaliśmy następujące kryteria, pozwalające określić klasę serwomechanizmu na podstawie odpowiedzi jednostkowej e/t/ lub θ<sub>2</sub>/t/:

	warunek na e/t/	warunek na θ <sub>2</sub> /t/
serwomechanizm klasy I	$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$	$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_2(t) = 1$
serwomechanizm klasy II	$\int_0^{\infty} e(t) dt = 0$	—
serwomechanizm klasy III	$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e(t) dt dt = 0$	—

#### 4. Synteza układów automatycznej regulacji w oparciu o odpowiedzi elementów na skok jednostkowy.

##### 4.1. Wstęp.

Zagadnienie syntezy układów automatycznej regulacji nie zawsze jest w literaturze jasno i jednoznacznie postawione, ani też jasno rozwiązane. Przez syntezę układu należy rozumieć takie dobranie i połączenie ze sobą elementów, które w rezultacie stworzy układ o zadanych charakterystykach. W stwierdzeniu tym występują trzy części problemu syntezy: a/ dobranie elementów, b/ połączenie ich ze sobą - t.j. określenie struktury układu, c/ kwestie "zadanych charakterystyk".

Kwestie "zadanych charakterystyk" jest sprawą może najbardziej istotną. W wielu wypadkach praktycznych, szczególnie w zastosowaniach przemysłowych, jedynym lub niemal jedynym wymaganiem stawianym w stosunku do układu regulacji jest warunek stabilności. Bywają również /pon. rozdz. 2/ stawiane pewne ogólne warunki na przebieg przejściowy - np. czas ustalenia się, sporydyczność, przeregulowanie. Tu jednak pojawiają się trudności - trzeba określić o jaki mianowicie przebieg przejściowy chodzi. Rzecz oczywista, zwykle chodzi o przebieg przejściowy odchylenia parametru regulowanego, lecz przebieg ten zależy nie tylko od własności układu, lecz również od wielkości i kształtu zakłócenia oraz od miejsca jego przyłożenia. Dalej, może na układ oddziaływać kilka różnych zakłóceń jednocześnie; może być również w układzie więcej niż jeden parametr o znaczeniu parametru regulowanego.

Stosunkowo najbardziej konkretnie sprawa "zadanych charakterystyk" bywa stawiana w serwo mechanizmach. Chodzi

tu zawsze o stosunek wielkości wyjściowej  $\theta_2$  do wejściowej  $\theta_1$ , zatem nie ma dowolności w przyłożeniu zakłócenia. Stawia się warunki na stan ustalony /zero odchylenia przy  $\frac{d\theta_1}{dt} = \text{const.}$ , przy  $\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \text{const.}$  i t.d./, oraz - lecz już bardziej ogólnie - warunki na przebieg przejściowy  $\theta_2$  przy skokowych zmianach  $\theta_1$ . W pewnych przypadkach szczególnych stawiane bywają warunki o charakterze statystycznym /np. minimum średnio-kwadratowego odchylenia/, lecz w dalszym ciągu może być mowa o stosunku  $\theta_2:\theta_1$ , przy czym  $\theta_1$  jest wielkością "zakłócającą".

W ogólnej przypadkach przemyślo-ych układów regulacji, wydaje się, oceną jakości układu regulacji, czyli punktem wyjściowym syntezy, powinno być statystyczne zachowanie się parametru regulowanego w realnych, statystycznie określonych warunkach pracy układu regulacji - to jest z właściwym uwzględnieniem wielkości, kształtu i miejsca przyłożenia wszystkich czynników zakłócających. Tego rodzaju zasadnicze podejście nie znalazło dotąd opracowania - poza serwowaniami, o czym wspomniano wyżej.

Widzi się, że zastosowanie przemyślowe - ewentualnie z bardzo niewielkimi wyjątkami - dotąd jeszcze nie wymaga tak precyzyjnego podejścia.

W obecnej pracy będę się posługiwał, jako miarą jakości układu regulacji, jego odpowiedzi na "zakłócenie główne" o kształcie skoku jednostkowego. Przez zakłócenie główne rozumiem to zakłócenie, które - jak np. zmiana obciążenia prądnic - jest głównym i największym czynnikiem wywołującym zmiany parametru regulowanego. Będę zakładał, że inne zakłócenia nie istnieją, a w szczególności - że nie pojawiają się jednocześnie z zakłóceniem głównym. Jest rzecz oczy-



Wzrost wiedzy

wista, że "średnie" zachowanie się parametru regulowanego będzie na ogół lepsze od tak obliczonego, o ile wielkość przyjętego w obliczeniu zakłócenia głównego będzie odpowiadała jego maksymalnej spodziewanej wartości.

Przyjęta w pracy metoda obliczeniowa /rachunek oparty o ciągi liczbowe, t.j. "rachunek operatorów liczbowych"/ praktycznie pozwala tylko na syntezę układu dającego określona odpowiedź na zakłócenie główne - nie udaje się np. postawić tylko "warunku przeregulowania", albo "warunku czasu ustalenia się". Odpowiednie metodyka w postępowaniu pozwala jednak na zmniejszenie sztywności stawianych założeń.

Kwestia druga w problemie syntezy, określenie struktury układu, nie ma dotąd w ogóle bezpośredniego rozwiązania. Chodziłoby tu o określenie z góry, jakąś obiektywną metodą, blokowego schematu układu regulacji, który - na przykład przy danych esortymencie stojących do rozperządzenia elementów - optymalnie spełni postawione wymagania. Kwestia ta w odniesieniu do układów regulacji sterujących jednym parametrem regulowanym ma charakter raczej czysto akademicki; natomiast zyskuje na znaczeniu przy złożonych układach automatyzacji, gdzie ilość możliwości rozwiązania jest znacznie większa od tej, którą może dać jedno czy dwa wewnętrzne sprzężenie zwrotne i szeregowo członki korekcyjne. W obecnym stadium teorii automatyki potrzebne jest konstruktorowi odpowiednie doświadczenie, na podstawie którego wybierze on taki czy inny schemat blokowy. Zauważmy, że tego rodzaju metoda analityczna w zasadzie już istnieje w zastosowaniu do układów przekaźnikowo-stykowych, i jest praktycznie stosowana w Instytucie Automatyki i Telemechaniki AN ZSRR.



diagramy dyfuzji chemicznej  
dyfuzji termicznej - di. aw. w. w. w.

3/ Użycie specjalnego numerycznego aparatu matematycznego, przystosowanego do tego rodzaju danych wyjściowych - aparatem takim jest np. rachunek ciągów liczbowych /operatorów liczbowych/.

Wszystkie te drogi były opracowywane w literaturze w sposób mniej lub więcej obszerny. Metoda /1/ rozwinęła się początkowo szczególnie w Niemczech; należy tu np. podejście Oldenbourga i Sartoriusa [1], a ostatnio zyskuje nowe perspektywy w oparciu o ogólne metody aproksymacji funkcji. Metoda /2/, podjęta wielkim rozwojem i dogodnością praktyczną metod częstotliwościowych, jest stale aktualna i spełniać można coraz to nowe sposoby jej realizowania - np. [4], [7], [5]. Metoda /3/ jest stosunkowo najnowszą. Pierwszą pracą w kierunku rozwinięcia metody /3/ jest artykuł prof. J. Tustina [8], podejmuje ogólne zasady nowej metody i niektóre sugestie dalszego jej rozwinięcia. Należąc do tego opracowań podobny tenat Bellert [9], wykazując, że ciągi liczbowe stanowią pewną klasę liczb, na których można wykonywać określone działania i które mogą być stosowane do rozwiązywania niektórych problemów - m.in. do obliczenia spłotu dwóch funkcji, znanych tylko w formie wykreślowej. W końcu 1953 r. ukazał się artykuł Wrbaczyńskiego [10], w którym autor zastosował podobną metodę, w jej najprostszej formie, do przybliżonego obliczenia całki Duhamela. Nadziejemy i perspektywy rozwojowe nowej metody w zastosowaniu do zagadnień automatycznej regulacji podkreślił A. Porter [11]. Całe zagadnienie syntezy układów regulacji w oparciu o charakterystyki chwilowe jest problemem wyjątkowo nurtującym w technice światowej; spotyka się m.in. wzmianki o piśmiennych na ten temat dysertacjach - należą tu: dysertacje

F.S. Cheng "Praktische Methoden zur Ermittlung von Regelvorgängen unter Zuhilfenahme der Übertragungsfunktionen", Technische Hochschule Stuttgart 1942 /cyt.wg [12]/, oraz prace doktorskie "Synthesis of servomechanisms based upon characteristics of the time response", E. S. Stanton, University of Pennsylvania /cyt.wg [13]/. Także i na wszechwiaszkowym Zjeździe poświęconym teorii autonomicznej regulacji, odbytym w Moskwie w 1955 roku, problem ten znalazł się w tematyce wykładów.

W pracy niniejszej znajdują się rozwiniecie stosowanie numerycznego rachunku "operatorów liczbowych" do syntazy układów autonomicznej regulacji /rozdz.4.3./, oraz podaje nowy sposób przejścia z charakterystyki chwilowej na charakterystykę amplitudowo-fazową /rozdz.5./, będący kontynuacją aproksymacji charakterystyki chwilowej przez linię prostą, stosowanej w rozdz.4.1.

Rozdział 4.1. jest poprzedzony rozdziałem 4.2, stanowiącym omówienie i dyskusję przyjętej metody rachunkowej.

4.2. Omówienie i dyskusja metody rachunkowej.

4.2.1. Zasady ogólne metody.

W dalszej części pracy będą korzystał z metody obliczania układów dynamicznych, opartej o przybliżenie funkcji czasu ciągami liczbowymi - na podstawie prac Turinga [8] i Bellarta [9]. Poniżej, dla systematyczności, przedstawiam ogólne zasady tej metody rachunkowej, dyskutując je w niektórych punktach. Szczegółowe omówienie zasadniczo znaczenia oraz omówienie zagadnienia dokładności, podane w rozdz. 4.2.8.

Najprostszą i najbardziej wygodną formą przybliżenia funkcji czasu przez pewien ciąg liczbowy jest przyjęcie wprost pewnych funkcji  $f(t)$ , w pewnych odstępach  $\delta$ , jako wyrazów ciągu liczbowego  $F$ :

$F = f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$  ..... 31

Przy pomocy podobnego ciągu liczbowego można również przedstawić przesustawę jakiegokolwiek układu, analogicznie jak w rachunku operatorowym; niestety, jeśli funkcje wyjściowe wyraża się ciągiem

$W = w_0, w_1, w_2, w_3, \dots$  ..... 32

a funkcje wejściowe - ciągiem

$R = r_0, r_1, r_2, r_3, \dots$  ..... 33

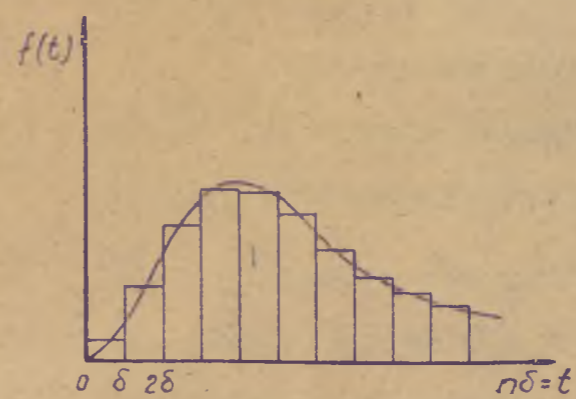
to można znaleźć ciąg  $A$ , który będzie odpowiadał ilorazowi ciągów  $R$  i  $W$  /przy odpowiednim zdefiniowaniu prawa mnożenia ciągów liczbowych/

$A = \frac{R}{W}$  ..... 34

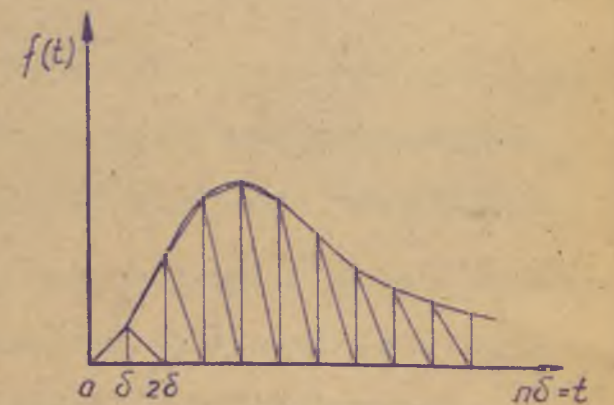
Można uważać, że każdy wyraz ciągu nr.  $n$  odpowiada wybranej jednostce elementarnej, pomnożonej przez pewien współczynnik, odpowiadający nr. wysokości danej funkcji

$f(t)$ . Cały ciąg  $W$  jest zbiorem tych jednostek elementarnych, pojawiających się w chwilach  $t = 0, t = \delta, 2\delta, 3\delta$  i t.d. Jest rzeczą istotną dla dokładności i wygody operowania metodą, jakiego kształtu funkcje czasu przyjmujemy za jednostkę elementarną. Może to być bowiem impuls o kształcie prostokątnym i o wysokości  $w_n$ , jak to stosuje Bellent [9], lub też element trójkątny o wysokości  $w_n$  i szerokości podstawy  $2\delta$ , zalecany przez Eustins [10]

Przyjęcie prostokątnej jednostki elementarnej równa się "gorszej" aproksymacji krzywych  $f(t)$ , zazwyczaj spotykanych w praktyce /przy tym samym odstępnie  $\delta$ / patrz rys.4 i rys.5.



Rys. 4



Rys. 5

2 | Opuszczenie elementów trójkątne nie pozwala natomiast aproksymować krzywych, mających punkty nieciągłości - nie można więc, na przykład, wyznaczyć przy pomocy elementów trójkątnych funkcji skoku jednostkowego.

Elementy trójkątne, zwane dalej "elementami  $\Delta$ " wyróżniają się jednak mimo to być znacznie praktyczniejsze.

Trudność aproksymacji funkcji jednostkowej daje się - jak to będzie dalej pokazane - ominąć w pewien sposób

umowny, w zupełności wystarczający do celów praktycznych.

Możliwe jest przyjęcie i innych jednostek elementarnych - rezygnując z tego, by wyrazy ciągu liczbowego odpowiadały bezpośrednio rzędnym funkcji czasu. Tustin [3] wspomina o wyrażeniu funkcji czasu przy pomocy elementarnych skoków jednostkowych, pojawiających się w chwilach  $0, \delta, 2\delta, 3\delta$  i t.d. /co jest równoważnościowe z aproksymacją przez impulsy prostokątne/, dalej - przy pomocy nachyleń linii kątowej /co odpowiada pod względem jakości aproksymacji elementem  $\Delta$ /, zwłaszcza - o użyciu do celów specjalnych, dla problemów mających tendencje oscylacyjne przy wyważeniu o zwykłym kształcie  $\Delta$ , jednostek o postaci  $1 - e^{-t/T}$  /lub o kształcie "dużych  $\Delta$ " /np. 1, 2, 3, 4, 5/.

Wybór podobnych jednostek może okazać się istotny dla ułatwienia rachunków w niektórych przypadkach.

4.2.2. Aproksymacja funkcji czasu ciągiem elementów  $\Delta$ .

Funkcję czasu  $f(t)$  zastępujemy ciągiem elementów  $\Delta$ , zaczynających się w chwilach  $0, \delta, 2\delta, 3\delta$  i t.d., zapisując to w postaci pewnego ciągu liczbowego

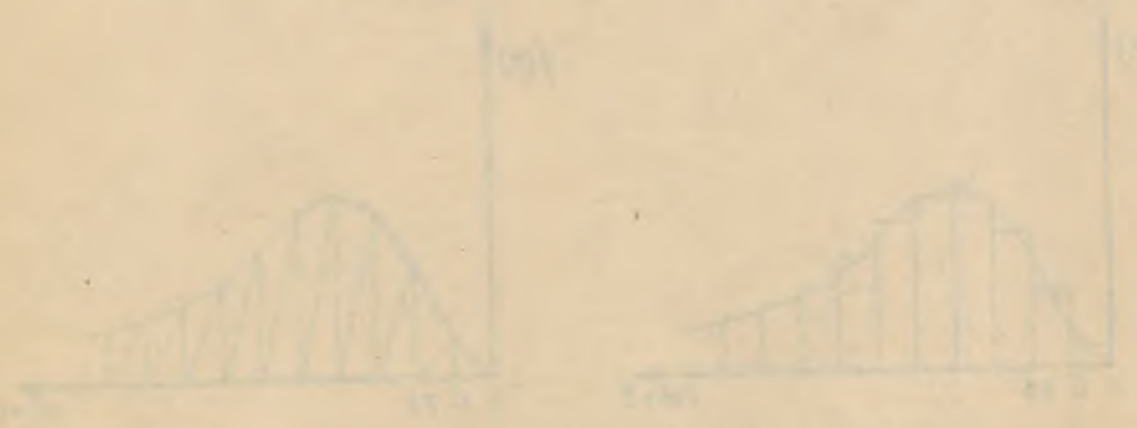
$$F = f_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \dots \dots \dots 35$$

w którym kolejne wyrazy odpowiadają wysokościami elementów  $\Delta$ , a te z kolei wysokości - rzędnym funkcji czasu dla chwil  $\delta, 2\delta, 3\delta \dots$  i t.d. Ciąg elementów  $\Delta$  daje kłusną, zwykle bardzo zbliżoną do kształtu funkcji aproksymowanej.

Na przykład, funkcję czasu  $f(t)$  przedstawioną na rys. 6 a zastępuje się ciągiem liczbowym

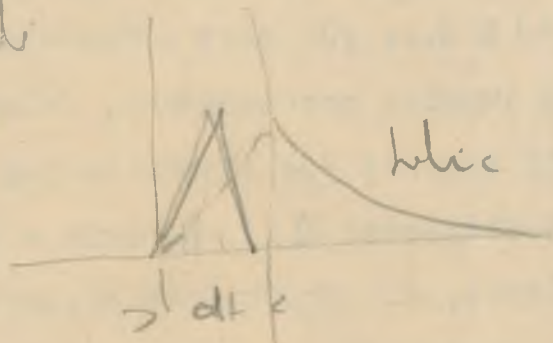
$$F = f_0 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \dots = 1.0, 2.0, 2.7, 2.8, 2.7, 2.0, 1.2, 0.9, \dots \dots \dots 36$$

odpowiadającym podzielnym funkcji  $f(t)$  na elementy  $\Delta$ , jak na rys. 6 b.



Co to jest wprowadzenie w  $\Delta$

Teraz



licze

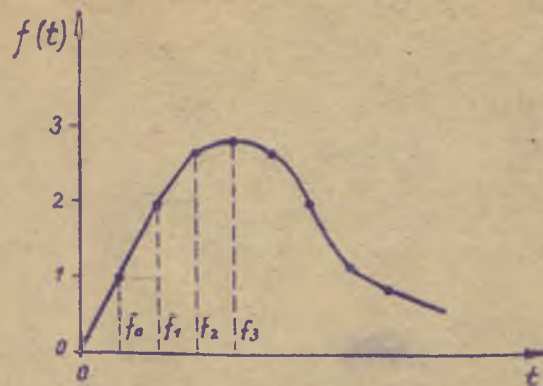
SOC



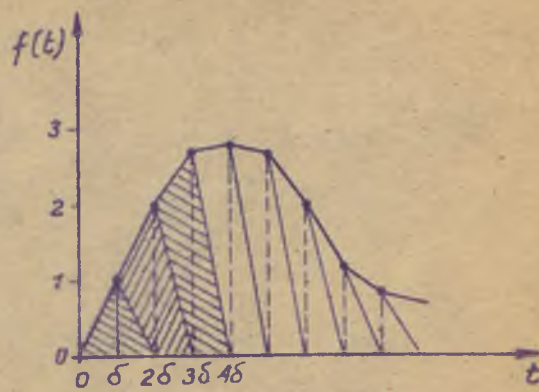
wyprowadzenie bdy he  
buck + wie wazn - h

$$R_{\Delta} \cdot g(t)$$

wprowadzenie do w spow w wazn



Rys. 6a



Rys. 6b

Ciągiem elementów  $\Delta$  można zastąpić tylko takie funkcje czasu, które nie mają punktów nieciągłości; w szczególności, można zastosować tę aproksymację tylko do funkcji, dla których  $f(0) = 0$  - gdyż pierwszą rzędą, jaką można zapisać w ciągu elementów  $\Delta$ , jest rzędą  $f_0$  /por. rys. 6 a./

Ciąg liczbowy można pomnożyć przez dowolną liczbę rzeczywistą, otrzymując nowy ciąg, podobny kształtem do poprzedniego - odpowiada to pomnożeniu funkcji przez stałą.

4.2.3. Tworzenie własności układu przy pomocy ciągu liczbowego.

Jeśli znana jest dla jakiegoś układu odpowiedź jego na pojedynczy element  $\Delta$ , zachodzący się w dowolnej chwili  $0, \delta, 2\delta$  i t.d., to oczywiście będziemy mieli jako odpowiedź układu na ciąg wymuszający W:

$$R_w = \sum_w R_{\Delta} \dots 37$$

gdzie  $R_w$  - odpowiedź na ciąg W  
 $R_{\Delta}$  - odpowiedź na pojedynczy element  $\Delta$ , zachodzący w skład ciągu W.

Jeżeli teraz odpowiedź na element  $\Delta$  o jednost-



nie możemy mieć w wyniku  
 $a \sigma$  pewien ciąg liczbowy

choć us by wynikał z poprzednich  
 a w tym celu należy zwrócić uwagę  
 dając  $\Delta g(u)$  i wtedy musimy być  
 w stanie  $R_{\Delta 1}$  at wyznaczyć pierwszy

Praca ta ca



Kowej wysokości, zeschynający się w chwili 0, równa jest  
 $A/A$  - pewien ciąg liczbowy/, to oczywiście

$$R_{\Delta 0} = w_0 \cdot A$$

$$R_{\Delta 1} = w_1 \cdot A$$

z tym, że  $R_{\Delta 1}$  zeschyna się od wyrazu drugiego, przez  
 pierwszy = 0,

$$R_{\Delta 2} = w_2 \cdot A$$

przy czym  $R_{\Delta 2}$  zeschyna się od wyrazu trzeciego, i t.d.

Stąd /37/ można teraz napisać w postaci tablicy, w  
 której uwzględniono, że  $A = a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

$w_0 a_0$	$w_0 a_1$	$w_0 a_2$	$w_0 a_3$	.....
0	$w_1 a_0$	$w_1 a_1$	$w_1 a_2$	.....
0	0	$w_2 a_0$	$w_2 a_1$	.....
0	0	0	$w_3 a_0$	.....
.....	.....	.....	.....	.....



$$R_w = w_0 a_0, (w_0 a_1 + w_1 a_0), (w_0 a_2 + w_1 a_1 + w_2 a_0), \dots \dots \dots 38$$

Operację przedstawioną powyżej zdefiniowano [8],  
 [9] jako "mnożenie" ciągu  $w$  przez ciąg  $a$ :

$$R_w = A W \dots \dots \dots 39$$

"Wykonywanie operacji "mnożenia" jest bardzo pro-  
 ste i podobne do mnożenia liczb wielocifrowych, na co  
 wskazują wyraźnie tablice i wzór /38/

x/ Należy tu zrobić następującą uwagę. W matematyce znane są  
 działania mnożenia i dzielenia ciągów, odmiennie zdefiniowa-  
 ne. Stąd też możemy albo pisać "mnożenie" w cudzysłowie, al-  
 bo też inaczej nazwać nasze ciągi - np. nazwać je operatora-  
 mi liczbowymi - i mówić o mnożeniu i dzieleniu operatorów  
 liczbowych. Nazwę operator liczbowy wprowadził Bellart [9] i  
 będą jej używał w dalszej części pracy, zastępując przyjauc  
 inny "model fizyczny" dla prostego operatora 1,0,0 ...

Operację odwrotną do "mnożenia" nazywamy się "dzielaniem", np. operatora  $R_W$  przez operator  $W$ :

$$\frac{R_W}{W} = A \quad \dots\dots 40$$

Operator liczbowy  $A$ , który wyraża własności układu, a fizycznie jest odpowiedzią układu na jednostkę  $\Delta$ , nazywamy - analogicznie do nazwy przyjętej w metodach operatorowych - przeurozumiem układu.

Operator liczbowy  $A$  nie zależy /na co wskazał Justia [8]/ - od wyboru jednostek elementarnych, którymi zastąpiono funkcję czasu  $r/t/$  i  $r'/t/$  i odpowiada odpowiedzi układu na wyznaczenie w maszynie przyjętej jednostki. Jeżeli bowiem np.  $W$  jest operatorem liczbowym zastępującym funkcję  $w/t/$  przy jednej jednostce elementarnej, to  $\frac{R}{U}$  jest operatorem liczbowym przy nowej jednostce elementarnej, takiej, że stosunek jednej jednostki elementarnej do drugiej wynosi  $U$ .

Zatem, mając nowe operatory liczbowe  $\frac{R}{U}$  i  $\frac{R}{W}$ , możemy napisać

$$A = \frac{\frac{R}{U}}{\frac{R}{W}} = \frac{R}{W} \quad \dots\dots 41$$

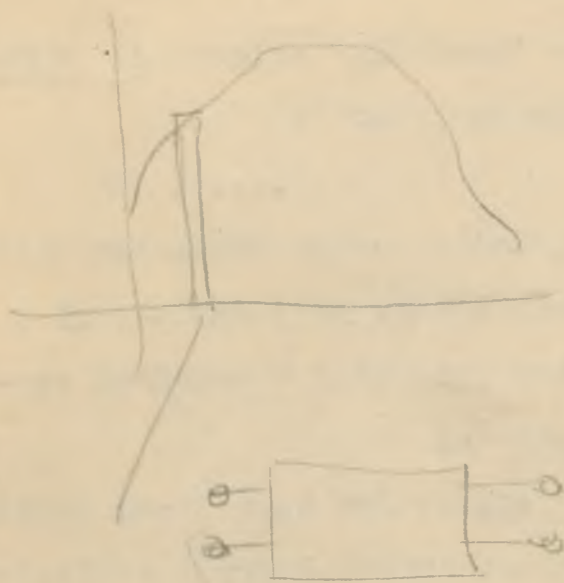
jak poprzednio.

Ta niezależność jest jednak tylko o tyle prawdziwa, o ile stosunek  $U$  da się wyrazić operatorem liczbowym bez wprowadzania dodatkowej aproksymacji, lub też przy zachowaniu określonej umowy co do takiej aproksymacji - np. przejście z jednostek "impuls prostokątny" na jednostki "skok jednostkowy" nie narusza ni niezależności  $A$  od wyboru jednostki.

4.2.3. Analogia do zwykłego rachunku operatorowego.

Związek  $A = \frac{R}{W}$ , albo inaczej

$$R = AW$$



$$\underline{g'(s)} \quad \mathcal{U}(p)$$

$$U_2(s) \equiv p \mathcal{U}_1(p) K(s)$$

$$U_2(s) = U_1(s) (p K(s)) \equiv K'(s)$$

4



$$f'(s) \equiv p f(s) - p f(0)$$

jest analogiczny do zależności, jakie występują np. w formach rachunku operatorowego, - w którym wchodzi się, jak wiadomo, algebraizację równań różniczkowych. Rachunek operacyjny na operatorach liczbowych można zatem nazwać rachunkiem operatorowym, w którym formami operatorowymi dla funkcji czasu i dla własności układów są ciągi /operatory/ liczbowe, a działania algebraiczne /mnożenie, dzielenie i dodawanie/ są specjalnie zdefiniowane.

W szczególności, operator liczbowy  $A$  wyrażający własności układu, wyraża jednocześnie odpowiedź układu na jednostkowe wywołanie  $W = 1, 0, 0, \dots = 1$ .

Jest to pełna analogia do rachunku operatorowego, opartego o przekształcenie Laplace'a, w którym przekształcenia odwrotne wielkości  $K(s)$ , wyrażające własności układu, jest obrazem odpowiedzi tego układu na impuls jednostkowy.

Różnica polega, tu jednak na tym, że w przypadku rachunku operatorów liczbowych operator liczbowy  $A$ , na którym prowadzi się działania jak na postaci operatorowej, jest izomorficzny z kolejnymi rzędnymi odpowiedzi jednostkowej układu.

Istnieje też analogia między mnożeniem operatorów liczbowych, a splotem funkcji; i tak, ze związku dla układu przekształcającego

$$R = AW$$

otrzymujemy analogię do wzoru

$$r(t) = \int_0^t \alpha(\tau) w(t-\tau) d\tau \quad \dots\dots 42$$

gdzie  $\delta(\tau)$  - odpowiedź impulsowa układu, gdyż dla  $n$ -tego wyrazu ciągu  $R$  otrzymujemy wzór

$$r_n = \sum_{k=0}^{k=n} \alpha_k w_{n-k} \quad \dots\dots 43$$

4.2.5. Układy złożone z kilku członów.

Z tego, co było wyżej powiedziane, wynika, że dla różnych połączeń członów przekazujących, których własności są wyrażone przy pomocy operatorów liczbowych B, C, ... obowiązują te same zależności, co przy rachunku operatorowym, lub rachunku symbolicznym. I tak:

Dla połączenia szeregowego /łańcuchowego/

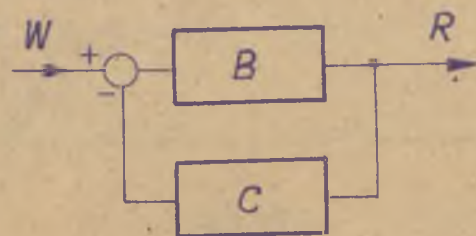
$$A = B \cdot C \cdot D \cdot \dots \dots \dots 44$$

Dla połączenia równoległego

$$A = B + C + D + \dots \dots \dots 45$$

I dla połączenia równoległo-przeciwnego /układ ze sprzężeniem zwrotnym/ - rys.7

$$A = \frac{B}{1+BC} \dots \dots \dots 46$$



Rys. 7

4.2.6. Operator różniczkowania i całkowania.

a/ Operator różniczkowania p.

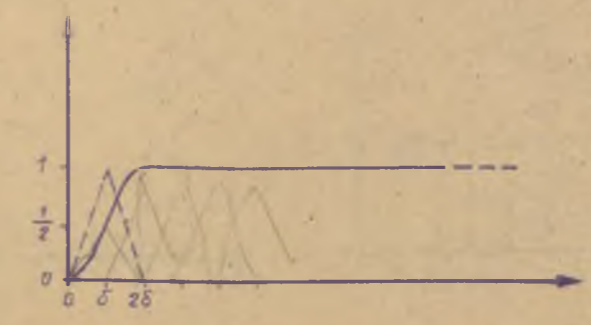
Aby można było korzystać - w jednym obliczeniu - z danych doświadczalnych i analitycznych, potrzebne jest znalezienie przejścia z form analitycznych na operatory liczbowe.

Jeśli chodzi o przypadki, w których forma analityczna opisuje własności jakiegoś układu, np.  $K/s = \frac{K_1}{1+sT_2}$  i t.p., to istotnym jest znalezienie odpowiednika dla

operatora różniczkowania, oraz dla jego odwrotności - operatora całkowania. Odpowiedniki takie wskazał Tustin [8].  
 Oznaczmy operator różniczkowania przez  $\frac{d}{dt}$ , /poostawiając a dla ualeonnej szerepłonej w prakszatekioniu Laplace'a/.  
 Operator liczbowy, który odpowiada operatorowi  $\frac{1}{p}$ , musi być oczywiście zapisany w postaci ciągu liczbowego tej funkcji, która jest całką z elementu  $\Delta$  o jednostkowej wysokości.

