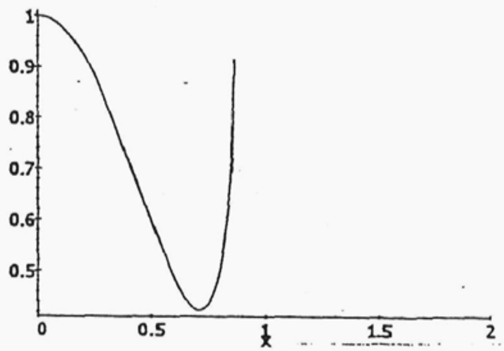


rys.4.2

Pomimo, iż funkcje użyte w przykładzie są stosunkowo proste, to jednak jesteśmy zmuszeni używać matematycznego oprogramowania komputerowego, aby pokazać nierówność (4.33).

5. Przedłużenie równocięciwowe

W tej części pracy rozważymy możliwość przedłużenia wklęsłej funkcji $f : [0, a] \to [0, +\infty)$ do równocięciwowej wypukłej krzywej z osią symetrii. Pokażemy, że przedłużenie jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f spełnia pewną nierówność różniczkową zwyczajną rzędu drugiego.

Niech $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę wszystkich równocięciwowych krzywych z osią symetrii i punktem równocięciwowości leżącym na tej osi symetrii. Możemy założyć, bez straty ogólności, że oś x jest osią symetrii, zaś początek układu współrzędnych jest punktem równocięciwowości.

Niech c będzie ustaloną liczbą dodatnią. Oznaczamy przez $\mathcal{B}(c)$ podrodzinę rodziny $\mathcal{B}$, taką, że:

1^oczęść wykresu krzywej $\Gamma \in \mathcal{B}(c)$ leżąca w górnej półpłaszczyźnie układu współrzędnych jest wykresem pewnej funkcji,

2^ostała równocięciwowa jest równa c,

3^owszystkie krzywe rodziny są klasy C^2, ewentualnie poza punktami przecięcia z osią symetrii,

4^owszystkie krzywe rodziny są ściśle wypukłe,

5^okrzywe rodziny dane są parametrycznie wzorem (1.2).

Niech $\Gamma \in \mathcal{B}(c)$. Załóżmy, że wykres funkcji f, gdzie $f : [a-c, a] \to [0, +\infty]$, zaś a jest ustaloną dodatnią liczbą, jest wykresem krzywej Γ w górnej półpłaszczyźnie układu współrzędnych. Oczywiście, kompletny wykres krzywej Γ jest sumą wykresów f i $-f$. Rozważamy cięciwę γ krzywej Γ przechodzącą przez początek układu i punkt $(x, f(x))$, $x \neq 0$, krzywej Γ. Oznaczamy przez $(\psi(x), -f(\psi(x)))$ współrzędne końca cięciwy γ. Wówczas mamy nastepującą zależność

$\frac{f(\psi(x))}{-\psi(x)} = \frac{f(x)}{x}$:

$$(5.1) \qquad f(\psi(x)) = -\psi(x)\frac{f(x)}{x} \qquad \text{dla} \qquad x \in [a-c, 0) \cup (0, a].$$

Wykorzystjąc równocięciwowość, otrzymujemy

$$(5.2) \qquad \sqrt{x^2 + f(x)^2} + \sqrt{\psi^2(x) + f(\psi(x))^2} = c \quad .$$

Podstawiając (5.1) do (5.2), dostajemy

$$\sqrt{x^2+f(x)^2}+\sqrt{\psi^2(x)+\left[-\psi(x)\frac{f(x)}{x}\right]^2}=c,$$

$$x^2+f(x)^2+\psi^2(x)+\left[-\psi(x)\frac{f(x)}{x}\right]^2$$

$$+2\sqrt{x^2+f(x)^2}\sqrt{\psi^2(x)+\left[-\psi(x)\frac{f(x)}{x}\right]^2}=c^2,$$

$$2x\sqrt{\left(x^2+f(x)^2\right)\left(x^2\psi^2(x)+\psi^2(x)f(x)^2\right)}$$

$$=c^2x^2-x^2\left(x^2+f(x)^2\right)-x^2\psi^2(x)-\psi^2(x)f(x)^2,$$

$$2x\left(x^2+f(x)^2\right)\mid\psi(x)\mid=c^2x^2-\left(x^2+f(x)^2\right)\left(x^2+\psi^2(x)\right),$$

$$\left(x^2+f(x)^2\right)\left[x^2+2x\mid\psi(x)\mid+\psi^2(x)\right]=c^2x^2,$$

$$(x+\mid\psi(x)\mid)^2=\frac{c^2x^2}{\left(x^2+f(x)^2\right)},$$

skąd

$$(5.3)\qquad \psi(x)=x-c\frac{x}{\sqrt{x^2+f(x)^2}}\qquad \text{dla}\quad x\in[a-c,a].$$

Nietrudno pokazać, że ψ jest ściśle malejącą funkcją.