Nie trudno stwierdzić /rys. 8/, że operator  $\frac{1}{p}$  wyraża się ciągiem

$$\frac{1}{p} = (\frac{1}{2}, 1, 1, 1, \dots) \delta \quad \dots\dots 47$$



Rys. 8

Oczywiście otrzymany od razu

$$p = (\frac{1}{p})^{-1} = \frac{1}{(\frac{1}{2}, 1, 1, 1, \dots) \delta} = \frac{2}{\delta} \frac{(1, -1)}{(1, 1)} = \frac{2}{\delta} (1, -2, 2, -2, \dots) \quad \dots\dots 48$$

Operator liczbowy wyrażający operator  $p$  nie odpowiada swym kształtem funkcji, która jest pochodną elementu  $\Delta$ . Jest tak dlatego, że funkcja ta jest nieciągła, i zatem z zasady nie może być aproksymowana elementami trójkątnymi /patrz jeszcze niżej/.

Ważne jest to, że dzięki wybraniu jako jednostki elementu  $\Delta$ , odpowiednik operatora  $p$  i  $\frac{1}{p}$  w sensie - dla chwil  $\delta, 2\delta$  i t.d. - nie jest obarczony błędem i błąd ten

Wniosek, dla p

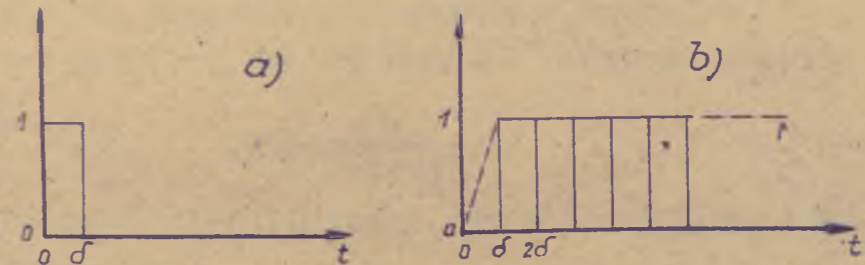
2

|||||

nie pojawia się również przy kilkukrotnym całkowaniu, t.j. przy mnożeniu przez  $\frac{1}{p^2}$ ,  $\frac{1}{p^3}$  i t.d.; także operatory  $p^2$ ,  $p^3$  i t.d. dają wyniki prawidłowe, jeżeli rzeczywiste pochodna funkcji nie są nieciągłe.

Przeciwnie, przy aproksymacji prostokątnymi elementami, np. impulsami prostokątnymi, mnożenie przez operator całkowania  $\frac{1}{p}$  daje się przeprowadzić bez błędów tylko jednokrotnie - pochodzi to stąd, że wysokości impulsów prostokątnych nie zawsze odpowiadają funkcji aproksymowanej.

Jeżeli bowiem wyobrazimy sobie jednostkowy impuls prostokątny /rys. 9a/, to jego całka względem czasu

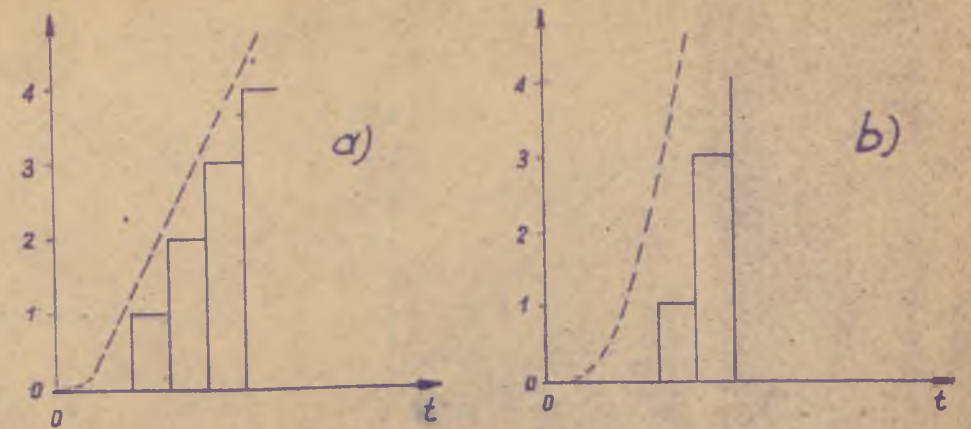


Rys. 9

wyrazić się musi ciągiem 0, 1, 1, 1, 1, ...., co odpowiada rysunkowi 9b, i jest zadowalająco ściśle z dokładnością do chwil  $\delta$ ,  $2\delta$  i t.d. Ciąg 0, 1, 1, 1, ... odpowiada zatem operatorowi całkowania  $\frac{1}{p}$ , gdyż impuls na rys. 9a jest przyjętą jednostką.

Powtórzenie operacji całkowania, czyli powtórne pomnożenia przez  $\frac{1}{p}$ , daje wynik 0, 0, 1, 2, 3, 4, .... co jest przedstawione na rys. 10a. Rzeczywisty przebieg tej funkcji jest podany linią przerywaną. Widać, że dwukrotne pomnożenie przez  $\frac{1}{p}$  daje wynik z niedomiarom;

Rys. 10



trzęcie całkowanie daje rezultat jak na rys. 10b, z niedomiarem zwiększonym. Błędowi temu nie można zaradzić, conajwyżej przez wprowadzenie drugiego operatora  $\frac{1}{p} = 1, 1, 1, \dots$ , dającego wyniki kilkukrotnych całkowań z niedmiarem, z następującą każdorazową interpolacją.

Podstawienie operatora  $p = \frac{2}{\delta} \frac{(1,-1)}{(1,1)}$  w dowolną formę operatorową, w której  $p$  zastąpiło  $\frac{1}{\delta t}$ , daje bezpośrednio przejście do rachunku operatorów liczbowych.

Na przykład, jeśli mamy dla jakiegoś układu [8],

$$K(p) = \frac{1}{1+pT} \dots\dots 49$$

to odpowiedni ciąg liczbowy, wyrażający własności tego układu, otrzymamy jako

$$A = \frac{1}{1 + \frac{2T}{\delta} \frac{(1,-1)}{(1,1)}} = \frac{(1,1)}{(1,1) + \frac{2T}{\delta} (1,-1)} = \frac{(1,1)}{[(1 + \frac{2T}{\delta}), (1 - \frac{2T}{\delta})]} \dots\dots 50$$

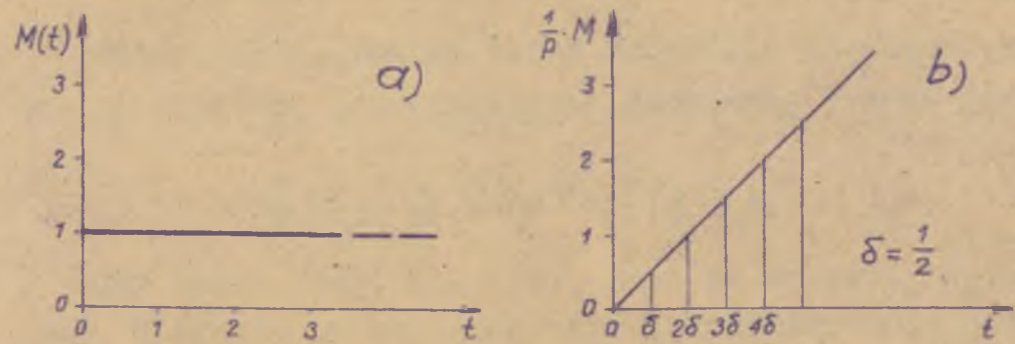
b/ Wyrażenie umowne funkcji skoku jednostkowego

Jest rzeczą oczywistą, że funkcja skoku jednostkowego nie może być aproksymowana elementami trójkątnymi. Możliwe jest jednak znalezienie ciągu elementów  $\Delta$ , który przy operacjach na nim będzie dawał takie same wyniki, jakie są otrzymywane przy analogicznych operacjach na funkcji skoku jednostkowego, [9].

Oznaczmy szukany operator liczbowy przez  $M$  i oprzyjmy się na operacji całkowania.

Całka funkcji skoku jednostkowego jest - jak wiadomo - funkcją o postaci  $f/t = t$ ; funkcję tę zapiszemy ciągiem liczbowym /rys. 11a i b/:

$$F = \delta(1, 2, 3, 4, \dots) \dots\dots 51$$



Rys. 11

Musi przy tym być słuszny wzór

$$F = \frac{1}{p} \cdot M \quad \dots\dots 52$$

czyli

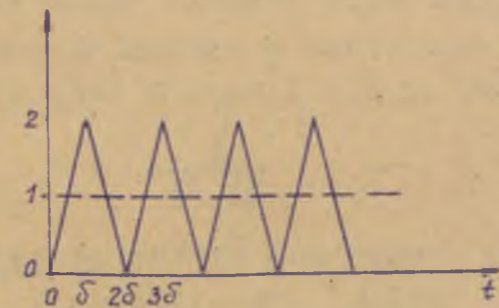
$$M = p \cdot F \quad \dots\dots 53$$

jeśli ciąg M ma reprezentować funkcję skoku jednostkowego.

Podstawiając wartość p i F do (53), otrzymujemy

$$M = \frac{2}{\delta} \frac{(1,-1)}{(1,1)} \cdot \delta(1,2,3,4,\dots) = 2,0,2,0,\dots = \frac{2}{(1,0,-1)} \quad \dots\dots 54$$

Operator M /rys. 12/ jest też graficznie niejako najlepszą aproksymacją funkcji skoku jednostkowego.



Rys. 12

Posiadaenie odpowiednika dla funkcji skoku jednostkowego pozwala na znajdowanie odpowiedzi układów na skok jednostkowy, oraz np. na znalezienie wykresów funkcji nieciągłych, dla których ciąg elementów  $\Delta$  ma charakter abstrakcyjny; wielkość M określa bowiem stosunek jednostki  $\Delta$  do jednostki "skok jednostkowy" :

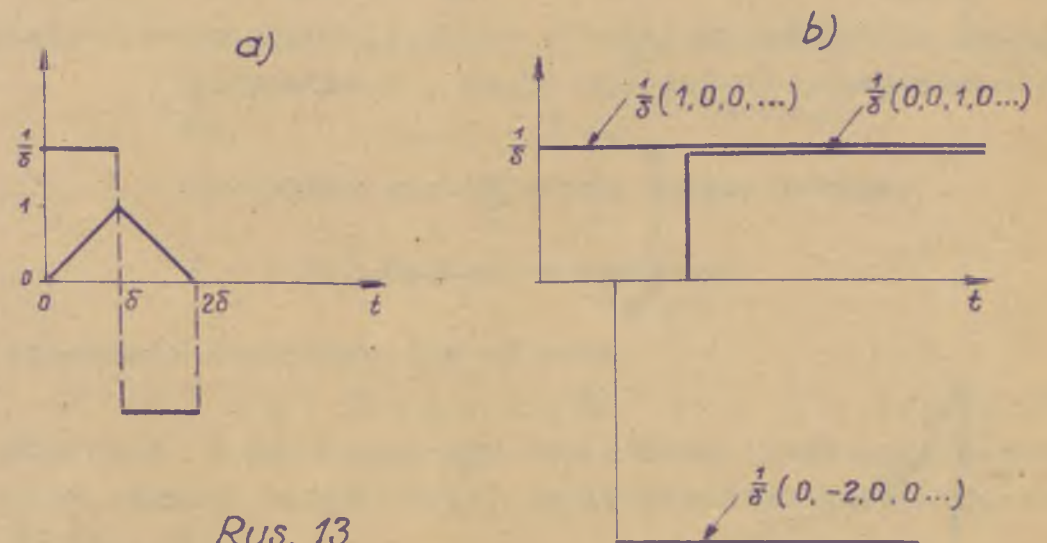


ciąg jednostek  
M = ciąg jednostek "skok jednostk."  
..... 55

Na przykład, możemy teraz sprawdzić słuszność wyrażenia na operator p, przechodząc na jednostkę "skok jednostkowy".

$$\frac{p}{M} = \frac{2}{\delta} \frac{(1,-1)}{(1,1)} \cdot \frac{(1,0,-1)}{2} = \frac{1}{\delta} (1,-2,1) \quad \dots\dots 56$$

Jak widać /rys. 13a i b/, jest to właśnie kształt pochodnej elementu Δ względem czasu, wyrażony przy pomocy trzech skoków jednostkowych, znoszących się dla t > 2δ



Rys. 13

Podobnie można znaleźć odpowiedni ciąg elementów Δ, reprezentujący jednostkę o kształcie impulsu prostokątnego, o której była mowa w rozdz. 4.2.1. Będzie to

$$N = \frac{2}{(1,1)} \quad \dots\dots 57$$

c/ Znaleźnienie operatora liczbowego dla funkcji wyrażonej w formie przekształcenia Laplace'a.

Powstaje problem, czy podstawienie p wg wzoru 48 da się zastosować dla przejścia od operatorowego wyrażenia funkcji czasu na odpowiadające tym funkcjom operatory liczbowe. Dłoby to m.inn. sposób przybliżonego znaleźnienie przekształcenia odwrotnego w formie wykresu funkcji czasu.

Łatwo można stwierdzić, że samo podstawienie p wg wzoru 48 postawionego zadania nie spełnia. Wynika to stąd, że

$p h(t) \hat{=} \frac{d}{dt} [h(t)]$  Dyktor  
prz. odwrotny  
 $h(0) = 0$

prz. odwrotny  
 $p f(t) \hat{=} f'(t)$

zeich:  $f(0) = 0$



$g(t) = \frac{g(t) - g(t - \Delta)}{\Delta}$

- jak było mówione wyżej - podstawienie  $p$  do formy operatorowej zwykłej daje operator liczbowy odpowiadający odpowiedzi układu na element  $\Delta$ , podczas gdy normalne przekształcenie odwrotne daje odpowiedź na impuls jednostkowy, mający kształt funkcji Dirac'a.

Wiemy jednak, że odpowiedź układu na skok jednostkowy określa zarazem odpowiedź impulsową:

$$k(t) = \frac{d}{dt} [h(t)] \quad \dots\dots 58$$

Możemy łatwo znaleźć i wyrezić odpowiedź jednostkową w formie operatora liczbowego ze wzoru

$$H = A \cdot M \quad \dots\dots 59$$

gdzie  $A$  - operator liczbowy wyrażający odpowiedź układu na jednostkę  $\Delta$ , czyli wyrażający przepustowość układu,

$M$  - wyrażenie umowne skoku jednostkowego,

$$M = 2,0,2,0,2 \dots = \frac{2}{1,0,-1}$$

Oczywiście otrzymamy też od rezu

$$K = p \cdot H = p \cdot A \cdot M \quad \dots\dots 60$$

przy czym  $K$  jest szukanym operatorem liczbowym, odpowiadającym funkcji czasu  $k/t$ , czyli przekształceniu odwrotnemu  $L^{-1} [K/s/]$ .

Ponieważ mamy, przez proste podstawienie  $s=p = \frac{2}{\delta} \frac{1,-1}{1,1}$  wielkość  $A$ :

$$A = K/p, \quad \dots\dots 61$$

otrzymujemy związek ostateczny

$$K = p \cdot M \cdot K(p) = \frac{4}{\delta} \frac{(1,-1)}{(1,1,-1,-1)} \cdot K(p) \quad \dots\dots 62$$

Związek ten jest oczywiście słuszny tylko wtedy, gdy funkcja  $k/t$  daje się aproksymować trójkątami, tj. gdy nie ma ona punktów nieciągłości.

Związek 62, wyprowadzony przed chwilą, można stosować do "znalezienia" przekształcenia odwrotnego, tj. wyrażenia go w postaci operatora liczbowego, dla dowolnego wyrażenia operatorowego wymiernego - z zastrzeżeniem, że funkcja  $f/t = L^{-1} [F/s/]$  daje się aproksymować elementami  $\Delta$ .

Może to mieć znaczenie w takich przypadkach praktycznych, gdy część układu regulacji jest opisana w formie anali-

oryginalne

tycznej i wygodniej jest traktować ją analitycznie, a inna część jest znana tylko z doświadczenia, czyli w postaci operatora liczbowego:

Dla wyrażenia operatorowego niewymiernego o postaci  $e^{-\lambda s}$  np.

$$F/s/ = F_1/s/e^{-\lambda s}, \dots\dots 63$$

któremu jak wiadomo, odpowiada funkcja czasu

$$f/t/ = f_1 /t - \lambda/ \dots\dots 64$$

znajdujemy, że odpowiedni operator liczbowy

$$F = F_1 \cdot 0,0,0, \dots 1,0, \dots \dots\dots 65$$

gdzie przesunięcie wyrazów ciągu F względem  $F_1$  /ilość zer przed jedynką w czynniku po prawej stronie równania 29/ jest równe  $\frac{\lambda}{\delta}$ ; [8]. Należy przy tym tak dobrać  $\delta$ , by  $\frac{\lambda}{\delta}$  było liczbą całkowitą.

Ciąg liczbowy typu 0,1,0,0 ... oznaczmy przez q i nazwiemy operatorem opóźnienia a przesunięcia

$$q = 0,1,0,0 \dots \dots\dots 66$$

$$q^2 = 0,0,1,0 \dots \dots\dots$$

$$q^{\lambda/\delta} = 0,0 \dots 1,0,0 \dots \dots\dots 67$$

Możemy zatem, w praktycznie najczęściej spotykanych przypadkach, gdy mamy wyrażenia operatorowe wymierne lub zawierające czynnik  $e^{-\lambda s}$ , przechodzić wprost na operatory liczbowe, przy czym :

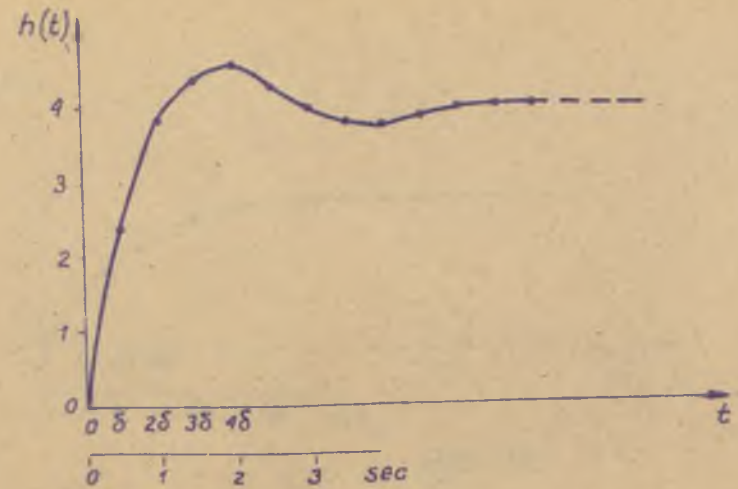
- 1/ Jeśli postawimy w wyrażeniu operatorowym  $p = \frac{z}{s} \frac{1,-1}{1,1}$  zamiast s, oraz  $q = 0,0, \dots 1,0,0 \dots$  zamiast  $e^{-\lambda s}$ , to otrzymamy operator liczbowy, który - jeżeli dane wyrażenie operatorowe wyrażało własności jakiegoś układu - ma sens fizyczny i wyraża odpowiedź tego układu na jednostkę  $\Delta$ .
- 2/ Jeśli postawimy w wyrażeniu operatorowym p oraz q jak poprzednio, oraz dodatkowo pomnożymy otrzymany operator liczbowy przez operator M . p, to otrzymamy ciąg liczbowy, który odpowiada przekształceniu odwrotnemu wg Laplace'a danego wyrażenia operatorowego.

4.2.7 Przykłady.

a/ Przykłady.

Rozpatrzmy następujący przykład. Odpowiedź jednostkowa pewnego układu ma kształt jak na rys. 14. Należy znaleźć

odpowieź tego układu na wymuszenie o kształcie jak na rys. 15.



Rys. 14

Obieramy następującą drogę postępowania. Najpierw obliczymy przepustowość układu A /może ona posłużyć do obliczenia odpowiedzi tego układu na dowolne wymuszenie/, a następnie znajdziemy odpowiedź na pytanie postawione w warunkach zadania.

Przyjmijemy  $\delta = 0.5$  sek.; wówczas operator  $M$  wyrażający odpowiedź układu na skok jednostkowy jest równy

$$H = 2.4, 3.9, 4.4, 4.6, 4.3, 4.0, 3.8, 3.8, 3.9, 4.0, 4.0, \dots$$

..... 68

Przepustowość układu A wyniesie

$$A = \frac{H}{M} = \frac{1, 0, -1}{2} \cdot H = 1.2, 1.95, 1.0, 0.35, -0.05, -0.3, -0.25, -0.1, 0.05, 0.1, 0.05, 0.0 \dots$$

..... 69

przy czym sam przebieg mnożenia jest podany poniżej :

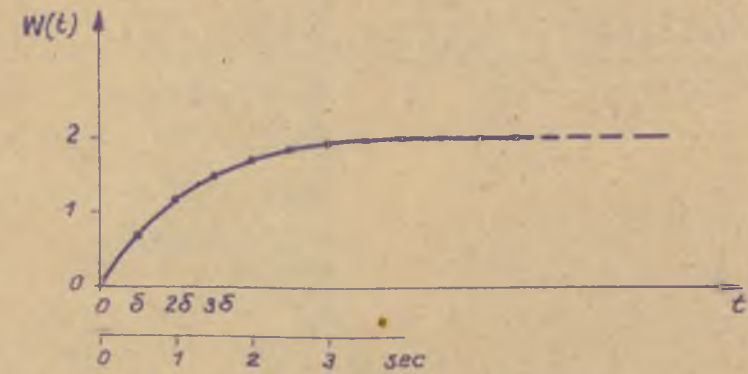
$$\begin{array}{r} 2.4, 3.9, 4.4, 4.6, 4.3, 4.0, 3.8, 3.8, 3.9, 4.0, 4.0, \times \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \\ \hline 1.2, 1.95, 2.2, 2.3, 2.15, 2.0, 1.9, 1.9, 1.95, 2.0, 2.0, 2.0 \dots \\ -1.2, -1.95, -2.2, -2.3, -2.15, -2.0, -1.9, -1.9, -1.95, -2.0 \dots \\ \hline 1.2, 1.95, 1.0, 0.35, -0.05, -0.3, -0.25, -0.1, 0.05, 0.1, 0.05, 0.0 \dots \end{array}$$

Z kolei piszemy operator liczbowy dla funkcji wymuszającej W wg rys.15. Jest to

$$W = 0.72, 1.20, 1.50, 1.72, 1.88, 1.96, 1.98, 2.0, 2.0 \dots$$

..... 70

Odpowiedź układu na wymuszenia  $W$  wyniesie oczywiście.

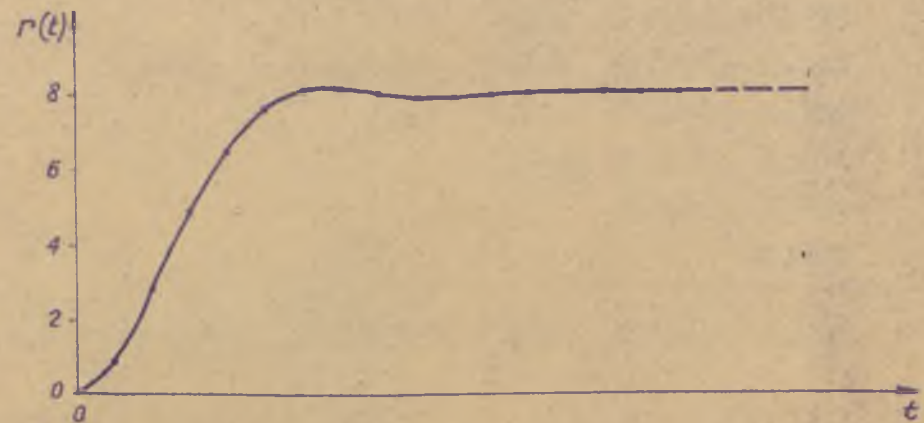


Rys. 15

$R = A \cdot W = 0.86, 2.84, 4.86, 6.44, 7.49, 7.99, 8.07, 7.97, 7.90, 7.88, 7.90, 7.92, 7.94, 7.97, 7.99, 8.00, 8.00 \dots \dots \dots 71$

przy czym mnożenie podane jest w tabelicy 1.

Otrzymana funkcja  $r/t/$ , odpowiadająca ciągowi  $R$ , przedstawiona jest na rys. 16.



Rys. 16

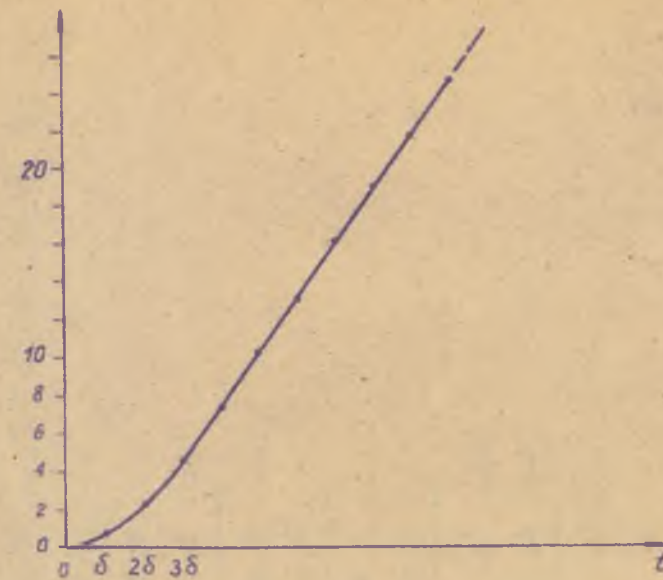
Rozpatrzmy następujący drugi przykład. Odpowiedź  $r/t/$  pewnego układu na funkcję wymuszającą  $f/t/ = t$  ma kształt jak na rys. 17. Należy określić przepustowość tego układu /wyrażoną przy pomocy operatora liczbowego/ oraz odpowiedź układu na skok jednostkowy.

Zapisujemy odpowiedź  $r/t/$  przy pomocy operatora liczbowego

$R = 0.6, 2.1, 4.4, 7.2, 10.1, 13.0, 15.9, 18.8, 21.7, 24.6 \dots \dots$

..... 72





Rys. 17

Oczywiście funkcja wymuszająca wyraża się, przy przyjęciu  $\delta = 1$ , operatorem

$$W = 1, 2, 3, 4, 5 \dots \dots \dots 73$$

Przepustowość otrzymamy dzieląc operator R przez operator W:

$$A = \frac{R}{W} = 0.6, 0.9, 0.8, 0.5, 0.1 \dots \dots \dots 74$$

Działanie dzielenia zapisane jest w tabelicy 2.

Odpowiedź układu na skok jednostkowy znajdziemy mnożąc operator A przez operator M, czyli dzieląc przez operator  $\frac{1}{M}$ :

$$H = AM = A \cdot \frac{2}{1, 0, -1} = 1.2, 1.8, 2.8, 2.8, 3.0, 2.8, 3.0, 2.8, 3.0 \dots \dots \dots 75$$

Działanie dzielenia zapisane jest poniżej:

$$\begin{array}{r} 0.6, 0.9, 1.4, 1.4, 1.5, 1.4, 1.5, 1.4, \dots \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.6, 0.9, 0.8, 0.5, 0.1, 0.0, 0.0, 0.0 : 1, 0, -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.6, 0.0, -0.6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.9, 1.4, 0.5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.9, 0.0, -0.9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.4, 1.4, 0.1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.4, 0.0, -1.4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.4, 1.5, 0.0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.4, 0.0, -1.4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.5, 1.4, 0.0 \\ \hline \end{array}$$

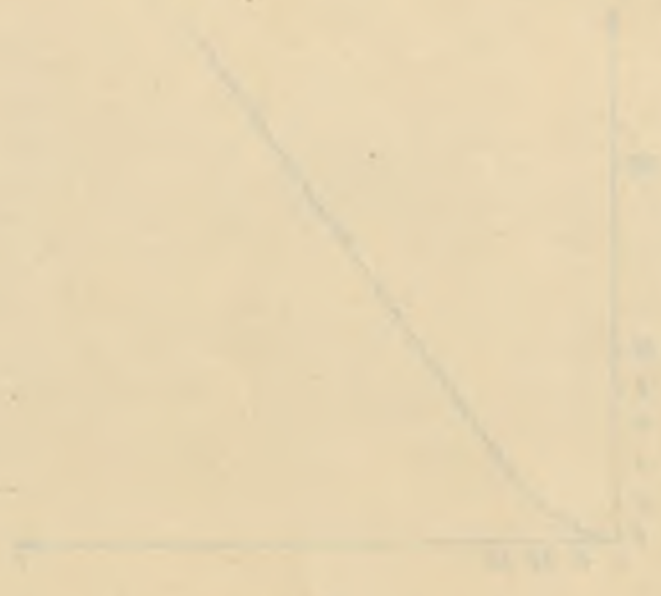
$$\begin{array}{r} 1.5, 0.0, -1.5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.4, 1.5, 0.0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.4, 0.0, -1.4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1.5, 1.4, 0.0 \\ \hline \end{array}$$

...



Tablica 2

Dzielenie  $\frac{R}{W}$  do przykłada no str. 33

0.6,	0.9,	0.8,	0.5,	0.1,	0.0,	0.0,	...	
0.6,	2.1,	4.4,	7.2,	10.1,	13.0,	15.9,	18.8,	21.7, 24.6 ...
0.6,	1.2,	1.8,	2.4,	3.0,	3.6,	4.2,	4.8,	5.4 6.0 ...
	0.9,	2.6,	4.8,	7.1,	9.4,	11.7,	14.0,	16.3, 18.6, ...
	0.9,	1.8,	2.7,	3.6,	4.5,	5.4,	6.3,	7.2 8.1 ...
	0.8,	2.1,	3.5,	4.9,	6.3,	7.7,	9.1,	10.5, ...
	0.8,	1.6,	2.4,	3.2,	4.0,	4.8,	5.6,	6.4 ...
	0.5,	1.1,	1.7,	2.3,	2.9,	3.5,	4.1,	...
	0.5,	1.0,	1.5,	2.0,	2.5,	3.0,	3.5,	...
	0.1,	0.2,	0.3,	0.4,	0.5,	0.6,	...	
	0.1,	0.2,	0.3,	0.4,	0.5,	0.6,	...	
	0.0,	0.0,	0.0,	0.0,	0.0,	0.0,	0.0,	...



Otrzymany wynik zdaje się być błędny, gdyż wyrazy H nie dążą do wartości stałej, co niewątpliwie powinno tu mieć miejsce - widać to już na podstawie kształtu funkcji r/t/.

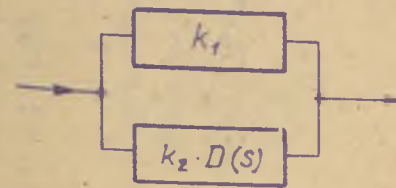
Zauważmy jednak, że odpowiedź jednostkowa układu złożonego np. z dwóch członów jak na rys. 18 wyraża się operatorem liczbowym  $H = H_1$ , gdzie będzie

$$H_1 = 2k_1, 0, 2k_1, 0, 2k_1, \dots \dots \dots 76$$

oraz

$$H_2 = h_1, h_2, h_3, h_4, \dots \dots \dots 77$$

Tego rodzaju przypadek otrzymaliśmy właśnie w naszym przykładzie; możemy dla tego przykładu napisać

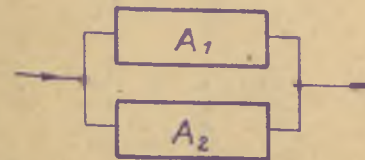


Rys. 18

$$H_1 = 0.2, 0.0, 0.2, 0.0, 0.2, 0.0, 0.2, \dots \dots \dots 78$$

$$H_2 = 1.0, 1.8, 2.6, 2.8, 2.8, 2.8, 2.8, \dots \dots \dots 79$$

i w konsekwencji możemy również przyjąć schemat zastępczy dla naszego układu wg rys. 19. Przy tym znalezione uprzednio przepustowość  $A = A_1 + A_2$ , gdzie



Rys. 19

$A_1$  /wg operatora  $H_1$  / wynosi 0.1 i zatem

$$A_2 = A - A_1 = 0.5, 0.9, 0.8, 0.5, 0.1.$$

..... 80

Otrzymany obliczeniowo ciąg H nie jest tym razem izomorficzny z kształtem funkcji h/t/, gdyż funkcja ta nie spełnia warunku f/0/ = 0. Jednak, znając umowę o wyrażeniu skoku jednostkowego ciągiem 2,0,2,0 ... możemy narysować "rzeczywiste" h/t/, rys. 20.

Jest rzeczą oczywistą, że szukany operator H można było otrzymać również przez proste zróżniczkowanie operatora R, czyli pomnożenie go przez operator p. Mianowicie

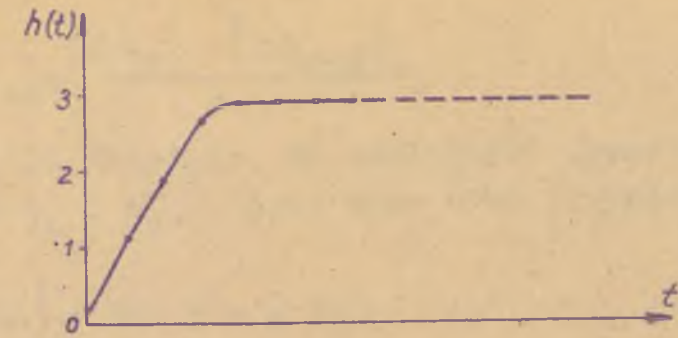
$$H = pR = \frac{2}{s} \frac{1, -1}{1, 1} \cdot R = 1.2, 1.8, 2.8, 2.8, 3.0, 2.8, 3.0, 2.8, \dots$$

..... 81

/Wykonanie działań podane jest w tablicach 3 i 4/.

f(0) = 0





Rys. 20

2.2.8. Zagadnienie dokładności.

Uchyb metody składa się z uchybów pochodzących z samej aproksymacji krzywej przez łamaną, oraz z uchybów powstających przy wykonywaniu działań na operatorach liczbowych.

Uchyby pochodzące z aproksymacji można w zasadzie dowolnie zmniejszać, przez dobór liczby odcinków łamanej. Natomiast uchyby powstające przy wykonywaniu działań są bardziej nieodłączne od metody i mogą być w pewnych wypadkach dosyć znaczne. Rozpatrzmy nieco bliżej to zagadnienie.

a/ Uchyb powstający przy obliczeniu przepustowości na podstawie odpowiedzi jednostkowej.

Załóżmy, że mamy odpowiedź jednostkową pewnego członu, wyrażoną operatorem H. Przepustowość tego członu, jak wiadomo, wyraża się wzorem

$$A = \frac{H}{M}$$

a praktycznie znajduje się ją mnożąc operator H przez operator  $\frac{1}{2}$ , 0,  $-\frac{1}{2}$ . Otrzymujemy wówczas dla wartości wyrazów operatora A następujące wzory :

$$a_0 = \frac{h_0}{2}$$

$$a_1 = \frac{h_1}{2}$$

$$a_2 = \frac{h_2 - h_0}{2}$$

$$a_3 = \frac{h_3 - h_1}{2}$$

$$\dots a_n = \frac{h_n - h_{n-2}}{2}$$

Nietrudno zauważyć, że uchyb bezwzględny wartości  $a_n$  wynosi

$$|\Delta a_n| = \frac{|\Delta h_n| + |\Delta h_{n-2}|}{2} \dots\dots 83$$

Jeśli założymy, że dokładność wyznaczenia /z pomiaru/ rzędnych  $h_n$  i  $h_{n-2}$  jest taka sama i wynosi

$$\left| \frac{\Delta h_n}{h_n} \right| \cdot 100 \% = p \% \dots\dots 84$$

to przy dostatecznie monotonnym przebiegu  $h/t$  otrzymamy z bardzo dobrym przybliżeniem

$$|\Delta a_n| \cong \frac{2 |\Delta h_{n-1}|}{2} = |\Delta h_{n-1}| \dots\dots 85$$

Uchyb względny wartości  $a_n$  wyniesie w przybliżeniu

$$\left| \frac{\Delta a_n}{a_n} \right| \cdot 100 \% = \left| \frac{h_{n-1}}{a_n} \right| p \% \dots\dots 86$$

I tak np. w przykładzie ze str. 32 wartości  $a_5 = -0.3$ ,  $a_6 = -0.25$ ,  $a_7 = -0.1$  są wyznaczone z dokładnością ok. odpowiednio 14,5 p, 16 p, 3,8 p; jeśli  $p$  wynosi np. 2 %, to dokładność wyznaczenia  $a_5$ ,  $a_6$ ,  $a_7$  wynosi już tylko ok. 29,32, 78 %.

Przypuszczalnie ten fakt nasunął Tustinowi [8] stwierdzenie, że przepustowość  $A$  otrzymana z podzielenia ciągu wyjściowego przez ciąg wejściowy wyraża nie odpowiedź na element trójkątny / " to  $\Delta$ -unit " / lecz odpowiedź średnio na element  $\Delta$  / " per  $\Delta$ -unit " /. Że teoretycznie, to jest bez uwzględnienia dokładności rachunku, podzielenie wspomniane wyżej daje ściśle odpowiedź układu na element  $\Delta$ , widać jasno z rozdz. 4.2.3. Autor angielski nie wyciągnął zresztą konsekwencji ze swego stwierdzenia - konsekwencją tą byłoby to, że nie jest obojętne do jakiego operatora liczbowego zastosujemy obliczoną wcześniej przepustowość  $A$ . Jeżeli bowiem wyraża ona odpowiedź " średnio na element  $\Delta$ ", to zestawienie elementów  $\Delta$  w nowej funkcji wymuszającej musi być w jakimś określonym sensie " podobne " do zestawienia tych elementów w tej funkcji wymuszającej, która posłużyła do obliczenia przepustowości  $A$ .

Powracając do rozważań o uchybach powstaje pytanie, czy np. błędy w dalszych, małych wyrazach przepustowości  $A$  odgrywają istotną rolę w wynikach.

Rozpatrzmy działanie mnożenia operatorów, to jest np. znajduwanie odpowiedzi na dowolną funkcję wymuszającą przy znanej przepustowości A, z punktu widzenia uchybów. Ogólnie mamy

$$C = A \cdot B = /a_0, a_1, a_2, a_3 \dots / /b_0, b_1, b_2, b_3, \dots / = a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, a_0 b_3 + \dots + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0, \dots = c_0, c_1, c_2, c_3 \dots \dots \dots 87$$

Uchyby poszczególnych wyrazów C zależą od uchybów  $\Delta a$  oraz  $\Delta b$  - na przykład, dla czwartego wyrazu będzie

$$|\Delta c_3| \cong |a_0 \Delta b_3| + |b_3 \Delta a_0| + |a_1 \Delta b_2| + |b_2 \Delta a_1| + |a_2 \Delta b_1| + |b_1 \Delta a_2| + |a_3 \Delta b_0| + |b_0 \Delta a_3|, \dots \dots \dots 88$$

bowiem uchyb iloczynu składowego, np.  $a_0 b_3$ , wynosi w przybliżeniu

$$|\Delta(a_0 b_3)| = (|a_0| + |\Delta a_0|)(|b_3| + |\Delta b_3|) - |a_0 b_3| \cong |a_0 \Delta b_3| + |b_3 \Delta a_0| \dots \dots \dots 89$$

Zauważmy, że we wzorze na  $\Delta c_3$  nie występują uchyby względne wyrazów  $a_n$  lub  $b_n$ , a tylko ich uchyby bezwzględne. Jeśli przyjmiemy, że wszystkie uchyby bezwzględne są sobie równe /jest to dosyć prawdopodobne w niektórych przypadkach praktycznych/ i równe  $\Delta a$ , to

$$|\Delta c_3| = \Delta a (|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |b_0| + |b_1| + |b_2| + |b_3|) \dots \dots \dots 90$$

i zatem

$$\frac{|\Delta c_3|}{c_3} = \frac{\Delta a (|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |b_0| + |b_1| + |b_2| + |b_3|)}{|a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0|} \dots \dots \dots 91$$

Otrzymane wyżej związki pozwalają na wyciągnięcie pewnych wniosków. Mianowicie

- I. Uchyb bezwzględny  $\Delta c_n$  rośnie z indeksem n - wskazuje to wzór 90.
- II. Uchyb bezwzględny  $\Delta c_n$  nie zależy od wartości  $c_n$ , a tylko od uchybów bezwzględnych  $\Delta a_k$  i  $\Delta b_k$ , gdzie  $k = 0:n$ . Zatem uchyb względny  $c_n$  będzie mniejszy przy dużym  $c_n$ .
- III. Byłoby pożądanym zmniejszenie uchybów bezwzględnych, w szczególności uchybów bezwzględnych wyrazów przepustowości A. Byłoby to możliwe przez bezpośrednie zdejmowanie

charakterystyki chwilowej A, to jest przez przyłożenie wymuszenia w kształcie jednostki  $\Delta$ .

W tabelicy 1 jak wiemy, zapisane jest przykładowe mnożenie operatora  $A = 1.2, 1.95, 1.0, 0.35, -0.05, -0.3, -0.25, -0.1, 0.05, 0.1, 0.05$  przez operator funkcji wymuszającej  $W = 0.72, 1.20, 1.50, 1.72, 1.88, 1.96, 1.98, 2.0, 2.0 \dots$

Poniżej w tabelicy 5 podane są uchyby wyrazów operatora A oraz wyrazów otrzymanego wyniku  $R = A \cdot W$  w założeniu, że uchyby względne wyrazów operatora W są stałe i wynoszą  $p=2\%$ , oraz że operator A obliczono jak w przykładzie, na podstawie rzędnych R wg /68/, znanych również z dokładnością  $p=2\%$ . Uchyby wyrazów operatora A obliczono wg wzoru /83/. Uchyby wyniku obliczono w sposób analogiczny do wskazanego przez wzór /88/.

Tabelica 5 wskazuje, że pomimo dużych uchybów w wyrazach przepustowości  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , otrzymany wynik R jest stosunkowo dokładny. Nasuwa to myśl, że bez dużej szkody dla dokładności wyników można odrzucić dalsze, mało dokładne wyrazy przepustowości. Rzeczywiście, analiza ostatnich kolumn tabelicy 1 wskazuje, że odrzucając np. 4 ostatnie wyrazy  $a_7 - a_{10}$  wprowadzimy do ostatnich kolumn uchyb  $[-0.10 + 0.05 + 0.10 + 0.05] \cdot 2.0 = 0.2$ , czyli uchyb względny 0.025. Odrzucając 5 ostatnich wyrazów wprowadzimy uchyb względny wynoszący ok. 0.038. Trzeba jednak zauważyć, że skorzystaliśmy tu na przemienności znaków w wyrazach przepustowości  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ ; może się w takim przypadku zdarzyć, że odrzucenie kilku wyrazów zeważy silniej na uchybach pośrednich wyrazów wyniku, niż na jego wyrazach ostatnich. Tym niemniej, w praktycznych, często - w pierwszej fazie - dosyć orientacyjnych obliczeniach, tego rodzaju postępowanie może znacznie ułatwić i skrócić rachunki.

b/ Uchyb ilorazu operatorów liczbowych.

Weźmy iloraz operatorów liczbowych :

$$\frac{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots}{b_0, b_1, b_2, b_3, \dots} = c_0, c_1, c_2, c_3 \dots \dots \dots 92$$

Na podstawie określenia iloczynu operatorów liczbowych, otrzymujemy dla kolejnych wyrazów ilorazu  $c_0, c_1, c_2, c_3 \dots$

wzory :

Tablica 5 Uchyby wyrazów operatorów, występujących lub związanych z tablicą 1.

1/	$H = 2.4,$ $\left  \frac{\Delta h_n}{h_n} \right  = 0.02,$ $\left  \frac{\Delta h_n}{\Delta h_n} \right  = 0.048,$	3.9,	4.4,	4.6,	4.3,	4.0,	3.8,	3.8,	3.9,	4.0,	4.0 ...
2/	$A = 1.2,$ $\left  \frac{\Delta a_n}{a_n} \right  = 0.024,$ $\left  \frac{\Delta a_n}{\Delta a_n} \right  = 0.02,$	1.95,	1.0,	0.35,	-0.05,	-0.3,	-0.25,	-0.10,	0.05,	0.10,	0.05.
		0.039,	0.068,	0.065,	0.087,	0.086,	0.081,	0.078,	0.077,	0.078,	0.079.
		0.02,	0.07,	0.24,	1.74,	0.29,	0.32,	0.78,	1.54,	0.78,	1.58.
3/	$W = 0.72,$ $\left  \frac{\Delta w_n}{w_n} \right  = 0.02,$ $\left  \frac{\Delta w_n}{\Delta w_n} \right  = 0.014,$	1.20,	1.50,	1.72,	1.88,	1.96,	1.98,	2.0,	2.0,	2.0, ...	
		0.02,	0.02,	0.02,	0.02,	0.02,	0.02,	0.02,	0.02,	0.02 ...	
		0.024,	0.030,	0.034,	0.038,	0.039,	0.040,	0.040,	0.040,	0.040 ...	
4/	$R = 0.864,$ $\left  \frac{\Delta r_n}{r_n} \right  = 0.034,$ $\left  \frac{\Delta r_n}{\Delta r_n} \right  = 0.040,$	2.85,	4.86,	6.44,	7.49,	7.99,	6.07,	7.97,	7.90, ...		
		0.113,	0.229,	0.372,	0.530,	0.702,	0.878,	1.047,	1.213, ...		
		0.040,	0.047,	0.058,	0.071,	0.088,	0.109,	0.152,	0.153, ...		

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

$$c_1 = \frac{1}{b_0} / a_1 - c_0 b_1 /$$

$$c_2 = \frac{1}{b_0} / a_2 - c_0 b_2 - c_1 b_1 /$$

$$c_3 = \frac{1}{b_0} / a_3 - c_0 b_3 - c_1 b_2 - c_2 b_1 / \dots\dots 93$$

....

$$c_n = \frac{1}{b_0} / a_n - \sum_0^{n-1} c_m b_{n-m} /$$

Zastanowimy się nad uchybami wyrazów  $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$  w zależności od uchybów  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  oraz  $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$ .

Interesują nas przy tym zarówno uchyby względne  $\frac{\Delta c_0}{c_0}, \frac{\Delta c_1}{c_1}, \dots$

które mają znaczenie jeżeli dany iloraz ma być jakimś bezpośrednio użytym wynikiem, jak i uchyby bezwzględne

$\Delta c_0, \Delta c_1, \dots$ , które wchodzi w grę przy użyciu otrzymanego ilorazu do utworzenia iloczynu z innym operatorem.

Określimy najpierw uchyby bezwzględne; stosunkowo prosto można to zrobić dla wyrazu  $c_0$ , w założeniu, że

$$|\Delta a_0| \ll |a_0| \text{ oraz } |\Delta b_0| \ll |b_0|.$$

$$\begin{aligned} \Delta c_0 &= \Delta \left( \frac{a_0}{b_0} \right) = \frac{a_0 \pm \Delta a_0}{b_0 \pm \Delta b_0} - \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0}{b_0 \pm \Delta b_0} \pm \frac{\Delta a_0}{b_0 \pm \Delta b_0} - \frac{a_0}{b_0} = \\ &= \frac{\frac{a_0}{b_0}}{1 \pm \frac{\Delta b_0}{b_0}} \pm \frac{\Delta a_0}{b_0 \pm \Delta b_0} - \frac{a_0}{b_0} \cong \frac{a_0}{b_0} \left( 1 \mp \frac{\Delta b_0}{b_0} \right) \pm \frac{\Delta a_0}{b_0 \pm \Delta b_0} - \frac{a_0}{b_0} = \\ &= \mp \frac{\Delta b_0}{b_0} \cdot \frac{a_0}{b_0} \pm \frac{\Delta a_0}{b_0} = \frac{a_0}{b_0} \left( \mp \frac{\Delta b_0}{b_0} + \frac{\Delta a_0}{a_0} \right) \dots\dots 94 \end{aligned}$$

Przy niekorzystnym zbiegu okoliczności, to jest przy różnych znakach  $\Delta b_0$  i  $\Delta a_0$ , będziemy mieli - pisząc wartości bezwzględne :

$$|\Delta c_0| = \left| \Delta \left( \frac{a_0}{b_0} \right) \right| \cong \frac{a_0}{b_0} \left( \left| \frac{\Delta a_0}{a_0} + \frac{\Delta b_0}{b_0} \right| \right) = c_0 \left( \left| \frac{\Delta a_0}{a_0} + \frac{\Delta b_0}{b_0} \right| \right) \dots\dots 95$$

Dla obliczenia uchybów dalszych wyrazów ilorazu  $c_0, c_1, c_2, \dots$  trzeba rozwinąć wzory /93/ w taki sposób, by znaleźć bezpośrednią zależność  $c_n$  od wyrazów  $a_0, a_1, \dots, a_n$  oraz  $b_0, b_1, \dots, b_n$ ; trzeba bowiem uwzględnić, że uchyby  $\Delta a_0, \Delta a_1, \dots, \Delta b_0, \Delta b_1, \dots$  mogą "kilkoma drogami"



wpływać na uchyb  $\Delta c_n$  i nie zawsze wpływy te będą się sumować.

Weźmy uchyb wyrazu  $c_1$ .

$$c_1 = \frac{1}{b_0} (a_1 - c_0 b_1) = \frac{1}{b_0} \left( a_1 - \frac{a_0 b_1}{b_0} \right) \dots\dots 96$$

$$c_1 \pm \Delta c_1 = \frac{1}{b_0 \pm \Delta b_0} \left[ (a_1 \pm \Delta a_1) - \frac{(a_0 \pm \Delta a_0)(b_1 \pm \Delta b_1)}{b_0 \pm \Delta b_0} \right] \cong$$

$$\cong \frac{1}{1 \pm \frac{\Delta b_0}{b_0}} \left[ (a_1 \pm \Delta a_1) - \frac{\frac{1}{b_0} (a_0 b_1 \pm b_1 \Delta a_0 \pm a_0 \Delta b_1)}{1 \pm \frac{\Delta b_0}{b_0}} \right] \cong$$

$$\cong \frac{1}{b_0} \left( 1 \mp \frac{\Delta b_0}{b_0} \right) \left[ (a_1 \pm \Delta a_1) - \frac{1}{b_0} (a_0 b_1 \pm b_1 \Delta a_0 \pm a_0 \Delta b_1) \pm \frac{1}{b_0} (a_0 b_1 \pm b_1 \Delta a_0 \pm a_0 \Delta b_1) \frac{\Delta b_0}{b_0} \right] \cong$$

$$\cong \frac{1}{b_0} \left( 1 \mp \frac{\Delta b_0}{b_0} \right) \left( a_1 \pm \Delta a_1 - \frac{a_0 b_1}{b_0} \mp \frac{b_1}{b_0} \Delta a_0 \mp \frac{a_0}{b_0} \Delta b_1 \pm \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \Delta b_0 \right) \cong$$

$$\cong \frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \mp \frac{\Delta a_1}{b_0} \mp \frac{b_1}{b_0^2} \Delta a_0 \mp \frac{a_0}{b_0^2} \Delta b_1 \pm \frac{a_0 b_1}{b_0^3} \Delta b_0 \mp \frac{a_1}{b_0^2} \Delta b_0 \pm \frac{a_0 b_1}{b_0^3} \Delta b_0$$

..... 97

Ponieważ  $\frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2} = c_1$ , pozostałe wyrazy w prawej

części równania /97/ równają się  $\pm \Delta c_1$ :

$$\pm \Delta c_1 \cong \pm \frac{\Delta a_1}{a_1} \frac{a_1}{b_0} \mp \frac{\Delta a_0}{a_0} \frac{b_1 a_0}{b_0^2} \mp \frac{\Delta b_1}{b_1} \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \pm \frac{\Delta b_0}{b_0} \left( \frac{a_0 b_1}{b_0^2} - \frac{a_1}{b_0} + \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \right) \dots\dots 98$$

Wzór ten można pogrupować w taki sposób, by zestawić razem wyrazy mające te same współczynniki / - są to przy tym składniki wzoru na  $c_1$  / :

$$\pm \Delta c_1 \cong \frac{a_1}{b_0} \left( \pm \frac{\Delta a_1}{a_1} \mp \frac{\Delta b_0}{b_0} \right) + \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \left( \mp \frac{\Delta a_0}{a_0} \mp \frac{\Delta b_1}{b_1} + \frac{2 \Delta b_0}{b_0} \right) \dots\dots 99$$

Zauważmy, że szukając - jak zwykle - najmniej korzystnych warunków, to jest przypadku gdy  $\Delta c_1$  będzie najwię-

ksze, będziemy mogli zamiast  $\pm \frac{\Delta a_1}{a_1}$ ,  $\pm \frac{\Delta a_0}{a_0}$ ,  $\pm \frac{\Delta b_1}{b_1}$

napisać wartości bezwzględne :

$\left| \frac{\Delta a_1}{a_1} \right|$ ,  $\left| \frac{\Delta a_0}{a_0} \right|$ ,  $\left| \frac{\Delta b_1}{b_1} \right|$ , lecz nie będziemy mogli tego zrobić dla  $\pm \frac{\Delta b_0}{b_0}$ , gdyż uchyb  $\frac{\Delta b_0}{b_0}$ , występując w pier-

wszym i drugim składniku wzoru z różnym znakiem, może częściowo lub całkowicie kompensować swój własny wpływ.

Chcąc wprowadzić znaki wartości bezwzględnych dla wszystkich uchybów musimy napisać :

$$|\Delta C_1| \equiv \left| \frac{a_1}{b_0} \cdot \frac{\Delta a_1}{a_1} + \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \cdot \frac{\Delta a_0}{a_0} + \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \cdot \frac{\Delta b_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_0} - \frac{2a_0 b_1}{b_0^2} \right| \cdot \left| \frac{\Delta b_0}{b_0} \right| \quad \dots\dots 100$$

Załóżmy teraz, co jest praktycznie bardzo prawdopodobne, że  $\left| \frac{\Delta a_1}{a_1} \right| = \left| \frac{\Delta a_0}{a_0} \right| = \left| \frac{\Delta b_1}{b_1} \right| = \left| \frac{\Delta b_0}{b_0} \right| = \rho$ ; wówczas

$$|\Delta C_1| \equiv \rho \left( \left| \frac{a_1}{b_0} \right| + 2 \left| \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \right| + \left| \frac{a_1}{b_0} - 2 \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \right| \right) \quad \dots\dots 101$$

Istnieją teraz dwie możliwości; jeżeli  $\frac{a_1}{b_0}$  i  $\frac{a_0 b_1}{b_0^2}$

mają znaki różne, to wzór się upraszcza :

$$|\Delta C_1| \equiv 2\rho \left( \left| \frac{a_1}{b_0} \right| + 2 \left| \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \right| \right), \quad \dots\dots 102$$

jeżeli zaś  $\frac{a_1}{b_0}$  i  $\frac{a_0 b_1}{b_0^2}$  mają znaki zgodne, to uchyb  $\Delta C_1$

jest nieco mniejszy i może co najwyżej być równy większej z następujących dwóch wartości :

$$|\Delta C_1| \equiv 2\rho \left| \frac{a_1}{b_0} \right| \quad \dots\dots 103$$

$$|\Delta C_1| \equiv 2\rho \left| \frac{2a_0 b_1}{b_0^2} \right| \quad \dots\dots 104$$

W podobny sposób można znaleźć wzory na uchyby następujących wyrazów ilorazu; wzory te są następujące :

$$|\Delta C_2| \equiv \left| \frac{a_2}{b_0} \cdot \frac{\Delta a_2}{a_2} + \frac{a_0 b_2}{b_0^2} \cdot \frac{\Delta b_2}{b_2} + \frac{a_1 b_1}{b_0^2} - \frac{2a_0 b_1^2}{b_0^3} \right| \cdot \left| \frac{\Delta b_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_1 b_1}{b_0^2} \cdot \frac{\Delta a_1}{a_1} + \frac{a_0 b_1^2}{b_0^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{a_0 b_2}{b_0^2} \right| \cdot \left| \frac{\Delta a_0}{a_0} \right| + \left| \frac{3a_0 b_1^2}{b_0^3} + \frac{a_2}{b_0} - \frac{2a_0 b_2}{b_0^2} - \frac{2b_1 a_1}{b_0^2} \right| \cdot \left| \frac{\Delta b_0}{b_0} \right| \quad \dots\dots 105$$

$$|\Delta c_2| \cong \rho \left( \left| \frac{a_2}{b_0} \right| + \left| \frac{a_0 b_2}{b_0^2} \right| + \left| \frac{a_1 b_1}{b_0^2} - \frac{2a_0 b_1^2}{b_0^3} \right| + \left| \frac{a_1 b_1}{b_0^2} \right| + \left| \frac{a_0 b_1^2}{b_0^3} - \frac{a_0 b_2}{b_0^2} \right| + \left| \frac{3a_0 b_1^2}{b_0^3} - \frac{2a_0 b_2}{b_0^2} + \frac{a_2}{b_0} - \frac{2b_1 a_1}{b_0^2} \right| \right) \dots\dots\dots 106$$

$$|\Delta c_3| \cong \left| \frac{a_3}{b_0} \right| \left| \frac{\Delta a_3}{a_3} \right| + \left| \frac{a_0 b_3}{b_0^2} - \frac{2b_2 a_0 b_1}{b_0^3} + \frac{a_0 b_1^3}{b_0^4} \right| \left| \frac{\Delta a_0}{a_0} \right| + \left| \frac{b_1^2 a_1}{b_0^3} - \frac{a_1 b_2}{b_0^2} \right| \cdot \left| \frac{\Delta a_1}{a_1} \right| + \left| \frac{a_2 b_1}{b_0^2} \right| \left| \frac{\Delta a_2}{a_2} \right| + \left| \frac{2b_2 a_0 b_1}{b_0^3} - \frac{a_2 b_1}{b_0^2} + \frac{2b_1^2 a_1}{b_0^3} - \frac{3a_0 b_1^3}{b_0^4} \right| \left| \frac{\Delta b_1}{b_1} \right| + \left| \frac{2b_2 a_0 b_1}{b_0^3} - \frac{a_1 b_2}{b_0^2} \right| \left| \frac{\Delta b_2}{b_2} \right| + \left| \frac{a_3}{b_0} - \frac{2a_0 b_3}{b_0^2} - \frac{2a_1 b_2}{b_0^2} + \frac{6b_2 a_0 b_1}{b_0^3} - \frac{2a_2 b_1}{b_0^2} + \frac{3b_1^2 a_1}{b_0^3} - \frac{4a_0 b_1^3}{b_0^4} \right| \left| \frac{\Delta b_0}{b_0} \right| \dots\dots\dots 107$$

$$|\Delta c_3| \cong \rho \left( \left| \frac{a_3}{b_0} \right| + \left| \frac{a_0 b_3}{b_0^2} - \frac{2b_2 a_0 b_1}{b_0^3} + \frac{a_0 b_1^3}{b_0^4} \right| + \left| \frac{b_1^2 a_1}{b_0^3} - \frac{a_1 b_2}{b_0^2} \right| + \left| \frac{a_2 b_1}{b_0^2} \right| + \left| \frac{2b_2 a_0 b_1}{b_0^3} - \frac{a_2 b_1}{b_0^2} + \frac{2b_1^2 a_1}{b_0^3} - \frac{3a_0 b_1^3}{b_0^4} \right| + \left| \frac{2b_2 a_0 b_1}{b_0^3} - \frac{a_1 b_2}{b_0^2} \right| + \left| \frac{a_3}{b_0} - \frac{2a_0 b_3}{b_0^2} - \frac{2a_1 b_2}{b_0^2} + \frac{6b_2 a_0 b_1}{b_0^3} - \frac{2a_2 b_1}{b_0^2} + \frac{3b_1^2 a_1}{b_0^3} - \frac{4a_0 b_1^3}{b_0^4} \right| \right) \dots\dots\dots 108$$

$$|\Delta c_4| \cong \left| \frac{a_4}{b_0} \right| \left| \frac{\Delta a_4}{a_4} \right| + \left| \frac{a_0 b_4}{b_0^2} - \frac{2a_0 b_1 b_3}{b_0^3} - \frac{a_0 b_2^2}{b_0^3} + \frac{3a_0 b_1^2 b_2}{b_0^4} - \frac{a_0 b_1^4}{b_0^5} \right| \left| \frac{\Delta a_0}{a_0} \right| + \left| \frac{a_1 b_3}{b_0^2} - \frac{2a_1 b_1 b_2}{b_0^3} + \frac{a_1 b_1^3}{b_0^4} \right| \left| \frac{\Delta a_1}{a_1} \right| + \left| \frac{a_2 b_2}{b_0^2} - \frac{a_2 b_1^2}{b_0^3} \right| \left| \frac{\Delta a_2}{a_2} \right| + \left| \frac{a_3 b_1}{b_0^2} \right| \left| \frac{\Delta a_3}{a_3} \right| + \left| \frac{2a_0 b_1 b_3}{b_0^3} + \frac{2a_1 b_1 b_2}{b_0^3} - \frac{a_3 b_1}{b_0^2} - \frac{6a_0 b_1^2 b_2}{b_0^4} + \frac{2a_2 b_1^2}{b_0^3} - \frac{3a_1 b_1^3}{b_0^4} + \frac{4a_0 b_1^4}{b_0^5} \right| \left| \frac{\Delta b_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_2 b_2}{b_0^2} - \frac{2a_0 b_2^2}{b_0^3} - \frac{2a_1 b_1 b_2}{b_0^3} + \frac{3a_0 b_1^2 b_2}{b_0^4} \right| \left| \frac{\Delta b_2}{b_2} \right| + \left| \frac{a_1 b_3}{b_0^2} - \frac{2a_0 b_1 b_3}{b_0^3} \right| \left| \frac{\Delta b_3}{b_3} \right| +$$

$$+ \left| \frac{\alpha_0 b_4}{b_0^2} \left| \frac{\Delta b_4}{b_4} \right| + \left| \frac{\alpha_1}{b_0} - \frac{2\alpha_0 b_4}{b_0^2} - \frac{2\alpha_1 b_3}{b_0^2} + \frac{5\alpha_0 b_1 b_3}{b_0^3} - \frac{2\alpha_2 b_2}{b_0^2} + \frac{3\alpha_0 b_2^2}{b_0^3} + \frac{6\alpha_1 b_1 b_2}{b_0^3} - \frac{2\alpha_3 b_1}{b_0^2} - \frac{12\alpha_0 b_1^2 b_2}{b_0^4} + \frac{3\alpha_2 b_1^2}{b_0^3} - \frac{4\alpha_1 b_1^3}{b_0^4} + \frac{5\alpha_0 b_1^4}{b_0^5} \right| \left| \frac{\Delta b_0}{b_0} \right| ; \dots\dots 109$$

$$\begin{aligned} |\Delta c_4| \cong p & \left( \left| \frac{\alpha_4}{b_0} \right| + \left| \frac{\alpha_0 b_4}{b_0^2} - \frac{2\alpha_0 b_1 b_3}{b_0^3} - \frac{\alpha_0 b_2^2}{b_0^3} + \frac{3\alpha_0 b_1^2 b_2}{b_0^4} - \frac{\alpha_0 b_1^4}{b_0^5} \right| + \right. \\ & + \left| \frac{\alpha_1 b_3}{b_0^2} - \frac{2\alpha_1 b_1 b_2}{b_0^3} + \frac{\alpha_1 b_1^3}{b_0^4} \right| + \left| \frac{\alpha_2 b_2}{b_0^2} - \frac{\alpha_2 b_1^2}{b_0^3} \right| + \left| \frac{\alpha_3 b_1}{b_0^2} \right| + \left| \frac{2\alpha_0 b_1 b_3}{b_0^3} + \frac{2\alpha_1 b_1 b_2}{b_0^3} - \right. \\ & - \left. \frac{\alpha_3 b_1}{b_0^2} - \frac{6\alpha_0 b_1^2 b_2}{b_0^4} + \frac{2\alpha_2 b_1^2}{b_0^3} - \frac{3\alpha_1 b_1^3}{b_0^4} + \frac{4\alpha_0 b_1^4}{b_0^5} \right| + \left| \frac{\alpha_2 b_2}{b_0^2} - \frac{2\alpha_0 b_2^2}{b_0^3} - \right. \\ & - \frac{2\alpha_1 b_1 b_2}{b_0^3} + \frac{3\alpha_0 b_1^2 b_2}{b_0^4} \left| + \left| \frac{\alpha_1 b_3}{b_0^2} - \frac{2\alpha_0 b_1 b_3}{b_0^3} \right| + \left| \frac{\alpha_0 b_4}{b_0^2} \right| + \left| \frac{\alpha_1}{b_0} - \frac{2\alpha_0 b_4}{b_0^2} - \right. \right. \\ & - \frac{2\alpha_1 b_3}{b_0^2} + \frac{6\alpha_0 b_1 b_3}{b_0^3} - \frac{2\alpha_2 b_2}{b_0^2} + \frac{3\alpha_0 b_2^2}{b_0^3} + \frac{6\alpha_1 b_1 b_2}{b_0^3} - \frac{2\alpha_3 b_1}{b_0^2} - \\ & \left. \left. - \frac{12\alpha_0 b_1^2 b_2}{b_0^4} + \frac{3\alpha_2 b_1^2}{b_0^3} - \frac{4\alpha_1 b_1^3}{b_0^4} + \frac{5\alpha_0 b_1^4}{b_0^5} \right| \right) \dots\dots 110 \end{aligned}$$

Dla przykładu, w tabelicy 6 zapisano działanie dzielenia dwóch operatorów liczbowych, A = 0.28, 0.88, 1.57, 2.15, 2.48, 2.64, 2.74, 2.78, 2.80, 2.80, ... oraz B = 0.55, 0.76, 0.88, 0.94, 0.98, 1.00, 1.00, ... oraz podane obliczone uchyby bezwzględne  $|\Delta c_0|$ ,  $|\Delta c_1|$ ,  $|\Delta c_2|$ ,  $|\Delta c_3|$ , ... i odpowiadające im uchyby względne

$$\left| \frac{\Delta c_0}{c_0} \right|, \left| \frac{\Delta c_1}{c_1} \right|, \left| \frac{\Delta c_2}{c_2} \right|, \left| \frac{\Delta c_3}{c_3} \right|, \dots, \text{ w założeniu } p = 2\%$$

Jak widać, dalsze wyrazy wyniku obarczone są dużymi błędami. Jest to prostą konsekwencją tego, że każdy następny wyraz  $c_n$  zależy od większej liczby wyrazów  $a_n, b_n$ , z których każdy - jak założyliśmy - obarczony jest uchybem.

Otrzymany rezultat stwarza w pewnym sensie paradoksalną sytuację; jeśli bowiem będziemy aproksymować funkcje większą ilością rzędnych - zatem dokładniej - to wyniki działań dzielenia i mnożenia mogą mieć większe błędy - gdyż będą miały więcej wyrazów.

Zauważmy, że działanie podane w tabelicy 6 jest znajdy-

Tablica 6

Dzielenie dzielenia operatorów  $\frac{A}{B} = C$  do str. 48

uchyb względ- dny	$\frac{\Delta c_n}{c_n}$	0.04	0.071	0.242	0.465	3.08	-	-	-	-	
uchyb bezwzględ- dny	$ \Delta c_n $	0.020	0.064	0.195	0.231	0.315	-	-	-	-	
		0.510,	0.894,	0.804,	0.497,	0.102,	-0.029,	0.024,	-0.007,	0.011,	-0.002
		0.28,	0.88,	1.57,	2.15,	2.48,	2.64,	2.74,	2.78,	2.80	2.80...
		0.280,	0.388,	0.449,	0.479,	0.500,	0.516,	0.516,	0.516,	0.516,	0.510,
		=	0.492,	1.121,	1.671,	1.980,	2.130,	2.230,	2.270,	2.290,	2.290,
			0.492,	0.679,	0.787,	0.840,	0.876,	0.894,	0.894,	0.894,	0.894,
		=	0.442,	0.884,	1.140,	1.254,	1.336,	1.376,	1.376,	1.396,	1.396,
			0.442,	0.611,	0.707,	0.756,	0.788,	0.804,	0.804,	0.804,	0.804,
		=	0.273,	0.433,	0.498,	0.548,	0.572,	0.572,	0.592,	0.592,	0.592,
			0.273,	0.377,	0.437,	0.467,	0.467,	0.467,	0.467,	0.497,	0.497,
		=	0.056,	0.061,	0.081,	0.085,	0.085,	0.095,	0.095,	0.095,	0.095,
			0.056,	0.077,	0.090,	0.096,	0.096,	0.100,	0.100,	0.102,	0.102,
		=	-0.016,	-0.009,	-0.011,	-0.005,	-0.011,	-0.005,	-0.007,	-0.007,	-0.007,
			-0.016,	-0.022,	-0.025,	-0.027,	-0.025,	-0.027,	-0.028,	-0.028,	-0.028,
		=	0.013,	0.014,	0.014,	0.022,	0.021,	0.022,	0.021,	0.021,	0.021,
			0.013,	0.018,	0.018,	0.021,	0.021,	0.022,	0.022,	0.022,	0.022,
		=	-0.004,	0.001,	0.001,	0.001,	0.001,	0.001,	0.001,	0.001,	0.001,
			-0.004,	-0.005,	-0.005,	-0.006,	-0.006,	-0.006,	-0.006,	-0.006,	-0.006,
		=	0.006,	0.007,	0.007,	0.007,	0.007,	0.007,	0.007,	0.007,	0.007,
			0.006,	0.008,	0.008,	0.008,	0.008,	0.008,	0.008,	0.008,	0.008,
		=	-0.001								-0.001

waniem przepustowości pewnego elementu, do którego przyłożono funkcję wyrażoną operatorem 0.55, 0.76, 0.88, ... a na wyjściu otrzymane funkcję wyrażoną operatorem 0.28, 0.88, 1.57, ...

Jeśli rachunek nasz jest stosowany do tego rodzaju przypadku, to niewątpliwie paradoks związany z ilością wyrazów operatorów jest tylko pozorny. Mając bowiem więcej punktów /więcej rzędnych/ dla każdej z krzywych i to rzędnych pochodzących z interpolacji wyników pomiarów, mamy większe prawdopodobieństwo, że duża część punktów wyniku jest prawidłowa, gdyż uchyby przypadkowe dla nich będą małe. Jeśli natomiast przyjęta dokładność 2 % dotyczy uchybów systematycznych pomiaru punktów charakterystyki, to albo znaki wszystkich uchybów dla jednej charakterystyki, na przykład  $\Delta b_0, \Delta b_1, \Delta b_2, \dots$  będą jednakowe, albo też będą to " uchyby systematyczne o charakterze przypadkowym " / na przykład nierównomierność skali w przyrządzie pomiarowym / i zwiększenie ilości punktów pomiaru, łącznie z interpolacją, będzie je eliminować. W każdym przypadku zwiększenie ilości punktów aproksymacji, to jest zwiększenie ilości wyrazów operatorów liczbowych, nie wpłynie na zmniejszenie, lecz na zwiększenie dokładności, poprzez zmniejszenie uchybów poszczególnych wyrazów.

Zawsze jednak dalsze wyrazy otrzymanego ilorazu, w tym przypadku - przepustowości, będą obciążone większymi, dosyć szybko rosnącymi uchybami.

Jak to już było wykazane wyżej, nawet przy obliczaniu przepustowości z odpowiedzi jednostkowej, jest ona obciążona dość znacznym błędem - co, jak pisałem, zauważył w pewien sposób Tustin. Przepustowość obliczona z ilorazu dwóch operatorów, jak w tabelicy 6, zawiera - rzecz prosta - większe błędy, gdyż trzeba założyć, że wyrazy obu operatorów zawierają uchyby.

Jeśli teraz użyjemy obliczonej w tabelicy 6 przepustowości do określenia odpowiedzi układu na inne wymuszenie, np. na skok jednostkowy, to - być może - uchyby zawarte w wyrazach przepustowości częściowo się skompensują, a w każdym razie zmniejszą się uchyby względne. Aby to stwierdzić, trzeba by użyć takich wzorów na uchyby  $|\Delta c_0|, |\Delta c_1|, |\Delta c_2|, \dots$ , które zawierają jeszcze znaki uchybów  $\Delta a_0, \Delta b_0, \Delta a_1,$

$\Delta b_1, \dots$ , a nie tylko bezwzględne wartości  $|\Delta a_0|, |\Delta b_0|, |\Delta a_1|, \dots$ . Wygodniej będzie sięgnąć do podanych niżej rozwiniętych wzorów na wyrazy  $c_0, c_1, c_2, \dots$  - wzory te są rozwinięciem /93/ i właściwie były już użyte przy obliczaniu uchybów  $|\Delta c_2|, |\Delta c_3|, |\Delta c_4|$  ;

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

$$c_1 = \frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2}$$

$$c_2 = \frac{a_2}{b_0} - \frac{a_0 b_2}{b_0^2} - \frac{a_1 b_1}{b_0^2} + \frac{a_0 b_1^2}{b_0^3}$$

$$c_3 = \frac{a_3}{b_0} - \frac{a_0 b_3}{b_0^2} - \frac{a_1 b_2}{b_0^2} + \frac{2a_0 b_1 b_2}{b_0^3} - \frac{a_2 b_1}{b_0^2} + \frac{a_1 b_1^2}{b_0^3} - \frac{a_0 b_1^3}{b_0^4}$$

$$c_4 = \frac{a_4}{b_0} - \frac{a_0 b_4}{b_0^2} - \frac{a_1 b_3}{b_0^2} + \frac{2a_0 b_1 b_3}{b_0^3} - \frac{a_2 b_2}{b_0^2} + \frac{a_0 b_2^2}{b_0^3} + \frac{2a_1 b_1 b_2}{b_0^3} - \frac{a_3 b_1}{b_0^2} - \frac{3a_0 b_1^2 b_2}{b_0^4} + \frac{a_2 b_1^2}{b_0^3} - \frac{a_1 b_1^3}{b_0^4} + \frac{a_0 b_1^4}{b_0^5} \dots\dots\dots 111$$

Mnożąc operator  $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$  przez  $M = 2, 0, 2, 0, 2, \dots$  otrzymamy szukaną odpowiedź jednostkową  $d_0, d_1, d_2, \dots$ . Pierwsze jej wyrazy - jak łatwo wykazać - będą równe :

$$d_0 = 2 c_0$$

$$d_1 = 2 c_1$$

$$d_2 = 2 / c_2 + c_0 /$$

$$d_3 = 2 / c_3 + c_1 /$$

$$d_4 = 2 / c_4 + c_2 + c_0 /$$

i td.

..... 112

stąd, oczywiście

$$|\Delta d_0| = 2 |\Delta c_0|$$

..... 113

$$|\Delta d_1| = 2 |\Delta c_1|$$

..... 114

oraz, w naszym przykładzie liczbowym,

$$\left| \frac{\Delta d_0}{d_0} \right| = \left| \frac{\Delta c_0}{c_0} \right| \cong 0.04$$

..... 115

$$\left| \frac{\Delta d_1}{d_1} \right| = \left| \frac{\Delta c_1}{c_1} \right| \cong 0.071 \quad \dots\dots 116$$

Dla uchybu  $|\Delta d_2|$  otrzymamy wzór

$$\left| \frac{\Delta d_2}{d_2} \right| \cong \left| \frac{a_0}{b_0} - \frac{a_0 b_2}{b_0^2} + \frac{a_0 b_1^2}{b_0^3} \right| \left| \frac{\Delta a_0}{a_0} \right| + \left| \frac{a_1 b_1}{b_0^2} \right| \left| \frac{\Delta a_1}{a_1} \right| + \left| \frac{a_2}{b_0} \right| \left| \frac{\Delta a_2}{a_2} \right| + \left| \frac{2 a_0 b_1^2}{b_0^3} - \frac{a_1 b_1}{b_0^2} \right| \left| \frac{\Delta b_1}{b_1} \right| + \left| \frac{a_0 b_2}{b_0^2} \right| \left| \frac{\Delta b_2}{b_2} \right| + \left| \frac{a_2}{b_0} - \frac{2 a_0 b_2}{b_0^2} - \frac{2 a_1 b_1}{b_0^2} + \frac{3 a_0 b_1^2}{b_0^3} + \frac{a_0}{b_0} \right| \left| \frac{\Delta b_0}{b_0} \right| \quad \dots\dots 117$$

a przy stałej wartości  $\rho = \left| \frac{\Delta a_0}{a_0} \right| = \left| \frac{\Delta a_1}{a_1} \right| = \dots = \left| \frac{\Delta b_0}{b_0} \right|$ ,

$$\left| \Delta d_2 \right| \cong 2\rho \left( \left| \frac{a_0}{b_0} - \frac{a_0 b_2}{b_0^2} + \frac{a_0 b_1^2}{b_0^3} \right| + \left| \frac{a_1 b_1}{b_0^2} \right| + \left| \frac{a_2}{b_0} \right| + \left| \frac{2 a_0 b_1^2}{b_0^3} - \frac{a_1 b_1}{b_0^2} \right| + \left| \frac{a_0 b_2}{b_0^2} \right| + \left| \frac{a_2}{b_0} - \frac{2 a_0 b_2}{b_0^2} - \frac{2 a_1 b_1}{b_0^2} + \frac{3 a_0 b_1^2}{b_0^3} + \frac{a_0}{b_0} \right| \right); \quad \dots\dots 118$$

Przy konkretnych wartościach liczbowych :

$$d_2 = 2 / c_2 + c_0 / = 2.63 \quad \dots\dots 119$$

$$\left| \Delta d_2 \right| \cong 0.430 \quad \dots\dots 120$$

$$\left| \frac{\Delta d_2}{d_2} \right| \cong 0.163 \quad \text{/wobec } \left| \frac{\Delta c_2}{c_2} \right| \cong 0.242 / \quad \dots\dots 121$$

Podobnie znajdziemy dla wyrazu  $d_3$  :

$$d_3 = 2 / c_3 + c_1 / = 2.78 \quad \dots\dots 122$$

$$\left| \Delta d_3 \right| \cong 0.412 \quad \dots\dots 123$$

$$\left| \frac{\Delta d_3}{d_3} \right| \cong 0.148 \quad \text{/wobec } \left| \frac{\Delta c_3}{c_3} \right| \cong 0.465 / \quad \dots\dots 124$$

oraz dla wyrazu  $d_4$  :

$$d_4 = 2 / c_4 + c_2 + c_0 / = 2.83 \quad \dots\dots 125$$



$$|\Delta a_4| = 0.918 \quad \dots\dots 126$$

$$\left| \frac{\Delta a_4}{a_4} \right| = 0.325 \quad / \text{wobec } \left| \frac{\Delta c_3}{c_3} \right| = 3.08/ \quad \dots\dots 127$$

c/ Podsumowanie zagadnienia dokładności.

Przedstawione wyżej rozważania wskazują, że posługując się metodą operatorów liczbowych przy przybliżonym rozwiązaniu zagadnień dynamicznych, w których wielkościami wyjściowymi są dane doświadczalne, nie należy spodziewać się dokładnych wyników.

W szczególności nie należy spodziewać się dokładności w wyznaczeniu dalszych, bardziej odległych od chwili  $t = 0$ , punktów charakterystyk.

W związku z tym można przyjąć jako orientacyjną wytyczną, by przywiązywać wagę raczej do pierwszych punktów przebiegów przejściowych, w miarę możliwości wyznaczając stan ustalony na podstawie innych, pomocniczych rozważań.

Występuje tu wyraźna różnica w stosunku do metod, opartych na charakterystykach częstotliwościowych - tam bowiem punkty charakterystyk dla poszczególnych częstotliwości są niezależne od punktów dla innych częstotliwości - stąd też dokładność otrzymywanych wyników może być większa. Na przykład, rozpatrując szeregowe połączenie dwóch członów, mnożymy oddzielnie każdą parę wektorów dla poszczególnych częstotliwości. Uchyb każdego punktu otrzymywanej charakterystyki zależy zatem tylko od dwóch uchybów - uchybu jednego i drugiego wektora. Przy operatorach liczbowych każdy, nieco bardziej odległy od  $t = 0$  punkt wypadkowej charakterystyki, zależy od wielu punktów charakterystyk wyjściowych.

Różnicę w dokładności, przemawiającą na korzyść metody charakterystyk częstotliwościowych, łagodzi w pewnym stopniu to, że charakterystyka częstotliwościowa tylko rzadko jest bezpośrednio poszukiwanym wynikiem. Chcąc zaś otrzymać charakterystykę chwilową z wykresu charakterystyki częstotliwościowej, musimy stosować metody przybliżone, w których znów na każdy punkt charakterystyki chwilowej wpływają - w różnym stopniu - wszystkie punkty charakterystyki częstotliwościowej.

### 4.3. Zastosowanie operatorów liczbowych do syntezy układów automatycznej regulacji.

#### 4.3.1. Wprowadzenie.

Zegaminienie syntezy układów regulacji w oparciu o odpowiedzi jednostkowe elementów, zwięzione pod względem metody obliczeniowej do rachunku operatorów liczbowych, można rozdzielić na następujące dwa problemy:

- I. Rozwiązanie zagadnienia ogólnego, jakim jest znalezienie charakterystyki regulatora, który w połączeniu z zadanym obiektem regulacji zapewni żadaną charakterystykę całego układu.
- II. Określenie parametrów regulatora, lub też żadanych charakterystyk jego składowych części, potrzebnych dla uzyskania żadanej odpowiedzi jednostkowej.

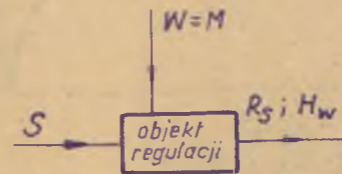
Problemy te są dalej szczegółowo rozpatrzone.

#### 4.3.2. Rozwiązanie zagadnienia ogólnego.

a/ Podejście o charakterze klasycznym.

Załóżmy, że mamy obiekt regulacji /rys.21/, dla którego dane są charakterystyki chwilowe:

- $H_w$  - odpowiedź jednostkowa na wymuszenie zakłócające  $W = M$ , /rys.22/
- $H_s$  - odpowiedź jednostkowa na oddziaływanie sterujące  $S$  /rys.23/.

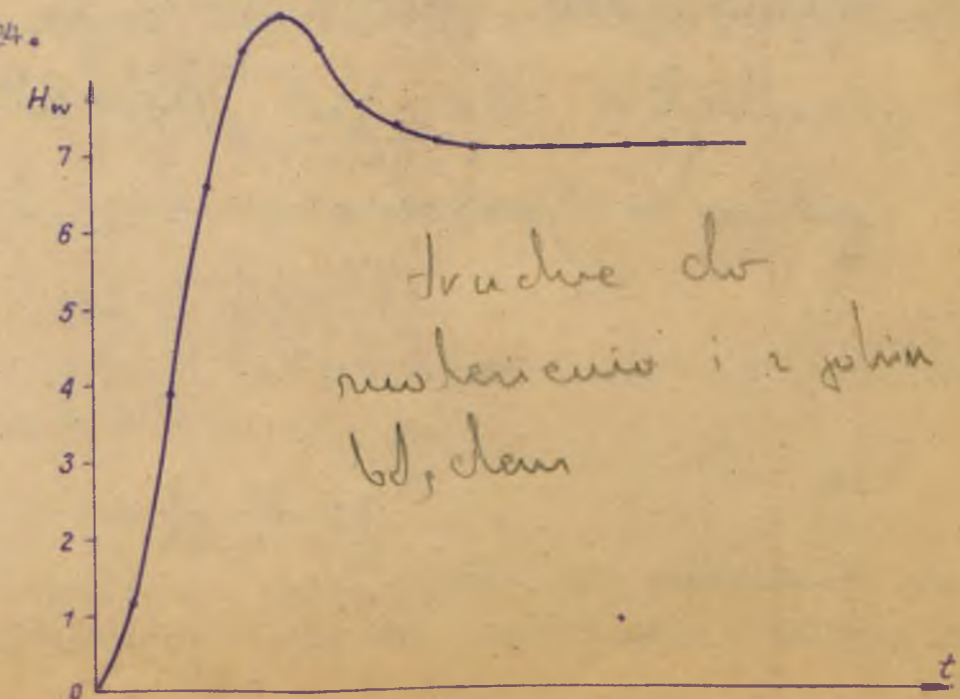


Rys. 21

Należy określić regulator, przy którym odpowiedź na wymuszenie jednostkowe  $W = M$  będzie miała kształt jak

na rys.24.

Rys. 22



siacnie unie

$$A_r A_s X = H_w - A_s X$$

De lura medaly no x unie x,  
dym to p

low x,

1) lura ng

1)

$$a) \frac{H_w}{X} - 1 = H_0$$

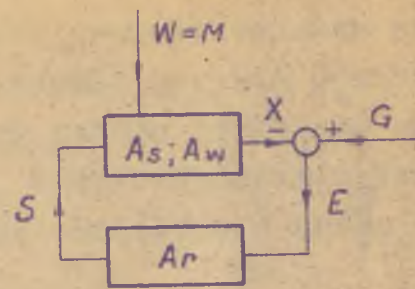
$$a) S = \frac{H_w - X}{X}$$

$$b) \frac{H_0}{A_s} = A_r$$

$$b) A_r = \frac{S}{X}$$

Omzyrac  $G=0$  uicmruuuu de

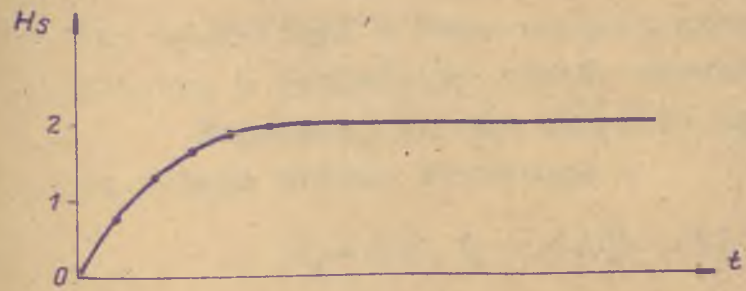
Waiue. dlu no dca unie x,  
regulo dca Ar jod chw unie x  
jedlu h cr unie wcy dlu dca



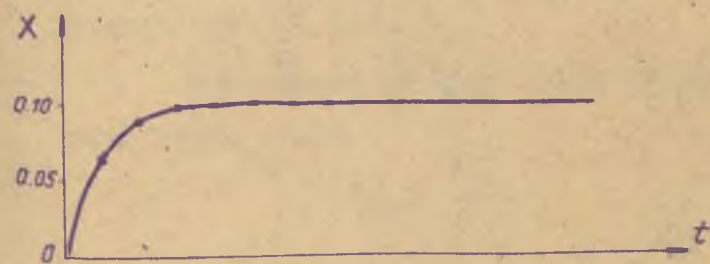
Rys. 25

Schemat blokowy układu regulacji jest podany na rys. 25.

Oznaczmy przepustowość  $\frac{X}{S}$  przez  $A_w$ , przepustowość  $\frac{X}{E}$  przez  $A_s$ , przepustowość regulatora  $\frac{S}{E}$  przez  $A_r$ . Ogólny wzór na wielkość X ma postać



Rys. 23



Rys. 24

$$X = G \frac{A_r A_s}{1 + A_r A_s} + M \frac{A_w}{1 + A_r A_s} \dots\dots 128$$

Wielkość szukaną wyraża druga część wzoru /128/. Możemy dla rozpatrywania interesujących przebiegów przejściowych przyjąć  $G=0$  i wówczas

$$X = M \frac{A_w}{1 + A_r A_s} \dots\dots 129$$

Przekształcając wzór /129/ otrzymamy

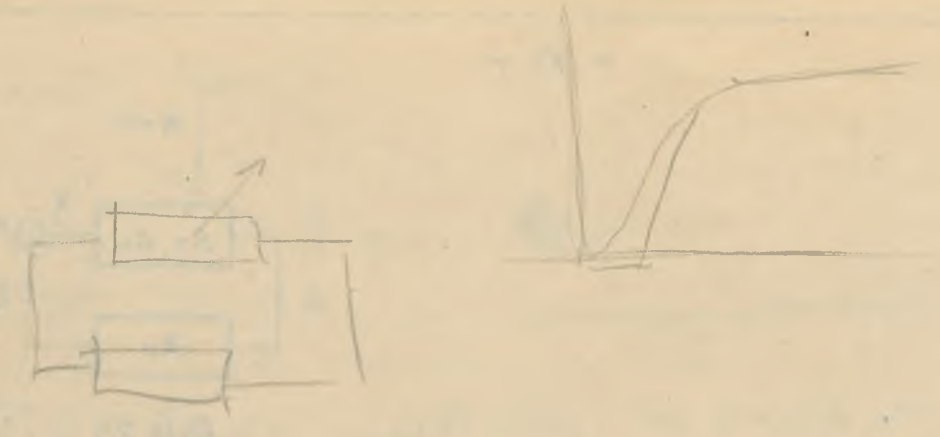
$$A_r = \frac{1}{A_s} \left( \frac{M A_w}{X} - 1 \right) \dots\dots 130$$

Jeśli mamy daną - jak założyliśmy - odpowiedź jednostkową  $X_w$  zmian przepustowości  $A_w$ , to

$$A_r = \frac{1}{A_s} \left( \frac{H_w}{X} - 1 \right) \dots\dots 131$$

Przeprowadzone dotąd algebraiczne postępowanie stanowi wprowadzie drogę do rozwiązania postawionego problemu, jednak

czy wie lepiej nie  
 bazyjnie sterowania  
 asynchronizacji  
 synchronizacji



$$\frac{A_w}{1 + A_r A_s} = K(p)$$

$$A_w = (1 + A_r A_s) K(p)$$

$$A_w = K(p) + A_r A_s K(p)$$

$$A_r = \frac{A_w - K(p)}{A_s K(p)}$$

$$= \frac{1}{A_s} \left( \frac{A_w}{K(p)} - 1 \right)$$

$$\left( \frac{A_w}{K(p)} - 1 \right) = K_0(p)$$

nie ma ono praktycznego charakteru. W praktyce rzadko występuje potrzeba ścisłego utrzymania zadanej krzywej przebiegu przejściowego - warunki stawiane są zwykle ogólniej, np. żąda się aperiodyczności przebiegu, nieprzekroczenia zadanej wartości przeregulowania, zachowania określonego czasu ustalania się.

Należy zatem tak dobierać X, a ściślej stosunek  $\frac{H_w}{X}$ , aby wynikająca z tego warunków charakterystyka regulatora mogła być w racjonalny sposób uzyskana.

Dogodniej byłoby określić najpierw odpowiedź jednostkową całego układu otwartego :

$$H_0 = M A_r A_s = M \left( \frac{H_w}{X} - 1 \right) \quad \dots\dots 132$$

Kształt tej funkcji, przy pewnym doświadczeniu, pozwoli konstruktorowi określić racjonalność postawionych warunków z punktu widzenia możliwości osiągnięcia zadanej charakterystyki  $M A_r A_s$ .

Odpowiedź jednostkową samego regulatora określimy potem łatwo jako

$$H_r = \frac{H_0}{A_s} \quad \dots\dots 133$$

Rozpatrzmy przykład liczbowy. Niech będą dane odpowiedzi  $H_w$  i  $H_s$  jak na rys. 22 i 23.

$H_w = 1.22, 3.85, 6.60, 8.42, 8.86, 8.37, 7.73, 7.36, 7.18, 7.10, 7.10, \dots$

$H_s = 0.8, 1.3, 1.7, 1.9, 2.0, 2.0, \dots$

Odpowiedź żądana X niech będzie jak na rys. 24 :

$X = 0.07, 0.09, 0.10, 0.10, \dots$

Mamy

$$\frac{H_w}{X} = 17.5, 32.5, 27.5, 13.5, -1.5, -8.5, -6.5, -2.14, -1.14, -0.5, 0.0, 0.0, \dots \quad \dots\dots 134$$

/wykonanie działania patrz tablica 7/

Stąd odpowiedź jednostkowa całego układu zamkniętego

$$H_0 = M / \frac{H_w}{X} - 1 / = 33.0, 65.0, 88.0, 92.0, 85.0, 75.0, 72.0, 70.7, 69.7, 69.7, \dots \quad \dots\dots 135$$

/wykonanie działania patrz tablica 8, wykres funkcji  $H_0$  - rys. 26.



Tablica 8

Wykonanie Grzebania  $H_0 = M / \frac{H_q}{X} - 1 /$  do str. 56

$\frac{H_q}{X} - 1 = 16.5, 32.5, 27.5, 13.5, -1.5, -8.5, -6.5, -2.14, -1.14, -0.5, 0.0, 0.0, \dots$

33.0, 65.0, 88.0, 92.0, 85.0, 75.0, 72.0, 70.7, 69.7, 69.7, ...

16.5, 32.5, 27.5, 13.5, -1.5, -8.5, -6.5, -2.14, -1.14, -0.5, 0.0, 0.0, :  $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}$

16.5 0 -16.5

= 32.5, 44.0, 13.5

32.5 0 -32.5

= 44.0, 46.0, -1.5

44.0 0 -44.0

= 46.0, 42.5, -8.5

46.0 0 -46.0

= 42.5, 37.5, -6.5

42.5 0 -42.5

= 37.5, 36.0, -2.14

37.5 0 -37.5

= 36.0, 35.86, -1.14

36.0 0 -36.0

= 35.86, 34.86, -0.5

35.86 0 -35.86

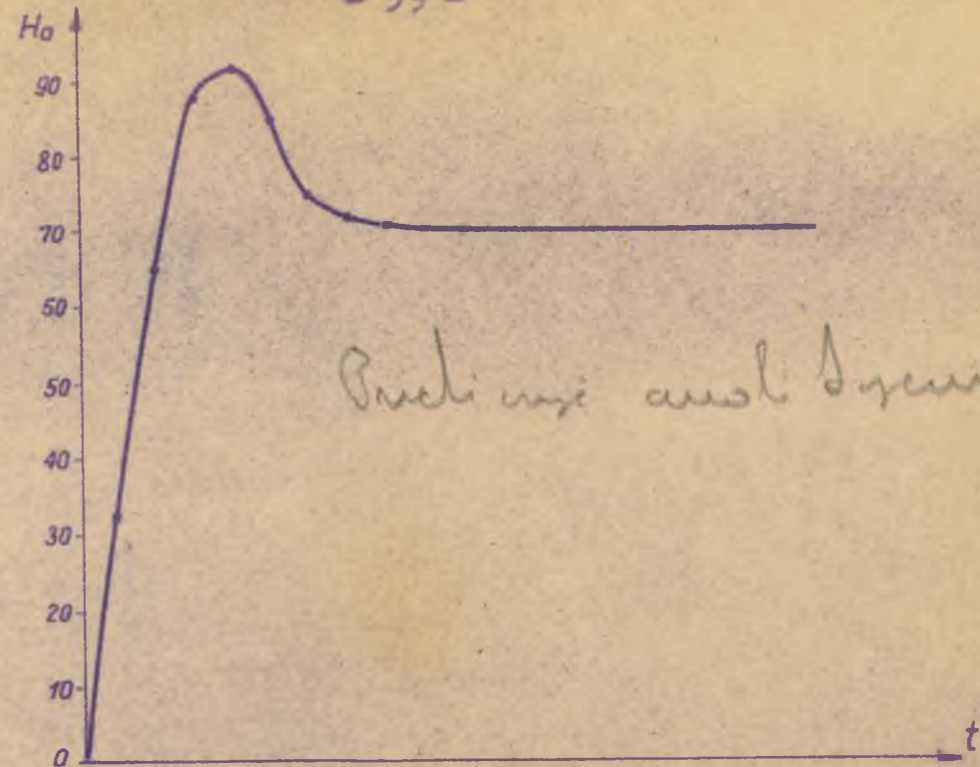
= 34.86, 34.86, 0.0

34.86 -34.86

= 34.86, 34.86, 0.0

1 ts.

Rys. 26



Odpowiedź jednostkowa regulatora wyniesie

$$H_r = \frac{H_0}{A_S} = 82.5, 28.3, 81.2, 4.25, 62.0, 0.0, 73.1, -0.5, 69.0, 0.78, 68.5, -1.1, 73.8, \dots \dots \dots 136$$

/wykonanie działania patrz tablica 9/

Otrzymany wynik  $H_r$  jest, jak wiadomo, obarczony uchybami w dalszych wyrazach. Można jednak wyraźnie określić, że przepustowość  $A_r$  musi być typu  $k_1 + K_2/s$ , podobnie jak w przykładzie na str. 37.

Przyjmując, że część bezinercyjna regulatora będzie miała wzmocnienie 35, otrzymamy dla niej

$$H_{r1} = 2, 0, 2, 0, \dots \times 35 = 70, 0, 70, 0, 70, 0, \dots \dots \dots 137$$

Odejmując  $H_{r1}$  od obliczonego  $H_r$ , otrzymamy operator  $H_{r2}$ , określający odpowiedź jednostkową drugiej części regulatora:

$$H_{r2} = 12.5, 28.3, 11.2, 4.25, -8.0, 0.0, 3.1, -0.5, -1.0, 0.78, -1.5, -1.1, 3.8, \dots \dots \dots 138$$

Wiedząc o dużych uchybach w dalszych wyrazach, można zapewne przyjąć

$$H_{r2} = 12.5, 28.3, 11.2, 4.25, -8.0, 0.0, 3.1, 0.0, 0.0, \dots \dots \dots 139$$

Dla uzyskania punktów wykresu  $H_r$ , trzeba do  $H_{r2}$  dodać ciąg liczbowy 35, 35, 35, 35, ... Otrzymamy

$$H'_r = 47.5, 63.3, 46.2, 39.25, 27.0, 35.0, 38.1, 35.0, 35.0, \dots \dots \dots 140$$

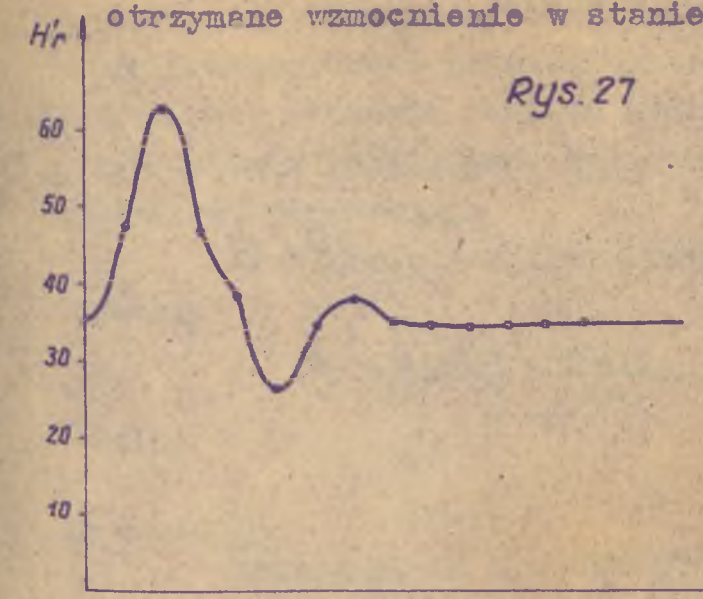




metoda c) nie wyraża  
 kombinacji z metodami  
 innymi i musi być  
 funkcją wyrażoną przez  
 funkcję czasu wyżej. —

1) nie musi być  
 do niego by regulacja  
numeryczna w zmiennych  
 w dziedzinie czasu

Funkcja  $H_r$  narysowana jest na rys.27. Zauważmy, że otrzymane wzmocnienie w stanie ustalonym, wynoszące dla całego obrotu  $\frac{7.0}{0.1} = 70$ , odpowiada tylko wymaganiom postawionym w zakresie usuwania wpływu zakłócenia.



Rys.27

W układach o zmiennej wielkości zadanej należy skontrolować, czy wzmocnienie jest wystarczające dla uzyskania zgodności wielkości regulowanej z zadaną.

b/ Metoda "od wyjścia ku wejściu".

Posługując się "klasycznym" podejściem, to jest operując algebraicznie przepustowościami elementów układu aż do uzyskania ostatecznego wzoru możemy spotkać się z potrzebą wielokrotnego dobierania  $X$ , co wiąże się z powtórzeniem pracy obliczeniowej.

Znaczne korzyści można osiągnąć, podchodząc do problemu nieco inaczej - w sposób, wykorzystujący izomorficzność operatora liczbowego z przebiegiem czasowym; cechą charakterystyczną tego podejścia będzie posuwanie się "od wyjścia ku wejściu".

Wielkość wyjściowa obiektu regulacji /parametr regulowany/ jest równa sumie rezultatów oddziaływań: zakłócającego  $W$  i sterującego  $S$ . Jeśli powstająca w obiekcie, w nieobecności oddziaływania sterującego, odpowiedź  $H_w$  chcemy zmniejszyć /mówiąc ogólnie - zmienić/, to musimy obok zakłócenia wprowadzić odpowiednie oddziaływanie sterujące.

Warunkiem wyjściowym będzie zatem przebieg żądany

$$X = H_w + R_s \quad \dots\dots 141$$

który łącznie z wielkością  $H_w$  określa potrzebne oddziaływanie sterujące  $S$ :

$$R_s = S \cdot A_s = X - H_w \quad \dots\dots 142$$

$$S = \frac{X - H_w}{A_s} \quad \dots\dots 143$$

Wielkość  $S$  jest wielkością wyjściową regulatora i za-

razem wielkością wejściową obiektu regulacji w miejscu nastawiania. Mając operator S jako wielkość pośrednią w toku obliczenia, mamy możliwość sprawdzić realność założonego X z punktu widzenia zerówno możliwości uzyskania przebiegu S na wyjściu regulatora, jak i możliwości jego przyłożenia do obiektu regulacji.

Wielkością wejściową regulatora jest oczywiście - X, zatem

$$A_r = \frac{S}{-X} = \frac{H_w - X}{X A_s} \dots\dots 144$$

albo  $A_s = \frac{X}{J}$

$$X A_r A_s = H_w - X \dots\dots 145$$

Zauważmy, że w wielu przypadkach prawa część równania /145/ mało różni się od  $H_w$ ; zwykle bowiem żądamy bardzo znacznego zmniejszenia wpływu zakłóceń, tj. bardzo małego X w porównaniu z pierwotnym  $H_w$ . Zatem w przybliżeniu\*)

$$X A_r A_s \cong H_w \dots\dots 146$$

Wzór /146/ wyraża, że odpowiedź na oddziaływanie sterujące /mierzona na wyjściu obiektu regulacji/ ma być w przybliżeniu równa odpowiedzi na zakłócenie, przy czym wielkość wywołującą oddziaływanie sterujące /X/ należy dobrać w sposób zgodny z postawionymi warunkami.

Można stąd od razu wyciągnąć pewne wnioski - na przykład, jeśli w krzywej  $H_w$  występuje "przeregulowanie", które ma być usunięte na rzecz przebiegu X o charakterze jednostajnie wzrastającym aż do osiągnięcia stanu ustalonego, to przepustowość  $A_r A_s$  musi zapewnić istnienie "przeregulowania", przy pobudzeniu wielkością X, a więc często również przy pobudzeniu skokiem jednostkowym.

Jako przykład liczbowy rozpatrzmy dobranie regulatora do obiektu, mającego charakterystyki  $H_w$  i  $H_s$  podane na rys. 28 i rys. 29. Żądany, by po dodaniu regulatora odpowiedź

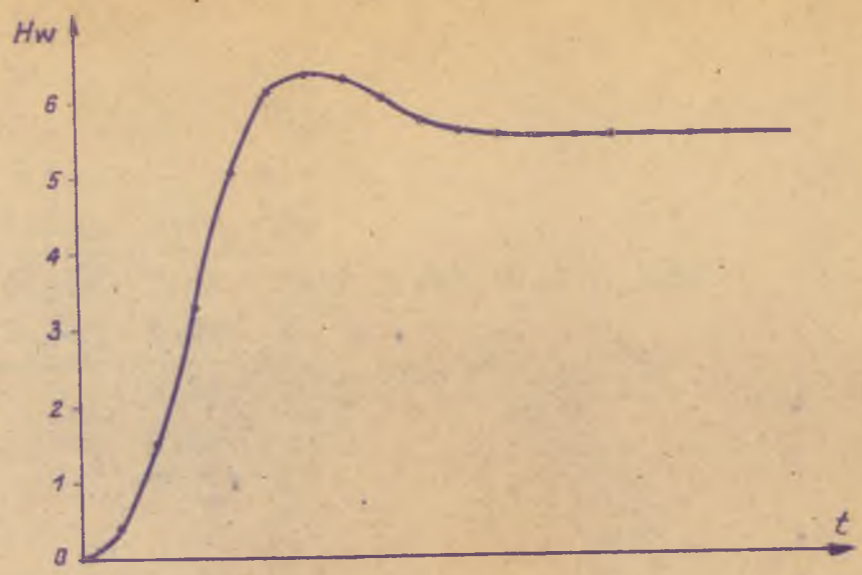
\*) Wzór /146/ można stosować, gdy wszystkie rzędne X są znacznie mniejsze od odpowiadających im rzędnych  $H_w$ . Nie odpowiada to bynajmniej jakiemś najprostszemu regulatorowi.

Co do licznika i stowa  
Idumacrent

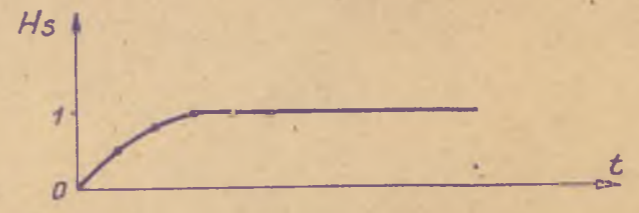
nie w mowie 145 wyniku

przebiegi i porównaniu jej  
wyprawa w celu mowy 141





Rys. 28



Rys. 29

jednostkowa obiektu miała kształt X, podany na rys. 24.

Pierwszą wielkością, jaką należy obliczyć, jest potrzebne oddziaływanie sterujące S /dla uproszczenia przyjmujemy je jako do-

datnie; zakładamy, że układ jest prawidłowo zbudowanym układem regulacji/ :

$$S = \frac{H_w - X}{A_s} \dots\dots 147$$

$H_w - X$  obliczymy łatwo przez odejmowanie - założmy, że

$$H_w = 0.375, 1.50, 3.34, 5.19, 6.44, 6.93, 6.88, 6.61, 6.35, 6.19, 6.12, 6.10, 6.10, \dots$$

$$X = 0.07, 0.09, 0.10, 0.10, \dots$$

$$H_w - X = 0.305, 1.41, 3.24, 5.09, 6.34, 6.83, 6.78, 6.51, 6.25, 6.09, 6.02, 6.00, 6.00, \dots$$

$A_s$  obliczymy na podstawie odpowiedzi  $H_s$  ; przy  $H_s$  wynoszącym

$$H_s = 0.5, 0.8, 1.0, 1.0, \dots \text{ /rys. 29/}$$

przepustowość  $A_s$  wynosi

$$A_s = 0.25, 0.40, 0.25, 0.10, 0.00, 0.00, \dots \dots\dots 148$$

Wykonując wskazane wyżej dzielenie /tablica 10/, otrzymamy

$$S = 1.22, 3.69, 5.82, 6.87, 7.06, 6.85, 6.38, 6.18, 6.02, 6.00, 6.00, \dots \dots\dots 149$$

Tablica 10

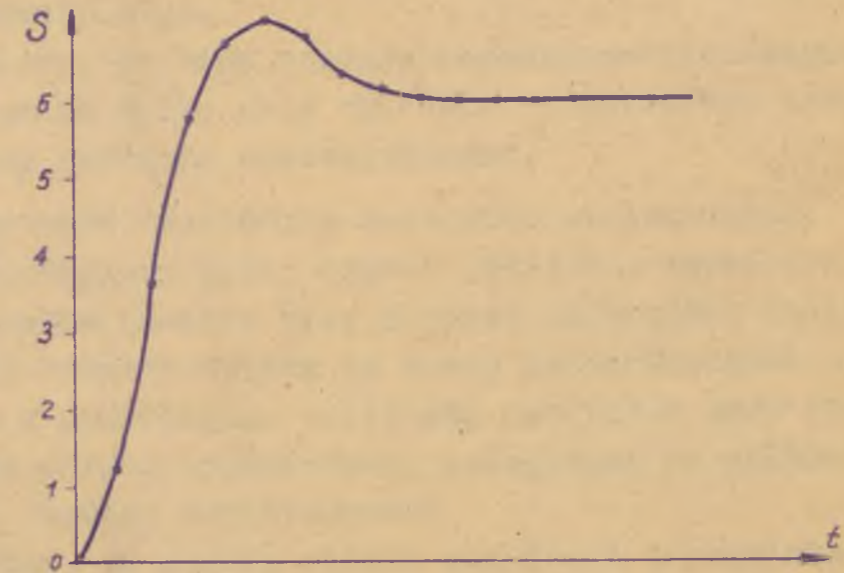
Wykonanie działania  $\frac{H_0 - X}{A_n} = S$  do str. 63

1.22,	3.69,	5.82,	6.87,	7.06,	6.85,	6.38,	6.18,	6.02,	6.03,	5.98,	6.02,	6.02, ...
0.305,	1.41,	3.24,	5.09,	6.34,	6.83,	6.78,	6.51,	6.25,	6.09,	6.02,	6.00,	6.00, ... : 0.25, 0.40, 0.25, 0.10
0.305	0.428	0.305	0.122									
"	0.922	2.935	4.968	6.34								
	0.922	1.478	0.922	0.369								
	"	1.457	4.046	5.971	6.83							
		1.457	2.330	1.457	0.582							
	"	1.716	4.514	6.248	6.78							
		1.716	2.750	1.716	0.687							
	"	1.764	4.532	6.093	6.51							
		1.764	2.822	1.764	0.706							
	"	1.710	4.329	5.804	6.25							
		1.710	2.736	1.710	0.685							
	"	1.593	4.094	5.565	6.09							
		1.593	2.550	1.593	0.638							
	"	1.544	3.972	5.452	6.02							
		1.544	2.470	1.544	0.618							
	"	1.502	3.908	5.402	6.00							
		1.502	2.403	1.502	0.602							
	"	1.505	3.900	5.398	6.00							
		1.505	2.408	1.505	0.603							
	"	1.492	3.893	5.397 ...								
		1.492	2.390	1.492 ...								
	"	1.503	3.905 ...									
		1.503	2.403 ...									
			1.502 ...									

S ≈ 1.22, 3.69, 5.82, 6.87, 7.06, 6.85, 6.38, 6.18, 6.02, 6.00, 6.00, ...

Wykres S podany jest na rys. 30. Zauważmy, że niedokładności w obliczeniu dalszych wyrazów S można tu było poprawić na podstawie spodziewanego stanu ustalonego. Mianowicie,

Rys. 30



przebieg S ma wywołać na wyjściu obiektu regulacji przebieg  $H_w - X$ , wynoszący w stanie ustalonym 6.00. Ponieważ odpowiedź  $H_s$  w stanie ustalonym wynosi 1.00, zatem ustalona część przebiegu S musi wynosić  $\frac{6.00}{1.00} = 6.00$ .

Mając wykres przebiegu S mamy możliwość zorientować się, czy np. wartość chwilowa  $s = 7.06$  mieści się w liniowym zakresie charakterystyk obiektu regulacji.

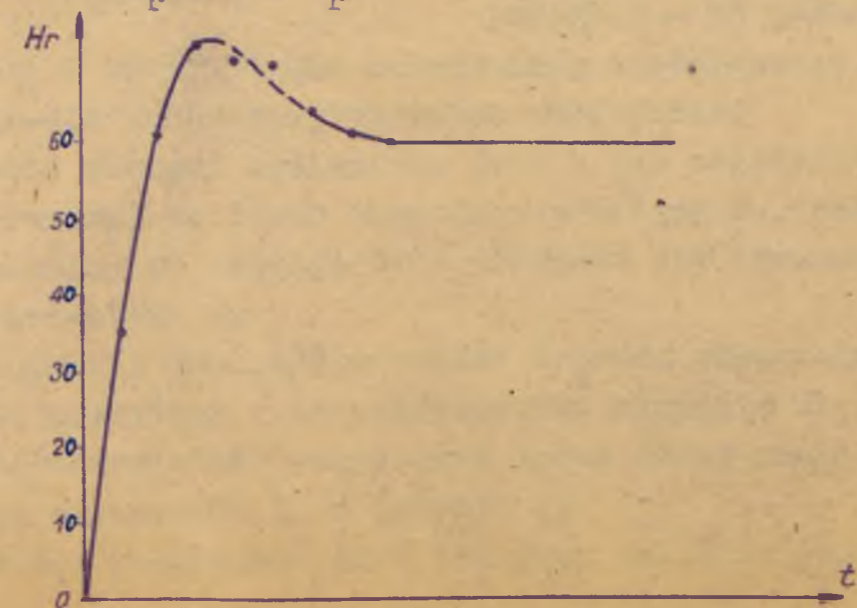
Poszukiwany regulator powinien mieć przepustowość

$$A_r = \frac{S}{X} \dots\dots 150$$

czyli odpowiedź jednostkową /rys.31/

$$H_r = M \cdot A_r \dots\dots 151$$

Rys. 31



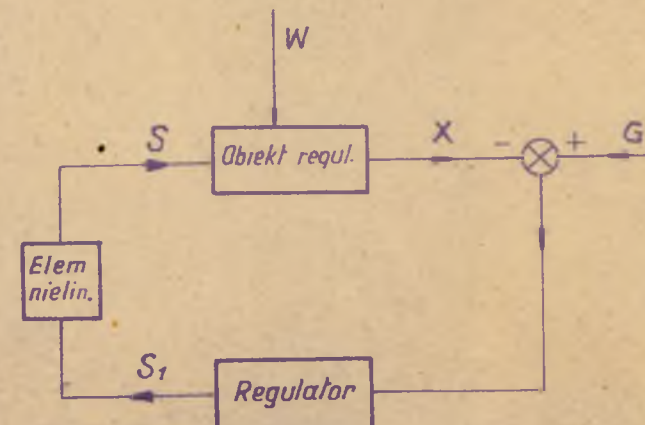
Odpowiednie działania wykonane w tabelicy 11 i 12. W stosunku do  $H_r$  dalsze, mało dokładne wyrazy poprawiono na podstawie rozważania stanu ustalonego - ustalona wartość  $x_{ust} = 0.10$  ma wywołać  $s_{ust} = 6.00$ , zatem ustalona wartość  $H_r$  musi wynosić 60.0.

Zauważmy, że tego rodzaju pomocnicze rozważanie może być zastosowane tylko przy układzie o działaniu proporcjonalnym /przy układzie niecałkującym/.

c/ Rozwiązywanie niektórych zagadnień nieliniowych.

Przedstawiony wyżej sposób podejścia pozwala na uzyskanie rozwiązania również przy pewnych elementach nieliniowych w układzie. Wykorzystujemy tu znowu izomorficzność operatora liczbowego z przebiegiem czasowym; potrzebna jest przy tym konkretność danych wyjściowych, polegająca na całkowitym określeniu funkcji zakłócającej.

Załóżmy, że między obiekt regulacji i regulator włączono element nieliniowy /rys. 32/, którego charakterystyka nieliniowa ma charakter całkownicze statyczny, tj. nie zależy od przebiegów czasowych.



Rys. 32

Podobnie jak poprzednio, łatwo określimy potrzebne oddziaływanie sterujące S. Przy układzie całkownicze liniowym nie było w zasadzie konieczne określenie bezwzględnych wartości chwilowych S - tu jednak trzeba

oczywiście S obliczyć dla maksymalnej spodziewanej, a w każdym razie dla konkretnej wartości zakłócenia.

Jeśli element nieliniowy jest - jak założyliśmy wyżej - bezinercyjny, to łatwo określimy przebieg  $S_1$ , jaki musi być przyłożony na wejście tego elementu dla otrzymania na wyjściu przebiegu S;

trzeba poprostu przemnożyć rzędne S przez odpowiednie współczynniki, odczytane z charakterystyki elementu nieliniowego.

Charakterystykę regulatora łatwo dalej znaleźć posługując się otrzymanym  $S_1$  i zadanym X.

Trzeba podkreślić, że o ile przy układzie liniowym mo-

Tablica 11 Wykonanie działania  $\frac{S}{X} = A_T$  do str. 66

17.45,	30.3,	19.2,	5.22,	-1.49,	-3.33,	-5.54,	-0.0,	-1.24,	0.14,	0.14,...	0.0 ...
1.22,	3.69,	5.82,	6.87,	7.06,	6.85,	6.38,	6.18,	6.02,	6.00,	6.00,...	0.07, 0.09, 0.10, 0.10
1.22	1.569	1.745	1.745	1.745	1.745	1.745	1.745	1.745	1.745	1.745 ...	
=	2.121	4.075	5.125	5.315	5.105	4.635	4.435	4.275	4.255	4.255 ...	
	2.121	2.730	3.03	3.03	3.03	3.03	3.03	3.03	3.03	3.03 ...	
=	1.345	2.095	2.285	2.075	1.605	1.405	1.245	1.225	1.225 ...		
	1.345	1.730	1.920	1.920	1.920	1.920	1.920	1.920	1.920 ...		
=	0.365	0.365	0.155	-0.315	-0.515	-0.675	-0.695	-0.695 ...			
	0.365	0.469	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522	0.522 ...			
=	-0.104	-0.367	-0.837	-1.037	-1.197	-1.217	-1.217 ...				
	-0.104	-0.134	-0.149	-0.149	-0.149	-0.149	-0.149 ...				
=	-0.233	-0.608	-0.888	-1.046	-1.068	-1.068 ...					
	-0.233	-0.300	-0.333	-0.333	-0.333	-0.333 ...					
=	-0.388	-0.555	-0.713	-0.735	-0.735 ...						
	-0.388	-0.499	-0.554	-0.554	-0.554 ...						
=	-0.056	-0.159	-0.181	-0.181 ...							
	-0.056	-0.072	-0.080	-0.080 ...							
=	-0.087	-0.101	-0.101 ...								
	-0.087	-0.111	-0.124 ...								
=	0.010	0.023	0.023 ...								
	0.010	0.013	0.014 ...								
=	0.010	0.009	0.013 ...								
			-0.004 ...								

Tabela 12

Wykonanie działania  $H = A_T \cdot \frac{A_p}{0.5, 0, -0.5} = H_T$

34.9, 60.6, 73.3, 71.0, 70.3, 64.4, 59.2, 62.8, 56.8, 63.0, 57.0, 63.0, 57.0, ...  
 17.45, 30.3, 19.2, 5.22, -1.49, -3.33, -5.54, -0.8, -1.24, 0.14, 0.14, 0.0, 0.0, : 0.5, 0, -0.5  
 17.45 0.0 -17.45

= 30.3 36.65 5.22  
 30.3 0.0 -30.3

= 36.65 35.52 -1.49  
 36.65 0.0 -36.65

= 35.52 35.16 -3.33  
 35.52 0.0 -35.52

= 35.16 32.19 -5.54  
 35.16 0.0 -35.16

= 32.19 29.62 -0.8  
 32.19 0.0 -32.19

= 29.62 31.39 -1.24  
 29.62 0.0 -29.62

= 31.39 28.38 0.14  
 31.39 0.0 -31.39

= 28.38 31.53 0.14  
 28.38 0.0 -28.38

= 31.53 28.52 0.0  
 31.53 0.0 -31.53

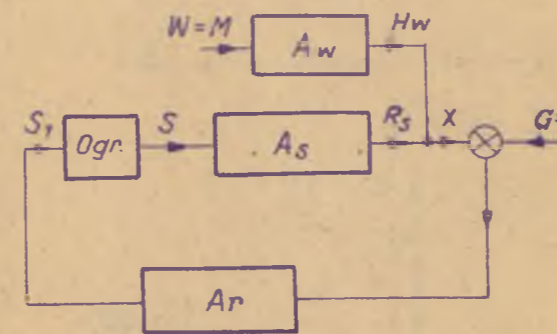
= 28.52 31.53 0.0

$H_T = 34.9, 60.6, 73.3, 71.0, 70.3, 64.4, 61, 60, 60, 60, \dots$



Żliwe było określenie przepustowości całego zamkniętego układu jako pewnej stałej wielkości charakterystycznej, to tu oczywiście dla każdej nowej wartości zakłócenia trzeba obliczenie przeprowadzać na nowo.

Jako przykład rozpatrzmy układ z ogranicznikiem, przedstawiony na rys. 33. Ogranicznik jest tu włączony między regulator i obiekt regulacji i

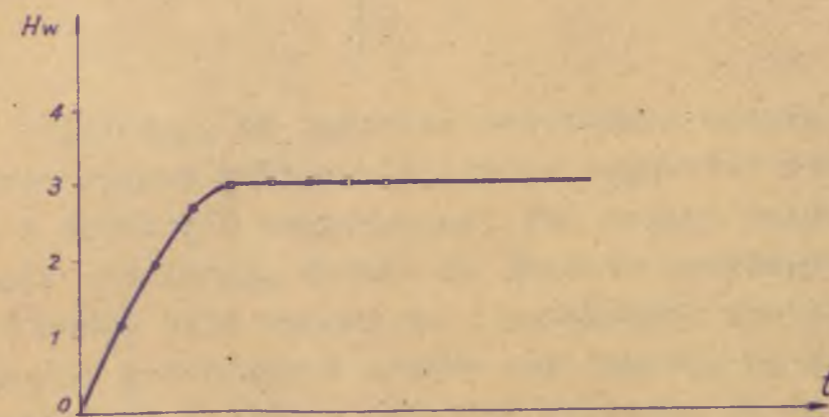


Rys. 33

symbolizuje, że wartość chwilowa dopuszczalnego czy też skutecznie działającego oddziaływania sterującego jest ograniczone. Ograniczenie takie jest możliwe z dwóch przyczyn ; 1/ obiekt jest nieliniowy /nasyca się/, albo 2/ obiekt, z pewnych względów,

nie może być poddany oddziaływaniu większemu od granicznego. Jako wielkości wyjściowe mamy dane :

odpowiedź jednostkową na zakłócenie /rys. 34/ :  
 $H_w = 1.15, 1.93, 2.70, 2.97, 2.99, 3.00, 3.00 \dots$



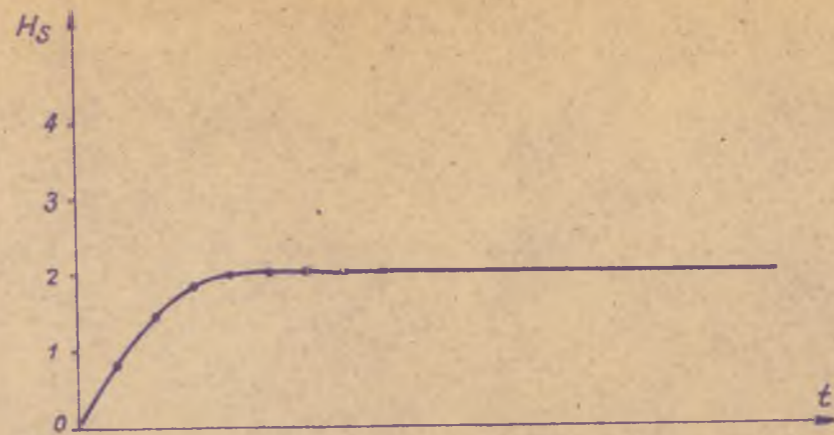
Rys. 34

odpowiedź jednostkową na oddziaływanie sterujące /rys. 35/ :

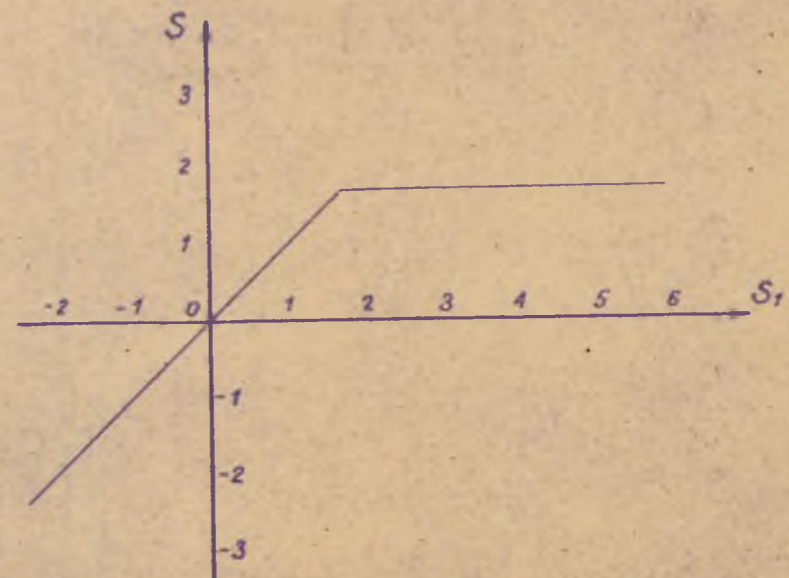
$H_s = 0.8, 1.4, 1.8, 2.0, 2.0, \dots$

charakterystykę ogranicznika /rys. 36/.

Znalezienie przebiegu S przez proste dzielenie operatorów, po założeniu sobie przebiegu X, nie prowadzi do celu wobec obecności elementu nieliniowego.



Rys. 35



Rys. 36

Załóżmy, że zadaniem regulatora będzie całkowite usunięcie wpływu zakłócenia /zatem regulator musi być regulatorem o działaniu całkującym/. Aby usunąć wpływ zakłócenia w stanie ustalonym, trzeba do obiektu przyłożyć wartość ustaloną  $S$  równą 1.5; wynika to z ustalonych wartości  $H_w$  oraz  $H_s$ . Początek przebiegu  $S$  trzeba tak dobrać, by osiągnąć możliwie najmniejsze i szybko malejące wartości  $X$ . Załóżmy najpierw, że  $S = 1.5, 1.5, 1.5, \dots$ . Przebieg taki zapewni właściwą wartość  $X$  dla stanu ustalonego, gdyż będzie wówczas  $R_s$  ustalone równe 3.0, i zatem  $X_{ust} = 0$ . /Zakładam przy tym, że  $R_s$  ma znak przeciwny do  $H_w$ , oraz ogólnie, że sprzężenie zwrotne w układzie jest właściwe tj. ujemne/.

Jako czynność wstępną musimy obliczyć przepustowość  $A_s$  /tablice 13/.

Mnożąc następnie  $S = 1.5, 1.5, 1.5, \dots$  przez  $A_s$ , otrzymujemy

$$R_s = 0.6, 1.65, 2.40, 2.85, 3.00, 3.00, \dots$$

Faint, illegible text on the left page, possibly bleed-through from the reverse side.



Tablica 13

Obliczenie przepustowości  $A_s$  do str. 70

0.8,	1.4,	1.8,	2.0,	2.0,	2.0,	...	$\times 0.5,$	0,	-0.5
0.4,	0.7,	0.7,	1.0,	1.0,	1.0,	...			
			-0.4,	-0.7,	-0.9,	-1.0,	...		
0.4,	0.7,	0.5,	0.3,	0.1,	0.0,	...			

Działanie to jest wykonane w górnej części tablicy 14. Zauważmy, że pierwsze wartości  $R_S$  znacznie różnią się od  $H_W = 1.15, 1.93, 2.70, 2.97, 2.99, 3.00, 3.00, \dots$ ; przy tym nie wykorzystaliśmy możliwości elementu nieliniowego, który dopuszcza wartość chwilową 1.7. Dodajmy  $0.2 \cdot A_S$  do otrzymanej odpowiedzi  $R_S$  - otrzymamy

$$\begin{array}{r} 0.6, 1.65, 2.40, 2.85, 3.00, 3.00, 3.00, \dots \\ + 0.08, 0.14, 0.10, 0.06, 0.02 \\ \hline \end{array}$$

$$0.68, 1.79, 2.50, 2.91, 3.02, 3.00, 3.00, \dots$$

Odchylenie od  $H_W$  daje jeszcze wyraz drugi - wynosi on 1.79 zamiast ok. 2.0. Dodajmy do otrzymanego przebiegu przebieg  $/0.0, 0.2/ \cdot A_S$  - jest to równoważne ze zwiększeniem drugiego wyrazu  $S$  do wartości 1.7. Otrzymujemy

$$\begin{array}{r} 0.68, 1.79, 2.50, 2.91, 3.02, 3.00, 3.00, \dots \\ + 0.08, 0.14, 0.10, 0.06, 0.02 \\ \hline \end{array}$$

$$0.68, 1.87, 2.64, 3.01, 3.08, 3.02, 3.00, \dots$$

Wyraz trzeci odpowiada w przybliżeniu trzeciemu wyrazowi  $H_W$  - natomiast wyrazy czwarty, piąty i szósty przebiegu  $R_S$  są za duże. Dodajmy przebieg  $/0.0, 0.0, 0.0, -0.2/ \cdot A_S$ :

$$\begin{array}{r} 0.68, 1.87, 2.64, 3.01, 3.08, 3.02, 3.00, 3.00, 3.00, \dots \\ -0.08, -0.14, -0.10, -0.06, -0.02, \\ \hline \end{array}$$

$$0.68, 1.87, 2.64, 2.93, 2.94, 2.92, 2.94, 2.98, 3.00, \dots$$

oraz jeszcze przebieg  $/0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.1/ A_S$ :

$$\begin{array}{r} 0.68, 1.87, 2.64, 2.93, 2.94, 2.92, 2.94, 2.98, 3.00, 3.00, \dots \\ + 0.04, 0.07, 0.05, 0.03, 0.01 \\ \hline \end{array}$$

$$0.68, 1.87, 2.64, 2.93, 2.98, 2.99, 2.99, 3.01, 3.01, 3.00, \dots$$

Ostatnio otrzymany przebieg  $R_S$  można przyjąć jako wystarczający - mamy zatem

$$S = 1.7, 1.7, 1.5, 1.3, 1.6, 1.5, 1.5, 1.5, \dots$$

..... 152

oraz

$$X = H_W - R_S = 0.47, 0.06, 0.06, 0.04, 0.01, 0.01, 0.01, -0.01, -0.01, 0.00, 0.00; \dots$$

..... 153

Tablica 14

Wykonanie działań do str.72

	1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, ... x 0.4, 0.7, 0.5, 0.3, 0.1
	0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6, ...
	1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05, 1.05, ...
	0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, ...
	0.45, 0.45, 0.45, 0.45, 0.45, 0.45, 0.45, 0.45, 0.45, 0.45, 0.45, 0.45, ...
	0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, 0.15, ...
$R_B :$	0.6, 1.65, 2.40, 2.95, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, ...
$0.2 \cdot A_B :$	0.08, 0.14, 0.10, 0.06, 0.02
$/0.0, 0.2/ A_B :$	0.68, 1.79, 2.50, 2.91, 3.02, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, ...
	0.08, 0.14, 0.10, 0.06, 0.02
$/0.0, 0.0, 0.0, -0.2/A_B :$	0.68, 1.87, 2.64, 3.01, 3.08, 3.02, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, ...
	-0.08, -0.14, -0.10, -0.06, -0.02
$/0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.1/A_B :$	0.68, 1.87, 2.64, 2.93, 2.94, 2.92, 2.94, 2.92, 3.00, 3.00, 3.00, 3.00, ...
	0.04, 0.07, 0.05, 0.03, 0.01,
	0.68, 1.87, 2.64, 2.93, 2.98, 2.99, 2.99, 3.01, 3.01, 3.00, 3.00, 3.00, ...

Zadaniem regulatora będzie dać przebieg

$$S_1 = a, b, 1.5, 1.3, 1.6, 1.5, 1.5, \dots \dots\dots 154$$

gdzie a, b są dowolne i  $i \gg 1.7$ , przy przebiegu wejściowym X. Załóżmy, że regulator jest bezinercyjnym członem osłabiającym /bezinercyjny człon astatyczny/. Otrzymamy wówczas na wyjściu regulatora przebieg

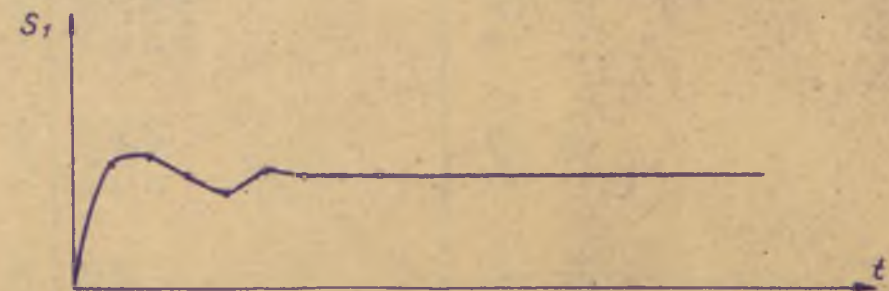
$$X \cdot \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \dots = 0.235, 0.50, 0.56, 0.61, 0.635, 0.645, 0.655, 0.655, 0.645, 0.640, 0.640, \dots \dots\dots 155$$

/patrz tablica 15/.

Przebieg ten nie jest zgodny z przebiegiem  $S_1$ . Zgodność dla stanu ustalonego otrzymamy, mnożąc otrzymany operator przez 2.34 - odpowiada to przyjęciu, że przepustowość regulatora wynosi 1.17, 2.34, 2.34, ... . Aby uzyskać zgodność przebiegu na wyjściu regulatora z przebiegiem  $S_1$  w stanie nieustalonym, należy jeszcze do tej przepustowości dodać pewne wyrazy; dodajmy najpierw do otrzymanego przebiegu przebieg  $2.5 \cdot X$ :

$$\begin{array}{r} 0.550, 1.170, 1.310, 1.427, 1.486, 1.509, 1.533, 1.533, 1.509, 1.498, 1.498, \dots \\ 1.175, 0.150, 0.150, 0.100, 0.025, 0.025, 0.025, -0.025, -0.025 \\ \hline 1.725, 1.320, 1.460, 1.527, 1.511, 1.534, 1.558, 1.508, 1.484, 1.498, 1.498, \dots \end{array}$$

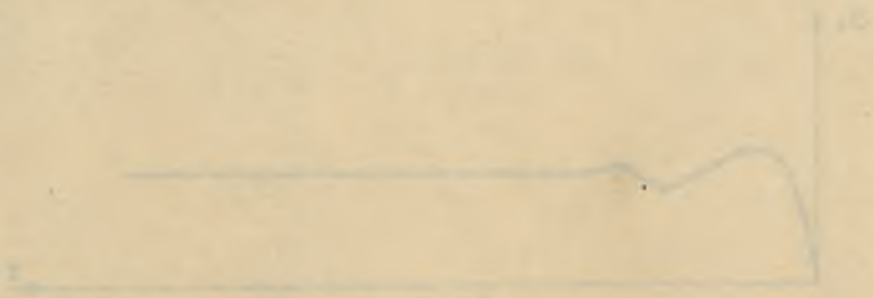
Postępując dalej w podobny sposób /co jest wykonane w tablicy 16/, otrzymujemy przepustowość regulatora  $A_r$ . Rozwiązanie zagadnienia nie jest jednak jedyne ze względu na dużą dowolność wyrazów a, b. Przyjmując, jak zrobiono w tablicy 16,  $a = 1.72$ ,  $b = 1.79$ , otrzymujemy rozwiązanie w pewnym sensie optymalne /rys. 37/. Otrzymaną przepustowość regulatora



Rys. 37

$A_r$  można zapisać jako

$$1.17, 2.34, 2.34 \dots + 2.5, 1.0, -0.045, -0.60, 0.19, -0.03, -0.11, -0.02, 0.08, 0.03, -0.02 =$$



Tablica 15 Wykonanie dzielenia  $x \cdot \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \dots$  do str. 74

0.47,	0.06,	0.06,	0.04,	0.01,	0.01,	0.01,	-0.01,	$x \cdot \frac{1}{2},$	1,	1,	1,	...
0.235	0.03	0.03	0.02	0.005	0.005	0.005	-0.005	-0.005	-0.01	-0.01	-0.01	...
0.47	0.06	0.06	0.06	0.04	0.04	0.04	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	...
	0.47	0.47	0.47	0.06	0.06	0.06	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	...
				0.47	0.47	0.47	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	...
							0.47	0.47	0.47	0.47	0.47	...

0.235, 0.50, 0.56, 0.61, 0.635, 0.645, 0.655, 0.655, 0.645, 0.640, 0.640, ... x 2.34

= 0.550, 1.170, 1.310, 1.427, 1.486, 1.509, 1.533, 1.533, 1.509, 1.498, 1.498, ...

Tablica 16 Wykonanie działań do str. 74

	0.550, 1.170, 1.310, 1.427, 1.486, 1.509, 1.533, 1.533, 1.509, 1.498, 1.498, ...
2.5 . X :	1.175, 0.150, 0.150, 0.100, 0.025, 0.025, 0.025, -0.025, -0.025
	1.725, 1.320, 1.460, 1.527, 1.511, 1.534, 1.558, 1.508, 1.484, 1.498, 1.498, ...
/0.0, 1.0/X :	0.470, 0.060, 0.060, 0.040, 0.010, 0.010, 0.010, -0.010, -0.010
	1.790, 1.520, 1.527, 1.551, 1.544, 1.568, 1.512, 1.474, 1.482, 1.498, ...
/0.0, 0.0, -0.045/X :	-0.021, -0.003, -0.003, -0.002, 0.000, 0.000, ...
	1.499, 1.504, 1.504, 1.502, 1.568, 1.512, 1.474, 1.482, 1.498, 1.498, ...
/0.0, 0.0, 0.0, -0.60/X :	-0.202, -0.036, -0.036, -0.024, -0.006, -0.006, -0.006, 0.006, 0.006
	1.302, 1.512, 1.506, 1.544, 1.512, 1.460, 1.482, 1.504, 1.504, 1.498, 1.498, ...
/0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.19/X :	0.089, 0.011, 0.011, 0.008, 0.002, 0.002, 0.002, -0.002, -0.002
	1.601, 1.517, 1.555, 1.520, 1.470, 1.484, 1.506, 1.502, 1.496, 1.498, ...
/0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -0.03/X :	-0.014, -0.002, -0.002, -0.001, -0.000, ...
	1.503, 1.553, 1.512, 1.480, 1.484, 1.506, 1.502, 1.496, 1.498, 1.498, ...
/0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -0.11/X :	-0.052, -0.007, -0.007, -0.004, -0.001, -0.001, -0.001, 0.001, 0.001
	1.501, 1.511, 1.462, 1.480, 1.505, 1.501, 1.495, 1.499, 1.499, 1.498, ...
/0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -0.02/X :	-0.009, -0.001, -0.001, -0.001, 0.000, ...
	1.502, 1.461, 1.479, 1.504, 1.501, 1.495, 1.499, 1.499, 1.498, 1.498, ...
/0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.02/X :	0.038, 0.005, 0.005, 0.003, 0.001, 0.001, 0.001, -0.001, -0.001
	1.497, 1.484, 1.509, 1.504, 1.496, 1.500, 1.500, 1.497, 1.497, 1.498, ...
/0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.03/X :	0.014, 0.002, 0.002, 0.001, 0.000, ...
	1.498, 1.511, 1.506, 1.497, 1.500, 1.500, 1.497, 1.497, 1.498, ...
/0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, -0.02/X :	-0.009, -0.001, -0.001, -0.001, ...
	1.725, 1.790, 1.499, 1.302, 1.601, 1.503, 1.501, 1.502, 1.499, 1.498, 1.502, 1.505, 1.496, 1.501, 1.500, 1.497, 1.497, 1.498, ...



= 3.67, 3.34, 2.29, 1.74, 2.53, 2.31, 2.23, 2.32, 2.42, 2.37, 2.32,  
2.34, 2.34 ...

Odpowiedź jednostkowa regulatora wyniesie

$$H_r = A_r \cdot M = \frac{A_r}{0.5, 0, -0.5} = 7.34, 6.68, 11.92, 10.16, 16.98, 14.78, \\ 21.44, 19.42, 26.28, 24.16, 30.22, 28.84, 35.60, 33.52, \dots \\ \dots\dots 156$$

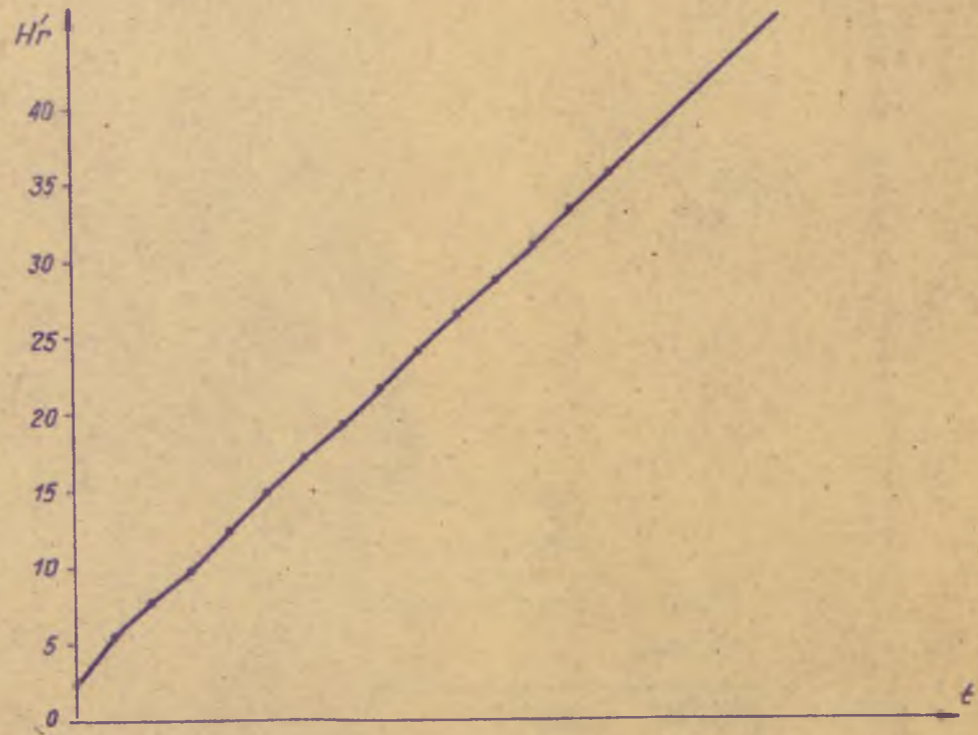
/działanie wykonane w tabelicy 17/.

Od operatora tego trzeba odjąć operator 4.42, 0.0, 4.42, 0.0, 4.42, ... odpowiadający skokowi jednostkowemu o wysokości 2.21.

Otrzymamy wówczas, dodając do wszystkich wyrazów 2.21, rzędne skorygowanego wykresu  $H_r'$ , tj. krzywą  $H_r'$ , rys. 38 /przy czym wykres rozpoczyna się od 2.21 dla  $t = 0$ /:

$$H_r' = 5.13, 7.59, 9.71, 12.37, 14.77, 16.99, 19.23, 21.63, 24.07, \\ 26.37, 28.71, 31.05, 33.39, 35.73, \dots \dots\dots 157$$

Rys. 38

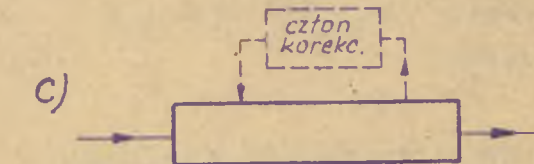
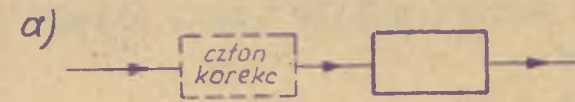


4.3.3. Określenie charakterystyk składowych części regulatora.  
 W podobny sposób, jaki daje się stosować do określenia charakterystyki regulatora jako całości, można z kolei określić żądane charakterystyki składowych części regulatora. Trzeba przy tym, opierając się na próbach lub doświadczeniu, założyć z góry strukturę regulatora. Zazwyczaj regulator bę-



dzie zawierał pewne części główne, np. wzmacniacz i silnik, oraz części dodatkowe służące do korekcji charakterystyki. Jak wiadomo, takie człony korekcyjne bywają włączane szeregowo lub równoległe, często zaś jako pomocnicze sprzężenie zwrotne /rys. 39 a, b, c/.

Zależnie od przypadku, może być racjonalniejszy jeden, drugi lub trzeci układ, albo też pewna ich kombinacja. Postępowanie należy rozpocząć od



określenie charakterystyki części głównych regulatora, a następnie dobierać człony korekcyjne, wybierając najdogodniejszą strukturę układu. Jako wielkość zadaną można wziąć odpowiedź jednostkową  $H_r$ , lub też przepustowość regulatora  $A_r$ .

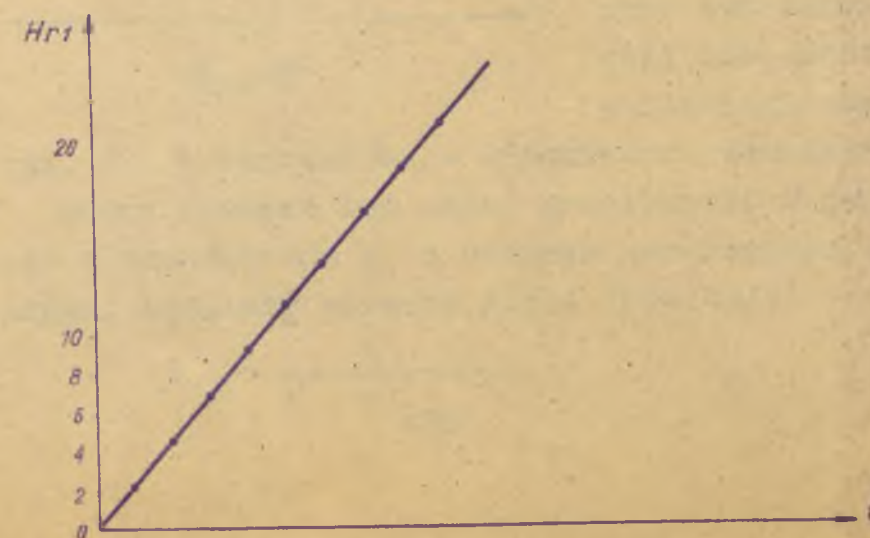
Rozpatrzmy budowę regulatora do ostatniego przykładu w poprzedniej części, tj. regulatora mającego odpowiedź jednostkową wyrażoną operatorem:

Rys. 39

$$H_r = 7.34, 6.68, 11.92, 10.16, 16.98, 14.78, 21.44, 19.42, 26.28, 24.16, 30.92, 28.84, 35.60, 33.52, \dots$$

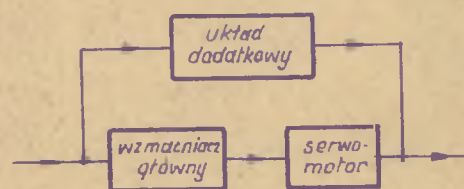
Przyjmijmy, że regulator będzie się składał z części głównych: wzmacniacza o wzmocnieniu 2.34 oraz serwomotoru o przepustowości  $\frac{1}{2}, 1, 1, 1, \dots$ . Mają one łączną odpowiedź jednostkową /rys. 40/.

Rys. 40



$$H_{r1} = 2.34, 4.68, 7.02, 9.36, 11.70, 14.04, \dots \dots \dots 158$$

Zauważmy, że potrzebnej korekcji w zasadzie nie można dokonać przy pomocy członu, włączonego w szereg z częściami głównymi regulatora, gdyż odpowiedź jednostkowa  $H'_r$  przedstawiona na rys. 38, nie może być uzyskana przy szeregowym włączeniu elementu całkującego. Pozostaje połączenie równoległe /rys. 41/, w którym równoległe do części głównych



Rys. 41

włączony jest układ dodatkowy mający przepustowość

$$A_{r2} = A_r - A_{r1} = 2.5, 1.0, -0.045, -0.60, 0.19, -0.03, -0.011, -0.02, 0.08, 0.03, -0.02 \dots \dots \dots 159$$

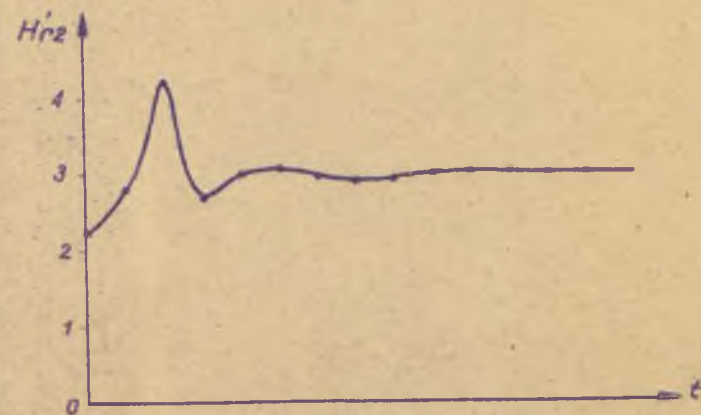
/por. wzory na str. 37 /.

Układ ten ma odpowiedź jednostkową

$$H_{r2} = M \cdot A_{r2} = 5.0, 2.0, 4.92, 0.80, 5.30, 0.74, 5.08, 0.70, 5.24, 0.76, 5.18, 0.76, 5.18, 0.76 \dots \dots \dots 160$$

/tablica 18/, przy czym odpowiedni skorygowany wykres /rys. 42/ ma rzędną dla  $t = 0$  równą 2.21 oraz rzędne następujące

$$2.79, 4.21, 2.71, 3.01, 3.09, 2.95, 2.87, 2.91, 3.03, 2.97, 2.97, 2.97, \dots \dots \dots 161$$



Rys. 42

Otrzymany układ dodatkowy może być zrealizowany w postaci wzmacniacza z członem korekcyjnym szeregowym; przy tym człon korekcyjny musi mieć charakterystykę w liczbach względnych jak

na rys. 42, a wzmacniacz - odpowiednio wzmocnienie.

Można również ten układ zrealizować w postaci wzmacniacza o wzmocnieniu  $a$  z członem korekcyjnym w sprzężeniu zwrotnym. Będziemy wówczas mieli /rys.43/:

$$A_{r2} = \frac{a}{1 + aA_{kor}} \dots \dots \dots 162$$



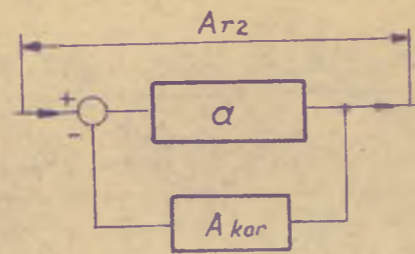
albo

$$A_{kor} = A_{r2}^{-1} - a^{-1} \dots\dots 163$$

W tabelicy 19 wykonano działanie

$$A_{r2}^{-1} = \frac{1}{A_{r2}}$$

Odpowiedź jednostkowa członu korekcyjnego  $H_{kor}$  będzie oczywiście równa  $M \cdot A_{kor}$ . Zauważmy, że pierwszy



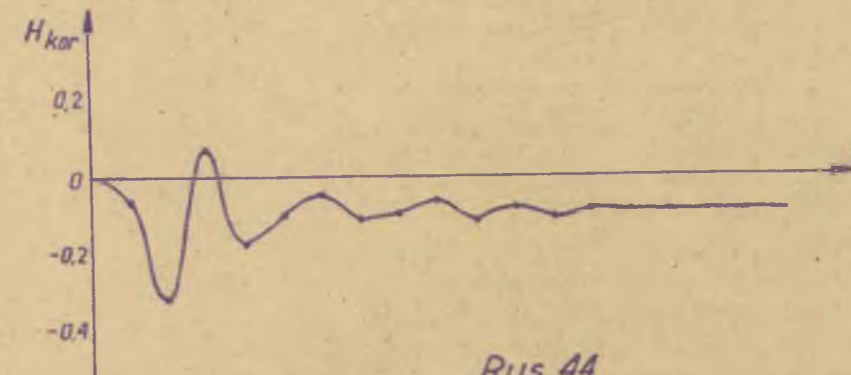
Rys. 43

wyraz  $A_{kor}$  możemy w pewnych granicach zmieniać, dobierając wzmacnienie  $a$ . Nie wpływa to jednak na zasadniczy kształt odpowiedzi jednostkowej  $H_{kor}$ , a tylko na jej wartość ustaloną. Zapiszmy  $A_{kor}$  w postaci

$$A_{kor} = /0.4 - a^{-1} /, -0.16, 0.071, 0.065, -0.094, 0.073, \\ -0.0032, -0.027, 0.026, -0.013, -0.0012, \\ 0.011, -0.0072, 0.0056, -0.0048, 0.0004.$$

..... 164

Wykonajmy teraz mnożenie  $A_{kor} \cdot M = A_{kor} \cdot 2,0, 2,0, \dots$  /tabela 20/ i wybierzmy  $b = 2a^{-1} = 0.863$ . Wówczas  $a = 2.31$ , a wartość ustalona  $H_{kor}$  wynosi  $-0.090$  /rys. 44/. Obierając



Rys. 44

inne  $a$ , otrzymamy  $H_{kor}$  nie zaczynające się od wartości 0 dla chwili  $t = 0$ .

Sprawdźmy przyjęte  $a$  wg stanu ustalonego, kiedy /por. rys. 42/ wzmacnienie całego układu musi wynosić ok. 2.97.

Otrzymujemy

$$\text{wzmacnienie w st. ustal.} = \frac{2.31}{1 - 0.090 \cdot 2.31} = 2.94$$

..... 165

Tablica 19 Wykonanie działania  $A_{r2}^{-1} = \frac{1}{A_{r2}}$  do str. 82

0.4, -0.16, 0.071, 0.065, -0.094, 0.073, -0.0032, -0.027, 0.026, -0.013, -0.0012, 0.011, -0.0072, 0.0056, -0.0048, 0.0004, ...

1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ... 2.5, 1.0, -0.045, -0.50, 0.19, -0.03, -0.11, -0.02, 0.08, 0.03, -0.02

= -0.4, 0.018, 0.24, -0.076, 0.012, 0.044, 0.008, -0.032, -0.012, 0.008  
-0.4, -0.16, 0.007, 0.096, -0.030, 0.005, 0.017, 0.003, -0.013, -0.005, 0.003

= 0.178, 0.233, -0.172, 0.042, 0.039, -0.009, -0.035, 0.001, 0.013, -0.003  
0.178, 0.071, -0.003, -0.043, 0.013, -0.002, -0.008, -0.001, 0.006, 0.002, -0.001

= 0.162, -0.169, 0.085, 0.026, -0.007, -0.027, 0.002, 0.007, 0.005, 0.001  
0.162, 0.065, -0.003, -0.039, 0.012, -0.002, -0.007, -0.001, 0.005, 0.002, -0.001

= -0.234, 0.088, 0.065, -0.019, -0.025, 0.009, 0.068, 0.000, -0.001, 0.001  
-0.234, -0.094, 0.004, 0.056, -0.012, 0.003, 0.010, 0.002, -0.007, -0.003, 0.002

= 0.182, 0.061, -0.075, -0.007, 0.006, -0.002, -0.002, 0.006, 0.004, -0.002  
0.182, 0.073, -0.003, -0.044, 0.014, -0.002, -0.008, -0.001, 0.006, 0.002, -0.001

= -0.008, -0.072, 0.037, -0.008, 0.000, 0.006, 0.007, -0.002, -0.004, 0.001  
-0.008, -0.003, 0.000, -0.002, 0.001, 0.000, ...

= -0.069, 0.037, -0.006, -0.001, 0.006, 0.007, -0.002, -0.004, 0.001  
-0.069, -0.027, 0.001, 0.016, -0.005, 0.001, 0.003, 0.000, -0.002, -0.001, 0.000

= 0.064, -0.007, -0.017, 0.011, 0.006, 0.005, -0.004, 0.003, 0.001, 0.000  
0.064, 0.026, -0.001, -0.016, 0.005, -0.001, -0.003, 0.000, 0.002, 0.001, 0.000

= -0.033, -0.016, 0.027, 0.001, 0.006, -0.001, 0.003, -0.001, -0.001, 0.000  
-0.033, -0.013, 0.001, 0.008, -0.002, 0.000, 0.001, 0.000, -0.001, 0.000, ...

= -0.003, 0.026, -0.007, 0.008, -0.001, 0.002, -0.001, 0.000, 0.000, ...  
-0.003, -0.001, 0.000, 0.001, 0.000, ...

= 0.027, -0.007, 0.007, -0.001, 0.002, -0.001, 0.000, 0.000, ...  
0.027, 0.011, 0.000, -0.007, 0.002, 0.000, -0.001, -0.000, 0.001, 0.000

= -0.018, 0.007, -0.006, 0.000, -0.001, 0.001, 0.000, 0.001, 0.000, ...  
-0.018, -0.007, 0.000, 0.004, -0.001, 0.000, 0.001, 0.000, -0.001, 0.000, ...

= 0.014, -0.006, -0.004, 0.000, 0.001, -0.001, 0.001, 0.001, 0.000, ...  
0.014, 0.006, 0.000, -0.003, 0.001, 0.000, -0.001, 0.000, ...

= -0.012, -0.004, 0.003, 0.000, -0.001, 0.002, 0.001, 0.000, ...  
-0.012, -0.005, 0.000, 0.003, -0.001, 0.000, 0.000, ...

= 0.001, 0.003, -0.003, 0.000, 0.002, 0.001, 0.000, ...  
0.001, 0.000, ...

0.003, -0.003, ...

Tablica 20

Wykonanie działania  $A_{kor} \cdot M = A_{kor} \cdot 2,0,2,0, \dots$  do str. 82

$/0.4-a^{-1}/$	-0.16, 0.071, 0.065, -0.094, 0.073, -0.0032, -0.027, 0.026, -0.013, -0.0012, 0.011, -0.0072, 0.0056, -0.0048, 0.0004 x 2,0,2,0,2,0,2,0,...
$0.8-b^*)$	-0.32, 0.142, 0.130, -0.188, 0.146, -0.0064, -0.054, 0.052, -0.026, -0.0024, 0.022, -0.0144, 0.0112, -0.0096, 0.0008
	0.8-b, -0.32, 0.142, 0.130, -0.188, 0.146, -0.0064, -0.054, 0.052, -0.026, -0.0024, 0.022, -0.0144, 0.0112, -0.0096, 0.0008
	0.8-b, -0.32, 0.142, 0.130, -0.188, 0.146, -0.0064, -0.054, 0.052, -0.026, -0.0024, 0.022, -0.0144, 0.0112, -0.0096, 0.0008
	0.8-b, -0.32, 0.142, 0.130, -0.188, 0.146, -0.0064, -0.054, 0.052, -0.026, -0.0024, 0.022, -0.0144, 0.0112, -0.0096, 0.0008
	0.8-b, -0.32, 0.142, 0.130, -0.188, 0.146, -0.0064, -0.054, 0.052, -0.026, -0.0024, 0.022, -0.0144, 0.0112, -0.0096, 0.0008
	0.8-b, -0.32, 0.142, 0.130, -0.188, 0.146, -0.0064, -0.054, 0.052, -0.026, -0.0024, 0.022, -0.0144, 0.0112, -0.0096, 0.0008
	0.8-b, -0.32, 0.142, 0.130, -0.188, 0.146, -0.0064, -0.054, 0.052, -0.026, -0.0024, 0.022, -0.0144, 0.0112, -0.0096, 0.0008
	0.8-b, -0.32, 0.142, 0.130, -0.188, 0.146, -0.0064, -0.054, 0.052, -0.026, -0.0024, 0.022, -0.0144, 0.0112, -0.0096, 0.0008
	0.8-b, -0.32, 0.142, 0.130, -0.188, 0.146, -0.0064, -0.054, 0.052, -0.026, -0.0024, 0.022, -0.0144, 0.0112, -0.0096, 0.0008
	0.8-b, -0.32, 0.142, 0.130, -0.188, 0.146, -0.0064, -0.054, 0.052, -0.026, -0.0024, 0.022, -0.0144, 0.0112, -0.0096, 0.0008

0.8-b, -0.32, 0.942-b, 0.190, 0.754-b, -0.044, 0.748-b, -0.098, 0.000-b, -0.124, 0.797-b, -0.102, 0.783-b, -0.091, 0.773-b, -0.090, 0.773-b, -0.090,  
 gdy  $b=0.863$ : -0.063, -0.32, 0.079, -0.190, -0.109, -0.044, -0.115, -0.098, -0.063, -0.124, -0.066, -0.102, -0.080, -0.091, -0.090, -0.090,...

$*) b = 2a^{-1}$



Trzeba zauważyć, że charakterystyka otrzymana na rys. 44 jest w zasadzie podobna do charakterystyki na rys. 42, z wyjątkiem dalszych, mniej dokładnych punktów.

nie musimy uszywać  
 kryterium tylko metoda uwarunkowa  
 w tym, co nie w uwarunk

4.4. Kryterium stabilności w oparciu o odpowiedź jednostkową układu otwartego.

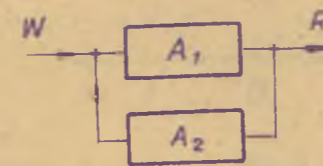
W rozdziale niniejszym zajmuję się zagadnieniem określenia stabilności układu zamkniętego na podstawie jego własności w stanie otwartym, wyrażonych przy pomocy operatora liczbowego.

Szkic takiego postępowania podał Tustin [8], nie podając jednak uzasadnień i rozwinięcia postępowania, oraz - co ważniejsze - nie zwracając uwagi na praktyczność metody.

Układ dynamiczny jest stabilny, jeżeli jego odpowiedź jednostkowa jest funkcją zanikającą<sup>\*/</sup>. Wynika stąd, że układ stabilny musi dawać odpowiedź zanikającą w czasie przy dowolnym zanikającym wymuszeniu.

W ogólnym przypadku układu regulacji /rys. 45/ mamy związek

$$\frac{R}{W} = \frac{A_1}{1+A_1A_2} = \frac{A_1}{1+A_0} = A \quad \dots\dots 166$$



Rys. 45

Stabilność układu nie zależy od wyboru miejsca przyłożenia wymuszenia<sup>\*\*/</sup>. Można zatem tak przyłożyć wymuszenie, by było

$$\frac{R}{W} = \frac{1}{1+A_0} = \frac{1}{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots} \quad \dots\dots 167$$

Niech wymuszeniem zanikającym w czasie będzie jednostka  $\Delta$ , czyli  $W = 1$ . Wówczas  $R = A$  i operator ten wynosi

$$R = \frac{1}{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots} = p_0, p_1, p_2, p_3, \dots \quad \dots\dots 168$$

Należy określić, jakim warunkom powinny odpowiadać wyrazy

<sup>\*/</sup> Takie pojęcie stabilności podaje np. [5]. Odpowiada ono warunkowi, by przepustowość danego układu nie miała biegunów również i w początku układu współrzędnych płaszczyzny s.

<sup>\*\*/</sup> O stabilności decyduje położenie biegunów przepustowości A, czyli tylko zer wyrażenia  $1 + A_0$ .

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$ , by przebieg wyrażony operatorem liczbowym  $r_0, r_1, r_2, r_3 \dots$  był przebiegiem zanikającym w czasie, czyli by było

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \quad \dots \dots \dots 169$$

Można znaleźć wyrażenie, określające wartość  $r_n$  w funkcji wyrazów  $a_0, a_1, a_2 \dots$  oraz  $r_{n-1}, r_{n-2} \dots$   
Wg /168/, mamy związek

$$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)(r_0, r_1, r_2, \dots, r_n) = 1, 0, 0, \dots \quad \dots \dots \dots 170$$

Zapisując to mnożenie w postaci tablicy :

$(a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$	$(r_0, r_1, r_2, r_3, \dots)$	
$a_0 r_0, a_1 r_0, a_2 r_0, a_3 r_0, \dots$	$a_0 r_1, a_1 r_1, a_2 r_1, \dots$	$a_0 r_2, a_1 r_2, \dots$
$a_0 r_3, \dots$	$1, 0, 0, 0, \dots$	

..... 171

widzimy, że /n+1/ - a kolumna tej tablicy daje równanie

$$a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + a_2 r_{n-2} + \dots + a_n r_1 = 0 \quad \dots \dots \dots 172$$

$$\text{czyli } r_n = -\frac{1}{a_0} (a_1 r_{n-1} + a_2 r_{n-2} + \dots + a_n r_1) \quad \dots \dots \dots 173$$

Jeżeli ilość wyrazów w ciągu  $a_0, a_1, a_2 \dots$  jest ograniczona \*/ i ostatnim wyrazem  $\neq 0$  jest  $a_m$ , otrzymujemy zamiast /172/ równanie :

$$a_0 r_n + a_1 r_{n-1} + \dots + a_m r_{n-m} = 0 \quad \dots \dots \dots 174$$

oraz

$$r_n = -\frac{1}{a_0} (a_1 r_{n-1} + a_2 r_{n-2} + \dots + a_m r_{n-m}) \quad \dots \dots \dots 175$$

Związek /174/ jest to liniowe równanie różnicowe jednorodne rzędu m. Aby je sprowadzić do zwykle używanej postaci podstawmy  $n - m = x$ ; wówczas

$$a_0 r_{x+m} + a_1 r_{x+m-1} + \dots + a_m r_x = 0 \quad \dots \dots \dots 176$$

\*/ Odpowiada to warunkowi, by układ badany był stabilny w stanie otwartym, przy czym stabilność rozumiana jest w sensie podanym wyżej.

albo

$$r_{x+m} + \frac{a_1}{a_0} r_{x+m-1} + \dots + \frac{a_m}{a_0} r_x = 0 \quad \dots\dots 177$$

i dalej

$$r_{x+m} + b_1 r_{x+m-1} + \dots + b_m r_x = 0 \quad \dots\dots 178$$

Jak wiadomo [14], rozwiązanie takiego równania ma postać

$$r_x = C_1 \lambda_1^x + C_2 \lambda_2^x + C_3 \lambda_3^x + \dots + C_m \lambda_m^x \quad \dots\dots 179$$

jeżeli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego

$$\lambda^m + b_1 \lambda^{m-1} + \dots + b_{m-1} \lambda + b_m = 0 \quad \dots\dots 180$$

są różne; w przypadku pierwiastków krotnych, do rozwiązania wchodzi sumy o postaci

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_s x^{s-1}) \lambda_i^x \quad \dots\dots 181$$

gdzie  $\lambda_i$  jest s-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego.

W przypadku, gdy równanie nie ma pierwiastków krotnych, zadanie /169/ będzie spełnione wtedy, gdy  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  będą miały moduły  $< 1$ . Jest to zarazem warunek konieczny, bowiem żądane ze stałych  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , występujących we wzorze /179/, w ogólnym przypadku nie jest równe zeru. Stałe te wyznacza się z warunków początkowych, którymi są wartości  $r_0, r_1, \dots, r_{m-1}$ .

Mianowicie

$$r_0 = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_m$$

$$r_1 = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + \dots + C_m \lambda_m$$

$$r_2 = C_1 \lambda_1^2 + C_2 \lambda_2^2 + \dots + C_m \lambda_m^2 \quad \dots\dots 182$$

.....

$$r_{m-1} = C_1 \lambda_1^{m-1} + C_2 \lambda_2^{m-1} + \dots + C_m \lambda_m^{m-1}$$

Jeżeli w rozwiązaniu ogólnym są pierwiastki krotne, warunek na  $\lambda$  jest nadal decydujący, bowiem

$$\lim_{x \rightarrow \infty} C_s x^{s-1} \lambda^x = 0 \quad \text{gdy } |\lambda| < 1 \quad \dots\dots 183$$

Należy znaleźć drogę określenia, czy pierwiastki równania

Hurwitz

charakterystycznego /180/ mają moduły  $< 1$ , bez obliczania wartości poszczególnych pierwiastków.

Jeśli z powrotem pomnożymy równanie /180/ przez  $a_0$ , problem sprowadzi się do tego, czy zera wielomianu

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m \quad \dots\dots 184$$

leżą w kole jednostkowym. Wielomian  $f/z/$  ma przy tym współczynniki równe kolejnym wyrazom operatora liczbowego  $1 + A_0$ ; operator ten dość łatwo można znaleźć z odpowiedzi jednostkowej otwartego układu.

Postawiony problem można rozwiązać bądź bezpośrednio, bądź też zamieniając go na problem Hurwitza przez odpowiednie podstawienie.

Proste rozwiązanie bezpośrednie na drodze algebraicznej nie jest znane; prof. Biernacki [15] podaje pewien sposób, który jest jednak zbyt skomplikowany do stosowania praktycznego. Jedynie w bardzo prostych przypadkach mogą być pomocne następujące twierdzenia /podane w [15]/ :

I. Warunkiem koniecznym na to, by wszystkie zera wielomianu  $f/z/$  leżały w kole  $z < 1$ , jest nierówność  $|a_0| > |a_m|$  ;

II. Jeśli jest  $0 < a_m \leq a_{m-1} \leq \dots \leq a_1 < a_0$ , to wielomian  $f/z/$  ma wszystkie zera w kole  $|z| < 1$  ;

III. To samo zachodzi, jeśli  $|a_0| > |a_1| + |a_2| + \dots + |a_m|$  ;

IV. Jeśli jest  $|a_p| > |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{p-1}| + |a_{p+1}| + \dots + |a_m|$ , gdzie  $p$  jest jedną z liczb 1, 2, 3 ...  $m$ , to wielomian  $f/z/$  nie ma wszystkich zer w kole jednostkowym.

Inne bezpośrednie stwierdzenie, czy wszystkie zera wielomianu  $f/z/$  leżą w kole jednostkowym można uzyskać w sposób dosyć prosty w oparciu o następujące znane twierdzenie :

Jeśli krzywa zamknięta w płaszczyźnie  $z$  obejmuje  $N$  zer wielomianu  $f/z/$ , to odwzorowanie tej krzywej, obieganej w kierunku ujemnym, na płaszczyznę  $f/z/$  okręży początek układu  $N$  razy w kierunku dodatnim.

W naszym przypadku krzywa zamknięta w płaszczyźnie  $z$  powinno być koło jednostkowe, czyli  $z = e^{j\varphi}$  \*, gdzie  $\varphi$  zmienia się

\* / Podstawienie to wskazał Tustin [8] .

od 0 do  $2\pi$ . Podstawiając do wielomianu  $f/z/$  tę wartość, możemy stwierdzić, czy krzywa  $f/z/$  okrążyła tyle razy początek układu, ile wynosi stopień wielomianu - będzie to dowodem, że wszystkie zera leżą w kole jednostkowym. Krzywa ta nie powinna przy tym przechodzić przez początek układu.

I tu jednak, wobec z reguły wysokiego stopnia wielomianu  $f/z/$ , rachunki są desyć długie, aczkolwiek nie jest potrzebna duża dokładność wyliczeń.

Rozwiązanie zagadnienia można również uzyskać przez zamianę postawionego problemu na problem Hurwitza /nieistnienie zer w prawej półpłaszczyźnie/.

Można to zrobić [16], podstawiając :

$$z = \frac{1-x}{1+x} \quad \dots\dots\dots 185$$

Problem Hurwitza dla otrzymanego wielomianu  $f/\frac{1-x}{1+x}/$ , wobec z reguły wysokiego stopnia wielomianu  $f/z/$ , najdogodniej

byłoby dalej rozwiązać przy pomocy kryterium Michajłowa [1]. Cała jednak praca wydaje się być na tyle żmudna, że drogą

bardziej prostą, a wymagającą mniejszego nakładu pracy, jest

bezpośrednie obliczenie operatora  $R = \frac{1}{1+A_0}$  i zbadanie,

czy spełnia on warunek /169/. Da to jednocześnie bardziej ilościową informację o stabilności, podając przebieg przejściowy w układzie.

Tym niemniej, posłużenie się np. jednym z podanych wyżej twierdzeń I - IV może - w przypadkach ich stosowalności - dać szybko stwierdzenie stabilności układu.

Należy tu zwrócić uwagę na to, że całe rozważanie oparte zostało na założeniu, że ilość wyrazów operatora  $1 + A_0$  jest skończona. Przy tym, praktycznie, wskazane metody określenia stabilności mogą być stosowane raczej przy małej liczbie wyrazów operatora - w każdym razie komplikują się i przedłużają przy większej liczbie wyrazów. Klasa układów regulacji, dla których operator  $1 + A_0$  ma skończoną ilość wyrazów /czyli których odpowiedź impulsowa jest funkcją zanikającą/, jest stosunkowo niewielka. Na przykład, wszystkie serwo mechanizmy mają przepustowość widnową typu

$$K/s/ = \frac{1}{s^n} \frac{N/s/}{Q/s/}, \text{ gdzie } n = 1, 2 \dots, \text{ a } N/s/ \text{ i } Q/s/ \text{ s\u0105}$$

wielomianami pe\u0142nymi od  $s$ . /roz.str.8/.

Wskazuje to, \u017ce podane wy\u017cej rozwa\u017ania o kryterium stabilno\u015bci nie maj\u0105 du\u017cego znaczenia praktycznego, nawet niezale\u017anie od z\u0142o\u017conosci potrzebnych rachunk\u00f3w.

Wydaje si\u0119, \u017ce drog\u0105 bardziej s\u0142uszn\u0105 jest zachowanie post\u0119powania czysto numerycznego przy pos\u0142ugiwaniu si\u0119 charakterystykami chwilowymi, a przej\u015bcie na charakterystyki amplitudowo - fazowe w razie potrzeby podej\u015bcia bardziej analitycznego.

## 5. Przejście z odpowiedzi jednostkowej na charakterystykę amplitudowo - fazową .

### 5.1. Wprowadzenie.

W zastosowaniach praktycznych największe dotąd rozwinięcie znalazły metody syntezy układów regulacji /a także analizy tych układów/, oparte o charakterystyki częstotliwościowe. Metody te mają charakter metod wykreślnych i stąd wynika ich szeroka stosowność do układów dowolnie skomplikowanych, oraz do układów, które w całości lub w części są znane tylko z doświadczalnie zdjętych charakterystyk.

Bezpośrednie zdejmowanie charakterystyk częstotliwościowych poszczególnych elementów układu automatycznej regulacji nigdy nie jest tak proste, jak zdejmowanie charakterystyk chwilowych; w przypadku natomiast elementów inercyjnych o dużych stałych czasu zdjęcie charakterystyk częstotliwościowych jest szczególnie kłopotliwe i długotrwałe.

Znanych jest w literaturze parę sposobów otrzymania charakterystyk częstotliwościowych z zadanej wykreślnie charakterystyki chwilowej, [3], [4], [7] i inn.

Należy tu zaznaczyć, że mówiąc o metodach przejścia z charakterystyki chwilowej na charakterystyki częstotliwościowe, myślę o metodach wykreślno - analitycznych, a nie mam na myśli teoretycznie możliwego, lecz praktycznie dotąd nie stosowanego, sposobu opartego o aproksymację funkcji charakterystyki chwilowej odpowiednim wyrażeniem analitycznym, aby następnie normalnym sposobem znaleźć charakterystykę częstotliwościową z tego wyrażenia analitycznego.

Poniżej oprecowana została metoda, pozwalająca na stosunkowo łatwe i bezpośrednie znalezienie charakterystyki amplitudowo - fazowej z zadanej charakterystyki chwilowej, przy czym punktem wyjściowym są kolejne rzędne tej charakterystykibrane w równych odstępach czasu. Metoda ta operuje przybliżeniem charakterystyki chwilowej przez łamaną, podobnie jak to jest robione przy stosowaniu rachunku operatorów liczbowych do bezpośredniej syntezy układów regulacji w oparciu o charakterystyki chwilowe. Metoda nadaje się do przebiegów nieoscylacyjnych, lub oscylacyjnych o dużym tłumieniu; przy przebiegach oscylacyjnych mało tłumionych należałoby stosować rozłożenie na szereg Fouriera /por.np.



[7] /.

5.2. Metoda bezpośredniego przejścia z charakterystyki chwilowej na charakterystykę amplitudowo - fazową.

Jeśli mamy odpowiedź impulsową  $k/t/$  pewnego układu dynamicznego, to - jak wiadomo - jego przepustowość jest wprost przekształceniem Laplace'a funkcji  $k/t/$ :

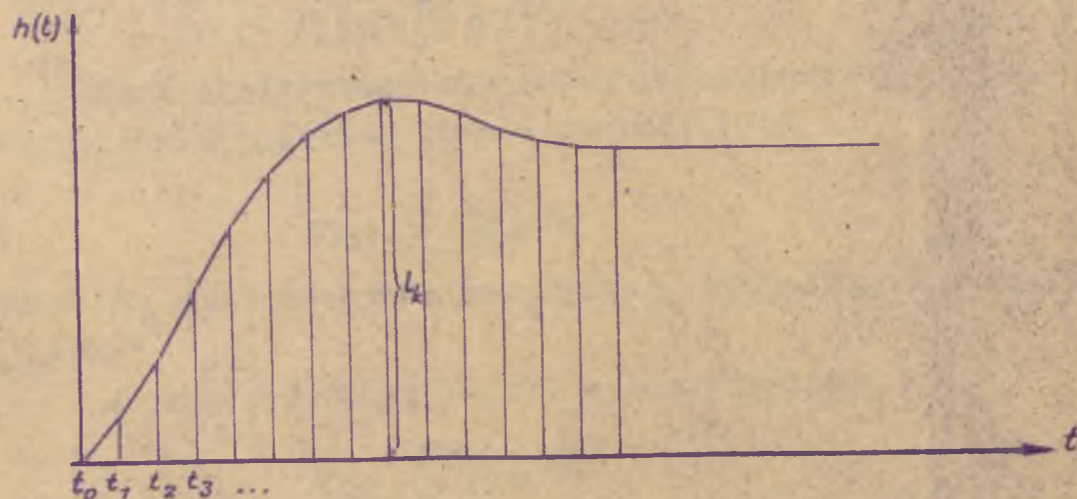
$$K(s) = L[k(t)] \dots\dots 186$$

Wychodząc zaś z odpowiedzi jednostkowej:

$$K(s) = sL[h(t)] \dots\dots 187$$

Jak wiadomo, wyrażenie na charakterystykę amplitudowo - fazową otrzymamy, podstawiając  $j\omega$  zamiast  $s$  w wyrażeniu  $K/s/$ .

Załóżmy, że odpowiedź jednostkowa pewnego układu dała się aproksymować linią łamaną, jak na rys. 46. Funkcję przedstawioną na rys. 46 można uważać za sumę funkcji, z których każda jest linią prostą, wychodzącą z punktu  $t_0, t_1, t_2, t_3 \dots$ , mającą właściwe sobie nachylenie.



Rys. 46

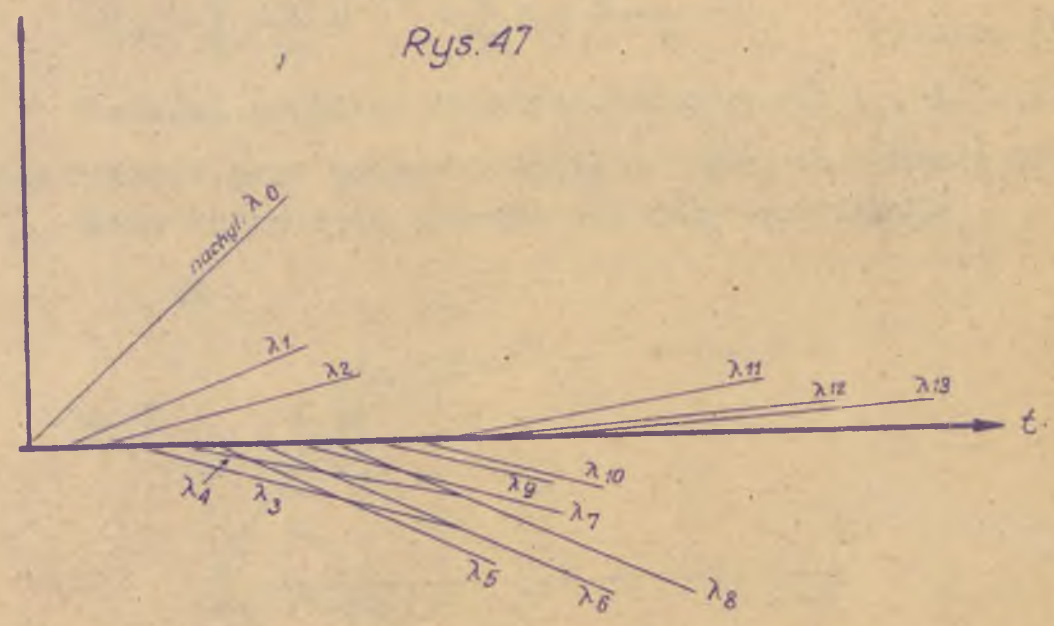
Postępowanie takie można zastosować do dowolnej funkcji  $f/t/$ , spełniającej warunek  $f/0/ = 0$ . W zasadzie odpowiedź  $h/t/$  każdego układu fizycznie realizowanego spełnia zawsze ten warunek.

Funkcja z rys. 46 daje się przedstawić prostymi nachylenymi, pokazanymi na rys. 47.

Każda z prostych nachylonych ma równanie:

$$f_k(t) = \lambda_k(t - t_k) \quad \text{dla } t \geq t_k \quad \dots\dots 188$$

$f_k(t) = 0$  dla  $t < t_k$  ..... 188  
gdzie  $\lambda_k$  jest nachyleniem danej prostej.



Dla tego typu funkcji przekształcenie Laplace'a ma postać

$$F_k(s) = \frac{\lambda_k}{s^2} e^{-tk s} \quad \dots\dots 189$$

Stąd przekształcenie całej linii łamanej, czyli w przybliżeniu przekształcenie funkcji h/t/

$$F(s) = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda_k}{s^2} e^{-tk s} \quad \dots\dots 190$$

gdzie  $\lambda_0$  jest nachyleniem prostej, wychodzącej z punktu  $t_0 = 0$ .

Biorąc pod uwagę /187/, możemy napisać

$$K(s) = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda_k}{s} e^{-tk s} \quad \dots\dots 191$$

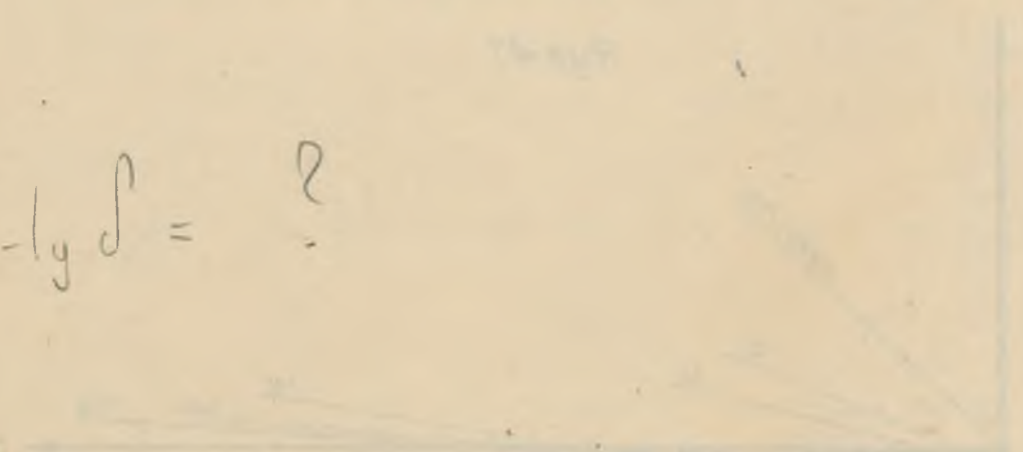
Podstawiając  $s = j\omega$ , otrzymamy

$$K(j\omega) = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda_k}{j\omega} e^{-jtk\omega} \quad \dots\dots 192$$

Suma /192/ może być łatwo obliczona, jeśli ilość składników różnych od zera nie będzie zbyt duża; tak jest w przypadku, gdy aproksymowana linią łamaną odpowiedź jednostkowa nie jest zbyt powolnie tłumionym przebiegiem oscylacyjnym.

Sumowanie /192/ musi być przeprowadzone dla szeregu kolejnych wartości częstotliwości  $\omega$ . Dogodnie jest wprowadzić wielkość  $\delta = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$  td., oraz często-

$-l_y \int = ?$

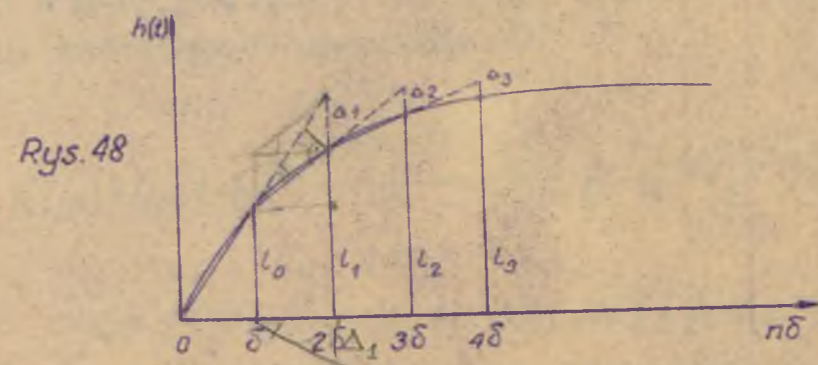


? ←

tlivość zredukowaną bezwymiarową  $u = \delta\omega$ . Wówczas  $t_k = k\delta$  i zatem

$$K(ju) = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda_k \delta}{ju} e^{-jku} = \sum_0^{\infty} \lambda_k \delta \frac{e^{-j(ku + \frac{\pi}{2})}}{u} \dots\dots 193$$

Wartości nachyleń prostych nachylonych  $\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_k$  można wyrazić przy pomocy kolejnych rzędnych funkcji  $h/t/$ . Weźmy mianowicie rysunek 48; mamy oczywiście

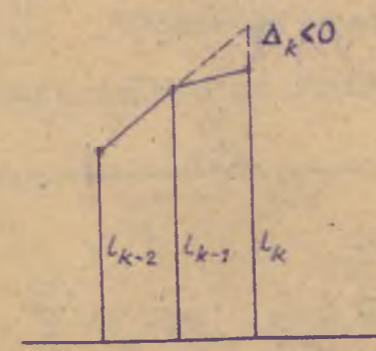


$$\lambda_0 = \frac{l_0}{\delta}; \lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\delta}; \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\delta}; \dots \lambda_k = \frac{\Delta_k}{\delta} \dots\dots 194$$

Ponieważ we wzorze /193/ występują iloczyny  $\lambda_k \delta$ , wystarczy określić  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  i td.

Proste rozważanie geometryczne /rys. 49/ wskazuje, że

$$\Delta_k = l_k - 2l_{k-1} + l_{k-2} \dots\dots 195$$



Zatem, mając zadany operator liczbowy odpowiadający funkcji  $h/t/$ , czyli ciąg jej rzędnych wziętych w równych odstępach  $\delta$ , możemy przekształcić wzór /193/ na następujący wzór /196/:

Rys. 49

$$K(ju) = \sum_0^{\infty} (l_k - 2l_{k-1} + l_{k-2}) \frac{e^{-j(ku + \frac{\pi}{2})}}{u} \dots\dots 196$$

Sumę /196/ można przekształcić na postać, nie wymagającą uprzedniego obliczenia czynników /195/; mianowicie, zauważmy najpierw, że jeśli wszystkie rzędne krzywej  $h/t/$  będą równe jedne drugiej, poczynając od indeksu  $q/q$  - indeksu

pierwszej rzędnej, która jest równa następnym/ to wyrazy w nawiasie pod znakiem sumy będą równe zeru, poczynając od  $k = q + 2$  :

$$l_{q+2} - 2l_{q+1} + l_q = 0 \quad \dots\dots 197$$

i t.d.

Zatem ostatnim wyrazem, który trzeba uwzględnić w sumowaniu /196/, jest wyraz / $q + 1$ / - y.

Łatwo można stwierdzić, że wyrazy sumy /196/ o indeksach od  $k = 0$  do  $k = q + 1$  dają się rozbić i ponownie zgrupować, dając następujące wyrażenie: \*)

$$K(ju) = l_q (1 - e^{-ju}) \frac{e^{-j(qu + \frac{\pi}{2})}}{u} + \sum_0^{q-1} l_k (1 - 2e^{-ju} + e^{-j2u}) \frac{e^{-j(ku + \frac{\pi}{2})}}{u} \quad \dots\dots 198$$

Wzór /198/ podaje wartość  $K/ju/$  dla dowolnej częstotliwości  $u$  w zależności od rzędnych funkcji  $h/t/$ ,  $l_k$  oraz od pewnych współczynników zespolonych, które zależą tylko od  $u$ , zatem mogą być obliczone z góry i podane w tablicach. Oznaczając te współczynniki przez  $A/q/$  i  $B/k/$ , możemy zapisać

$$K(ju) = l_q A(q) + \sum_0^{q-1} l_k B(k) \quad \dots\dots 199$$

Wykonanie operacji podanych we wzorze /199/ dogodnie jest rozbić na sumowanie składowej rzeczywistej i urojonej

\*)

$$\begin{aligned} \sum_0^{q+1} (l_k - 2l_{k-1} + l_{k-2}) \frac{e^{-j(ku + \frac{\pi}{2})}}{u} &= \sum_0^{q+1} l_k \frac{e^{-j(ku + \frac{\pi}{2})}}{u} - \sum_0^{q+1} 2l_{k-1} \frac{e^{-j(ku + \frac{\pi}{2})}}{u} + \\ &+ \sum_0^{q+1} l_{k-2} \frac{e^{-j(ku + \frac{\pi}{2})}}{u} = \sum_0^{q+1} l_k \frac{e^{-j(ku + \frac{\pi}{2})}}{u} - \sum_0^q 2l_k \frac{e^{-j[(k+1)u + \frac{\pi}{2}]} }{u} + \\ &+ \sum_0^{q-1} l_k \frac{e^{-j[(k+2)u + \frac{\pi}{2}]} }{u} = \left\{ \sum_0^{q-1} l_k \frac{e^{-j(ku + \frac{\pi}{2})} - 2e^{-j[(k+1)u + \frac{\pi}{2}]} + e^{-j[(k+2)u + \frac{\pi}{2}]} }{u} \right\} + \end{aligned}$$

$l_k$  i  $l_q$  są liczbami rzeczywistymi/:

$$\operatorname{Re} K(ju) = l_q \operatorname{Re} A(q) + \sum_0^{q-1} l_k \operatorname{Re} B(k) \quad \dots\dots 200$$

$$\operatorname{Im} K(ju) = l_q \operatorname{Im} A(q) + \sum_0^{q-1} l_k \operatorname{Im} B(k) \quad \dots\dots 201$$

Wzory /200/ i /201/ są ostatecznymi wzorami roboczymi. Posługiwanie się nimi wymaga posiadania tablic wartości  $\operatorname{Re} A/q$ ,  $\operatorname{Im} A/q$ ,  $\operatorname{Re} B/k$ ,  $\operatorname{Im} B/k$  dla szeregu wartości  $u$ , /tablica 21 - 27/ oraz wykonania pewnej ilości arytmetycznych mnożeń i dodawań.

---

$$+ l_q \frac{e^{-j(qu + \frac{\pi}{2})} - 2e^{-j[(q+1)u + \frac{\pi}{2}]} + l_{q+1} \frac{e^{-j[(q+1)u + \frac{\pi}{2}]} }{u} =$$
$$= \left\{ \sum_0^{q-1} l_k (1 - 2e^{-ju} + e^{-j2u}) \frac{e^{-j(ku + \frac{\pi}{2})}}{u} \right\} + l_q (1 - e^{-ju}) \frac{e^{-j(qu + \frac{\pi}{2})}}{u},$$

bowiem  $l_{q+1} = l_q$  na podstawie określenia indeksu  $q$ .

Tablica 21.

u = 0,05

k, q	Re B/k/	Im B/k/	Re A/q/	Im A/q/	k, q
0	0.00250	0.0499	0.999	-0.0250	0
1	0.00499	0.0498	0.997	-0.0749	1
2	0.00748	0.0494	0.992	-0.125	2
3	0.00992	0.0492	0.985	-0.174	3
4	0.0124	0.0482	0.975	-0.223	4
5	0.0148	0.0477	0.962	-0.271	5
6	0.0171	0.0471	0.947	-0.319	6
7	0.0194	0.0460	0.930	-0.366	7
8	0.0218	0.0450	0.911	-0.412	8
9	0.0239	0.0438	0.889	-0.457	9
10	0.0261	0.0427	0.865	-0.501	10
11	0.0283	0.0411	0.839	-0.544	11
12	0.0301	0.0398	0.811	-0.585	12
13	0.0323	0.0383	0.781	-0.625	13
14	0.0341	0.0365	0.748	-0.663	14
15	0.0358	0.0348	0.714	-0.700	15
16	0.0374	0.0332	0.678	-0.734	16
17	0.0393	0.0310	0.641	-0.768	17
18	0.0405	0.0290	0.602	-0.799	18
19	0.0423	0.0272	0.561	-0.828	19
20	-	-	0.518	-0.855	20

Tablica 22.

$u = 0,1$

k, q	Re B/k/	Im B/k/	Re A/q/	Im A/q/	k, q
0	0.00998	0.0994	0.998	-0.0500	0
1	0.0190	0.0979	0.988	-0.149	1
2	0.0295	0.0954	0.968	-0.247	2
3	0.0390	0.0920	0.939	-0.343	3
4	0.0478	0.0877	0.900	-0.435	4
5	0.0564	0.0824	0.852	-0.522	5
6	0.0644	0.0765	0.796	-0.605	6
7	0.0716	0.0696	0.731	-0.681	7
8	0.0783	0.0620	0.660	-0.751	8
9	0.0842	0.0540	0.581	-0.813	9
10	0.0889	0.0454	0.497	-0.867	10
11	0.0931	0.0362	0.408	-0.912	11
12	0.0962	0.0276	0.315	-0.948	12
13	0.0986	0.0161	0.219	-0.975	13
14	0.0996	0.00674	0.120	-0.992	14
15	0.0999	-0.00250	0.0208	-0.999	15
16	0.0991	-0.0131	-0.0791	-0.997	16
17	0.0973	-0.0226	-0.178	-0.984	17
18	0.0946	-0.0323	-0.275	-0.961	18
19	0.0907	-0.0415	-0.370	-0.929	19
20	-	-	-0.460	-0.887	20

Tablica 23.

u = 0,2

k, q	Re B/k/	Im B/k/	Re A/q/	Im A/q/	k, q
0	0.0396	0.195	0.993	-0.100	0
1	0.0776	0.184	0.954	-0.295	1
2	0.113	0.164	0.876	-0.479	2
3	0.143	0.139	0.764	-0.643	3
4	0.168	0.108	0.621	-0.782	4
5	0.186	0.0722	0.453	-0.890	5
6	0.196	0.0338	0.267	-0.962	6
7	0.199	-0.00566	0.0706	-0.996	7
8	0.194	-0.0453	-0.129	-0.990	8
9	0.181	-0.0829	-0.323	-0.945	9
10	0.161	-0.117	-0.504	-0.862	10
11	0.135	-0.147	-0.665	-0.744	11
12	0.102	-0.171	-0.800	-0.598	12
13	0.0668	-0.188	-0.902	-0.427	13
14	0.0281	-0.197	-0.968	-0.239	14
15	-0.0117	-0.199	-0.997	-0.0415	15
16	-0.0507	-0.193	-0.985	0.157	16
17	-0.0884	-0.179	-0.935	0.350	17
18	-0.122	-0.157	-0.847	0.529	18
19	-0.151	-0.130	-0.725	0.686	19
20	-	-	-0.574	0.817	20



Tablica 24.

u = 0,5

k, q	Re B/k/	Im B/k/	Re A/q/	Im A/q/	k, q
0	0.235	0.430	0.959	-0.245	0
1	0.412	0.265	0.724	-0.675	1
2	0.488	0.0346	0.312	-0.939	2
3	0.445	-0.204	-0.176	-0.974	3
4	0.293	-0.392	-0.622	-0.770	4
5	0.0691	-0.485	-0.915	-0.378	5
6	-0.172	-0.458	-0.984	0.107	6
7	-0.371	-0.320	-0.812	0.565	7
8	-0.479	-0.103	-0.441	0.886	8
9	-0.470	0.139	0.0372	0.989	9
10	-0.346	0.347	0.507	0.850	10
11	-0.137	0.470	0.852	0.503	11
12	0.105	0.478	0.989	0.0329	12
13	0.322	0.369	0.884	-0.445	13
14	0.459	0.169	0.562	-0.814	14
15	0.484	-0.0710	0.103	-0.984	15
16	0.391	-0.295	-0.382	-0.913	16
17	0.202	-0.446	-0.773	-0.618	17
18	-0.0368	-0.488	-0.975	-0.172	18
19	-0.276	-0.411	-0.938	0.316	19
20	-	-	-0.661	0.727	20

Tablica 25.

$u = 1,0$

$k, q$	Re B/k/	Im B/k/	Re A/q/	Im A/q/	$k, q$
0	0.774	+0.497	0.841	-0.460	0
1	0.836	-0.383	0.0678	-0.965	1
2	0.130	-0.910	-0.768	-0.574	2
3	-0.695	-0.601	-0.898	0.336	3
4	-0.882	0.261	-0.202	0.957	4
5	-0.257	0.882	0.680	0.676	5
6	0.604	0.693	0.936	-0.206	6
7	0.909	-0.134	0.332	-0.899	7
8	0.379	-0.838	-0.577	-0.766	8
9	-0.500	-0.771	-0.956	0.0721	9
10	-0.919	0.0136	-0.456	0.843	10
11	-0.493	0.776	0.463	0.839	11
12	0.396	0.834	0.957	0.0636	12
13	0.911	0.125	0.570	-0.771	13
14	0.598	-0.698	-0.340	-0.896	14
15	-0.265	-0.880	-0.938	-0.198	15
16	-0.884	-0.253	-0.673	0.682	16
17	-0.690	0.607	0.211	0.935	17
18	0.138	0.909	0.901	0.328	18
19	0.840	0.373	0.763	-0.581	19
20	-	-	-0.0766	-0.955	20

Tablica 26.

$u = 2,0$

$k, q$	Re B/k/	Im B/k/	Re A/q/	Im A/q/	$k, q$
0	1.288	-0.589	0.455	-0.708	0
1	-1.072	-0.926	-0.833	-0.119	1
2	-0.163	+1.360	+0.239	+0.807	2
3	+1.401	-0.206	+0.634	-0.553	3
4	-0.750	-1.188	-0.767	-0.347	4
5	-0.800	+1.195	-0.0163	+0.841	5
6	+1.423	+0.193	+0.784	-0.354	6
7	-0.408	-1.356	-0.639	-0.547	7
8	-1.063	+0.935	-0.232	+0.809	8
9	+1.291	+0.578	+0.832	-0.126	9
10	-0.0125	-1.416	-0.461	-0.704	10
11	-1.282	+0.601	-0.468	+0.712	11
12	+1.080	+0.916	+0.834	+0.111	12
13	+0.383	-1.309	-0.246	-0.805	13
14	-1.399	+0.110	-0.629	+0.504	14
15	+0.781	+1.236	+0.770	+0.394	15
16	+0.749	-1.202	-0.0112	-0.842	16
17	-1.347	-0.181	-0.760	+0.361	17
18	+0.306	+1.352	+0.588	+0.541	18
19	+1.112	-0.944	+0.281	-0.811	19
20	-	-	-0.831	+0.134	20

Table 27.

$u = 5.0$

$k, q$	Re B/k/	Im B/k/	Re A/q/	Im A/q/	$k, q$
0	-0.275	+0.0813	-0.192	-0.143	0
1	-0.156	-0.240	+0.0830	-0.224	1
2	+0.186	-0.218	+0.239	+0.0156	2
3	+0.262	+0.117	+0.0526	+0.234	3
4	-0.0379	+0.306	-0.209	+0.117	4
5	-0.283	+0.00097	-0.171	-0.189	5
6	-0.123	-0.237	+0.112	-0.190	6
7	+0.213	-0.191	+0.235	+0.0474	7
8	+0.244	+0.150	+0.0212	+0.238	8
9	-0.0752	+0.277	-0.223	+0.0880	9
10	-0.286	+0.00624	-0.147	-0.189	10
11	-0.0875	-0.273	+0.139	-0.195	11
12	+0.237	-0.161	+0.226	+0.0780	12
13	+0.222	+0.181	-0.0105	+0.239	13
14	-0.111	+0.264	-0.232	+0.0577	14
15	-0.284	-0.0316	-0.121	-0.206	15
16	-0.0508	-0.282	+0.163	-0.175	16
17	+0.256	-0.129	+0.214	+0.107	17
18	+0.196	+0.209	-0.0421	+0.236	18
19	-0.145	+0.247	-0.238	+0.0263	19
20	-	-	-0.0929	-0.221	20

Przykład.

Odpowiedź jednostkowa pewnego elementu ma rzędnę w odstępach co 1 sek.:

0.181, 0.330, 0.451, 0.551, 0.632, 0.699, 0.753, 0.798,  
0.835, 0.865, 0.889, 0.909, 0.926, 0.939, 0.950, 0.959,  
0.967, 0.973, 0.978, 0.982, 0.982, 0.982, ...

Znaleźć charakterystykę amplitudowo - fazową tego elementu.

Obliczenie prowadzimy kolejno dla poszczególnych częstotliwości, przy  $q = 19$ .

Częstotliwość  $u = 0.05$  /zatem  $\omega = \frac{u}{s} = 0.05$  c/s /.

Re :		Im :	
0.181	. 0.00250 = 0.0004	0.181	. 0.0499 = 0.0090
0.330	. 0.00499 = 0.0016	0.330	. 0.0498 = 0.0164
0.451	. 0.00748 = 0.0034	0.451	. 0.0494 = 0.0223
0.551	. 0.00992 = 0.0055	0.551	. 0.0492 = 0.0271
0.632	. 0.0124 = 0.0078	0.632	. 0.0482 = 0.0305
0.699	. 0.0148 = 0.0010	0.699	. 0.0477 = 0.0333
0.753	. 0.0171 = 0.0129	0.753	. 0.0471 = 0.0355
0.798	. 0.0194 = 0.0155	0.798	. 0.0460 = 0.0367
0.835	. 0.0218 = 0.0182	0.835	. 0.0450 = 0.0376
0.865	. 0.0239 = 0.0207	0.865	. 0.0438 = 0.0379
0.889	. 0.0261 = 0.0232	0.889	. 0.0427 = 0.0380
0.909	. 0.0283 = 0.0257	0.909	. 0.0411 = 0.0373
0.926	. 0.0301 = 0.0279	0.926	. 0.0398 = 0.0368
0.939	. 0.0323 = 0.0303	0.939	. 0.0383 = 0.0360
0.950	. 0.0341 = 0.0324	0.950	. 0.0365 = 0.0347
0.959	. 0.0358 = 0.0343	0.959	. 0.0348 = 0.0334
0.967	. 0.0374 = 0.0362	0.967	. 0.0332 = 0.0321
0.973	. 0.0393 = 0.0382	0.973	. 0.0310 = 0.0302
0.978	. 0.0405 = 0.0396	0.978	. 0.0290 = 0.0284
0.982	. 0.561 = 0.5509	0.982	. /-0.828/ = -0.8131
Re K/j 0.05/ = 0.9257		Im K/j 0.05/ = -0.2200	

Częstotliwość u = 0.1

Re :

Im :

0.181 . 0.00998 = 0.0018  
 0.330 . 0.0198 = 0.0065  
 0.451 . 0.0295 = 0.0133  
 0.551 . 0.0390 = 0.0215  
 0.632 . 0.0478 = 0.0302  
 0.699 . 0.0564 = 0.0394  
 0.753 . 0.0644 = 0.0485  
 0.798 . 0.0716 = 0.0571  
 0.835 . 0.0783 = 0.0654  
 0.865 . 0.0842 = 0.0728  
 0.889 . 0.0889 = 0.0790  
 0.909 . 0.0931 = 0.0846  
 0.926 . 0.0962 = 0.0891  
 0.939 . 0.0986 = 0.0926  
 0.950 . 0.0996 = 0.0946  
 0.959 . 0.0999 = 0.0958  
 0.967 . 0.0992 = 0.0959  
 0.973 . 0.0972 = 0.0946  
 0.978 . 0.0947 = 0.0926  
 0.982 ./-0.370/ = -0.3633

0.181 . 0.0994 = 0.0180  
 0.330 . 0.0979 = 0.0323  
 0.451 . 0.0954 = 0.0430  
 0.551 . 0.0920 = 0.0507  
 0.632 . 0.0877 = 0.0554  
 0.699 . 0.0824 = 0.0576  
 0.753 . 0.0765 = 0.0576  
 0.798 . 0.0696 = 0.0555  
 0.835 . 0.0620 = 0.0518  
 0.865 . 0.0540 = 0.0467  
 0.889 . 0.0454 = 0.0404  
 0.909 . 0.0362 = 0.0329  
 0.926 . 0.0276 = 0.0255  
 0.939 . 0.0161 = 0.0151  
 0.950 . 0.00674 = 0.0064  
 0.959 ./-0.00250/ = -0.0024  
 0.967 ./-0.0131/ = -0.0127  
 0.973 ./-0.0266/ = -0.0220  
 0.978 ./-0.0323/ = -0.0316  
 0.982 ./-0.929/ = -0.9123

Re K/j 0.1/ = 0.8114

Im K/j 0.1/ = -0.3921

Częstotliwość u = 0.2

Re :

Im :

0.181 . 0.0396 = 0.0072
0.330 . 0.0776 = 0.0256
0.451 . 0.113 = 0.0509
0.551 . 0.143 = 0.0788
0.632 . 0.168 = 0.1062
0.699 . 0.186 = 0.1300
0.753 . 0.196 = 0.1476
0.798 . 0.199 = 0.1588
0.835 . 0.194 = 0.1620
0.865 . 0.181 = 0.1566
0.889 . 0.161 = 0.1431
0.909 . 0.135 = 0.1227
0.929 . 0.102 = 0.0944
0.939 . 0.0668 = 0.0627
0.950 . 0.0281 = 0.0267
0.959 ./-0.0117/ = -0.0112
0.967 ./-0.0507/ = -0.0490
0.973 ./-0.0884/ = -0.0860
0.978 ./-0.122/ = -0.1193
0.982 ./-0.725/ = -0.7119

0.181 . 0.195 = 0.0353
0.330 . 0.184 = 0.0607
0.451 . 0.164 = 0.0740
0.551 . 0.139 = 0.0766
0.632 . 0.108 = 0.0682
0.699 . 0.0722 = 0.0505
0.753 . 0.0338 = 0.0254
0.798 ./-0.00566/ = -0.0045
0.835 ./-0.0453/ = -0.0378
0.865 ./-0.0829/ = -0.0717
0.889 ./-0.117/ = -0.1040
0.909 ./-0.147/ = -0.1336
0.929 ./-0.171/ = -0.1583
0.939 ./-0.188/ = -0.1765
0.950 ./-0.197/ = -0.1871
0.959 ./-0.199/ = -0.1918
0.967 ./-0.193/ = -0.1866
0.973 ./-0.179/ = -0.1742
0.978 ./-0.157/ = -0.1535
0.982 . 0.686 = 0.6736

Re K/j 0.2/ = 0.4959

Im K/j 0.2/ = -0.5144

Częstotliwość u = 0.5

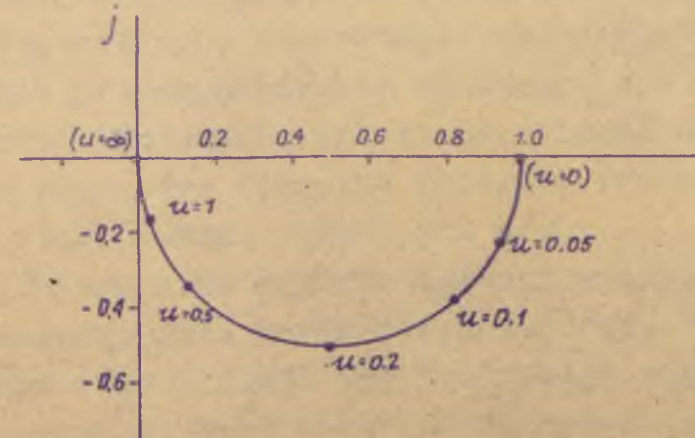
<u>Re :</u>			<u>Im :</u>		
0.181 .	0.235	= 0.0425	0.181 .	0.430	= 0.0778
0.330 .	0.412	= 0.1360	0.330 .	0.265	= 0.0874
0.451 .	0.488	= 0.2201	0.451 .	0.0346	= 0.0156
0.551 .	0.445	= 0.2452	0.551 .	/-0.204/	= -0.1124
0.632 .	0.293	= 0.1852	0.632 .	/-0.392/	= -0.2477
0.699 .	0.0691	= 0.0483	0.699 .	/-0.485/	= -0.3390
0.753 .	/-0.172/	= -0.1295	0.753 .	/-0.458/	= -0.3449
0.798 .	/-0.371/	= -0.2960	0.798 .	/-0.320/	= -0.2554
0.835 .	/-0.479/	= -0.4000	0.835 .	/-0.103/	= -0.0860
0.865 .	/-0.470/	= -0.4065	0.865 .	0.139	= 0.1202
0.889 .	/-0.346/	= -0.3076	0.889 .	0.347	= 0.3085
0.909 .	/-0.137/	= -0.1245	0.909 .	0.470	= 0.4272
0.926 .	0.105	= 0.0972	0.926 .	0.478	= 0.4426
0.939 .	0.322	= 0.3023	0.939 .	0.369	= 0.3465
0.950 .	0.459	= 0.4360	0.950 .	0.169	= 0.1605
0.959 .	0.484	= 0.4641	0.959 .	/-0.0710/	= -0.0681
0.967 .	0.391	= 0.3781	0.967 .	/-0.295/	= -0.2853
0.973 .	0.202	= 0.1965	0.973 .	/-0.446/	= -0.4339
0.978 .	/-0.0368/	= -0.0360	0.978 .	/-0.488/	= -0.4773
0.982 .	/-0.938/	= -0.9211	0.982 .	0.316	= 0.3103
<hr/>			<hr/>		
Re K/j 0.5/ = 0.1303			Im K/j 0.5/ = -0.3524		



Częstotliwość  $u = 1.0$

<u>Re :</u>			<u>Im :</u>		
0.181 .	0.774 =	0.1401	0.181 .	0.497 =	0.0899
0.330 .	0.836 =	0.2758	0.330 .	/-0.383/ =	-0.1264
0.451 .	0.130 =	0.0586	0.451 .	/-0.910/ =	-0.4104
0.551 .	/-0.695/ =	-0.3829	0.551 .	/-0.601/ =	-0.3311
0.632 .	/-0.882/ =	-0.5574	0.632 .	0.261 =	0.1649
0.699 .	/-0.257/ =	-0.1796	0.699 .	0.882 =	0.6165
0.753 .	0.604 =	0.4548	0.753 .	0.693 =	0.5218
0.798 .	0.909 =	0.7254	0.798 .	/-0.134/ =	-0.1069
0.835 .	0.379 =	0.3165	0.835 .	/-0.838/ =	-0.6997
0.865 .	/-0.500/ =	-0.4325	0.865 .	/-0.771/ =	-0.6669
0.889 .	/-0.919/ =	-0.8170	0.889 .	0.136 =	0.0121
0.909 .	/-0.493/ =	-0.4481	0.909 .	0.776 =	0.7054
0.926 .	0.396 =	0.3667	0.926 .	0.834 =	0.7723
0.939 .	0.711 =	0.8554	0.939 .	0.125 =	0.1174
0.950 .	0.598 =	0.5681	0.950 .	/-0.698/ =	-0.6631
0.959 .	/-0.265/ =	-0.2541	0.959 .	/-0.880/ =	-0.8439
0.967 .	/-0.884/ =	-0.8548	0.967 .	/-0.253/ =	-0.2446
0.973 .	/-0.690/ =	-0.6714	0.973 .	0.607 =	0.5906
0.978 .	0.138 =	0.1350	0.978 .	0.909 =	0.8890
0.982 .	0.763 =	0.7493	0.982 .	/-0.581/ =	-0.5705
<hr/>			<hr/>		
Re $K/j 1.0/ = 0.0479$			Im $K/j 1.0/ = -0.1836$		

Otrzymane charakterystyka amplitudowo - fazowa przedstawione jest na rys. 50.



Rys. 50

## 6. Ocena ogólna metody.

Trudno mi jest podsumować ogólnie przydatność praktyczną metody, przedstawionej głównie w rozdziale 4 niniejszej pracy; sądzę, że stosowanie jej do układów liniowych o działaniu ciągłym raczej nie jest celowe, natomiast może ona dać pewne perspektywy w zagadnieniach nieliniowych. Zagadnienia nieliniowe leżą jednak w zasadzie poza zamierzonymi ramami tej pracy i stąd wystąpiły w niej tylko jak gdyby na marginesie zagadnień układów liniowych.

Najpierw stwierdziłmy zakres stosowania: metoda operatorów liczbowych pozwala na rozpatrywanie zagadnień układów automatycznej regulacji w oparciu o zdjęte doświadczalnie charakterystyki chwilowe. Nie ma w zasadzie sensu stosowania tej metody w przypadkach, gdy elementy układu są znane w formie analitycznej lub też w postaci charakterystyk częstotliwościowych.

Jeśli chodzi o układy o działaniu ciągłym nie zawierające elementów nieliniowych, to metoda operatorów liczbowych właściwie nie wprowadza żadnych nowych możliwości. Ani jej dokładność, ani też stosowalność nie są w tym przypadku większe niż te, które charakteryzują np. metodę charakterystyk częstotliwościowych.

Ocena praktyczności nowej metody dla szerszego ogółu musi być już przez to samo znacznie obniżona, gdyż dodawanie nowej do wielu już istniejących metod nie jest z punktu widzenia "użytkowników" pożądane. W tym świetle zalety metody - jej duża prostota i zapewne łatwa przyswajalność - będą z nadwyżką kompensowane przez duże wady: numeryczność, częstą potrzebę powtarzania dość uciążliwych rachunków, potrzebę konkretnego stawiania wymagań, trudną dla osób przyzwyczajonych do operowania charakterystykami częstotliwościowymi przetłumaczalność otrzymywanych wyników na parametry fizyczne układów, wreszcie - małą dokładność /por. rozdz. 2.2.8, pkt c/.

Zagadnienie wygląda inaczej wtedy, gdy w układzie trzeba uwzględnić pewne nieliniowości. Problemy nieliniowe z natury rzeczy muszą być traktowane konkretnie i liczbowo - przez co pewne cechy nowej metody przestają być wadami. Problemy nieliniowe zwykle są trudne i precyzyjne - łatwiej zatem można nowej metodzie darować niewielką do-

kładność i ewentualną potrzebę powtórzenia rachunków. Dotychczasowe zalety pozostają natomiast bez zmian : prostota i przyswajalność zapewne zyskują nawet na znaczeniu i wartości. Ponadto pojawia się nowa zaleta - to jednolitość metody i podejście do zagadnień liniowych i nieliniowych.

Znamienne jest, że w bardziej dostępnej literaturze światowej właściwie nie ma dotąd żadnej kontynuacji pracy Tustina, ogłoszonej w 1947 r. Jedyne bodaj jej echa można znaleźć u A. Portera, [11], jednak - jak już wspomniałem - wyraża on tylko nadzieję co do przyszłości metody Tustina, nie rozwijając jej merytorycznie.

Wykaz literatury

/zestawiony w kolejności powoływania się/

- 1 Блох Е.Ш. Динамика линейных систем автоматического регулирования машин. Гостехиздат, Москва 1952
- 2 Oldenbourg P., Sartorius H. Dynamik selbsttätiger Regelungen, Band I. Oldenbourg, München 1944 i 1951. tłum. ros. Госэнергоиздат 1949.
- 3 Ludbrook T.C. Step to frequency response transforms for linear servo systems. Electronic Engineering, 1954, str.27-30, 51-55, 122-126.
- 4 Brown G.S., Campbell D.P. Principles of servomechanisms. Wiley, New York 1948.
- 5 James H.M., Nichols B.S., Phillips R.S. Theory of servomechanisms. Mc Graw-Hill, New York 1947. tłum.ros.
- 6 Whiteley A.L. Fundamental principles of automatic regulators and servo mechanisms. Journal I.E.E., Pt.III, 1947, str. 5-22.
- 7 Солодовников В.В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. Гостехиздат 1952
- 8 Tustin A. A method of analysing the behaviour of linear systems in terms of time series. Journal I.E.E., Pt.III, 1947, str. 130-142.
- 9 Bellert S. Podstawy rachunku operatorów liczbowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej - Elektryka nr. 2 str. 3-37
- 10 Табачинский В.Ф. Графоаналитический метод определения тока при включении цепи на несинусоидальное напряжение. Электричество, 1953, 11, str. 64-66
- 11 Porter A. An introduction to servomechanisms. Methuen & Co. London 1950 i 1953.
- 12 Leonard A. Die selbsttätige Regelung. Springer, Berlin 1949.
- 13 Aaron M.P. Synthesis of feedback control systems by means of pole and zero location of the closed loop function. Trans. A.I.E.E. 1951, str. 1439-1446.

$$D = \frac{dp}{\Delta P}$$

$$0 = h + zX$$

$$\frac{zd}{1-xd} = \frac{d}{1} - \frac{d}{x}$$

$$\int_0^{\infty} x d^2 \frac{zd}{1-xd} - \int_0^{\infty} \frac{zd}{1} - \int_0^{\infty} \frac{d}{x}$$

$$P_{dh} - \int_0^{\infty} \frac{zd}{1-xd}$$

$$x d^2 \int \frac{d}{1} = \lambda \quad \lambda = h$$

$$x d^2 : \lambda \quad x = h$$

$$x p_{xd} \int_0^{\infty} \frac{d}{1} - \int_0^{\infty} x d^2 x \frac{d}{1} = x p_{xd} \int_0^{\infty} x$$

$$\frac{w d p}{x p} \leftarrow = w X \quad x \int_0^{\infty} x p_{xd} \int_0^{\infty} x = \frac{d p}{x p}$$

$$\frac{d p}{x p} - x$$

$$\frac{x}{1} - x$$

$$x p_{xd} \int_0^{\infty} x = x$$

$$x$$

$$+P \int_0^\infty a(t) dt = d \frac{b}{q} -$$

$$d \frac{b}{q} = a(t) f = d \frac{b}{q} \Rightarrow \int_0^\infty a(t) dt = (u) f$$

$$0 = \frac{dp}{dp} b -$$

$$0 = \frac{dp}{dp} (t) f q \rightarrow (t) f b$$

$$+P \int_0^\infty a(t) w dt = \frac{w dp}{(u) f w p} + = (u) w f$$

$$+P \int_0^\infty a(t) z dt = \frac{dp}{(u) f p} - \approx (t) z f$$

$$+P \int_0^\infty a(t) dt = (u) f$$

$$+P \int_0^\infty a(t) dt = (u) f \quad + = (t) f$$

$$+P \int_0^\infty a(t) dt \sim \frac{+P \int_0^\infty a(t) dt}{(u) f} = (u) f$$

Wykaz literatury

/zestawiony w kolejności powoływania się/

- 1 Блох З.Ш. Динамика линейных систем автоматического регулирования машин. Гостехиздат, Москва 1952
- 2 Oldenbourg P., Sartorius H. Dynamik selbsttätiger Regelungen, Band I. Oldenbourg, München 1944 i 1951. Tłum. ros. Госенергоиздат 1949.
- 3 Ludbrook L.C. Step to frequency response transforms for linear servo systems. Electronic Engineering, 1954, str.27-30, 51-55, 122-126.
- 4 Brown G.S., Campbell D.P. Principles of servomechanisms. Wiley, New York 1948.
- 5 James H.M., Nichols N.L., Phillips P.B. Theory of servomechanisms. Mc Graw-Hill, New York 1947. Tłum. ros. Изд. Иностр. Литер. 1951 i 1953
- 6 Whiteley A.L. Fundamental principles of automatic regulators and servo mechanisms. Journal I.E.E., Pt.III, 1947, str 5-22.
- 7 Солодовников В.В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. Гостехиздат 1952
- 8 Tustin A. A method of analysing the behaviour of linear systems in terms of time series. Journal I.E.E., Pt.III, 1947, str.130-142.
- 9 Bellert S. Podstawy rachunku operatorów liczbowych. Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej - Elektryka nr.2 str.3-37
- 10 Табачинский В.Ф. Графоаналитический метод определения тока при включении цепи на несинусоидальное напряжение. Электричество, 1953, 11, str.64-66
- 11 Porter A. An introduction to servomechanisms. Methuen & Co. London 1950 i 1953.
- 12 Leonard A. Die selbsttätige Regelung. Springer, Berlin 1949.
- 13 Aron M.R. Synthesis of feedback control systems by means of pole and zero location of the closed loop function. Trans. A.I.E.E. 1951, str.1439-1446.

- 14. Гелфонд А.О. Исчисление конечных разностей. Гостехиздат, Москва 1952.
- 15. Biernacki M. Pismo prywatne do Zakładu Elektrotechniki Teoretycznej P.A.N., dat. 30.3.1954, 1,5 str.
- 16. Weinberg L. Test for zeros in the unit circle. Journal of Appl. Phys., 1953, str. 1251-1252.