Ustalmy dwie dodatnie liczby c i a. Niech $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji $f:[0,a]\to[0,+\infty)$ spełniających następujące warunki:

$$(5.4)\qquad f\in C^2(0,a),$$

$$(5.5)\qquad f(a)=0,\qquad f(0)=\frac{c}{2},$$

$$(5.6)\qquad f(x)>0\qquad \text{dla}\quad x\in[0,a),$$

$$(5.7)\qquad \text{istnieją granice}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0_-}\dot{f}(x),\qquad \lim_{x\longrightarrow 0_+}\dot{f}(x),$$

$$(5.8) \qquad \lim_{x \longrightarrow a_-} \dot{f}(x) = -\infty,$$

$$(5.9) \qquad cxf(x)\,\dot{f}(x) < cf^2(x) - \sqrt{x^2 + f(x)^2}^3 \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a)\,,$$

$$(5.10) \qquad \ddot{f}(x) < 0 \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a)\,.$$

Wszystkie wyżej wypisane warunki są naturalną konsekwencją niżej przeprowadzonych rozważań.

Z każdą funkcją $f \in \mathcal{F}$ wiążemy funkcję $\psi : [0,a] \to [a-c, 0]$ daną wzorem (5.3).

Tak, więc

$$\dot{\psi}(x) = 1 - c\frac{\sqrt{x^2+f(x)^2} - x\frac{2x+2f(x)\dot{f}(x)}{2\sqrt{x^2+f(x)^2}}}{\sqrt{x^2+f(x)^2}},$$

$$\dot{\psi}(x) = 1 - c\frac{2x^2+2f(x)^2 - x\left(2x+2f(x)\dot{f}(x)\right)}{2\left(x^2+f(x)^2\right)},$$

czyli

$$(5.11) \qquad \dot{\psi}(x) = 1 + cf(x)\frac{x\dot{f}(x) - f(x)}{\sqrt{x^2+f(x)^2}^3} \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a) \quad ,$$

Zauważmy, że warunek (5.9) znaczy iż funkcja ψ jest ściśle malejąca.

Zauważmy również, że

$$(5.12) \qquad \psi(0) = 0 \qquad \text{i} \qquad \psi(a) = a - c,$$

toteż ψ przekształca jednoznacznie przedział $[0,a]$ na przedział $[a-c, 0]$ i

$$(5.13) \qquad \dot{\psi}(0_+) = \lim_{x \longrightarrow 0_+} \dot{\psi}(x) = -1.$$

Monotoniczność funkcji ψ pozwala nam przedłużyć funkcję $f : [0.a] \to [0, +\infty)$

do funkcji $F : [a-c, a] \to [0, +\infty)$, poprzez formułę

$$(5.14) \qquad F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla} \quad x \in [0, a] \\ \frac{-x}{\psi^{-1}(x)} f\left(\psi^{-1}(x)\right) & \text{dla} \quad x \in [a-c, 0). \end{cases}$$

Pokażemy teraz, że krzywa Γ uzyskana z wykresów funkcji F and $-F$ jest reprezentantem rodziny $\mathcal{B}(c)$.

W pierwszym kroku pokazujemy, że $F \in C^1\left(\frac{-c}{a}, a\right)$.

Niech

$$(5.15) \qquad \Psi(x) = \frac{\psi(x)}{x} = 1 - \frac{c}{\sqrt{x^2 + f(x)^2}} \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a]$$

i

$$(5.16) \qquad \rho = \dot{f}(0_+) = \lim_{x \longrightarrow 0_+} \dot{f}(x).$$

Wówczas

$$(5.17) \qquad \dot{\Psi}(x) = c \frac{x + f(x)\dot{f}(x)}{\sqrt{x^2 + f(x)^2}^3} \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a),$$

$$(5.18) \qquad \ddot{\Psi}(x) = c \frac{\left(1 + \dot{f}(x)^2 + f(x)\ddot{f}(x)\right)\left(x^2 + f(x)^2\right) - 3\left(x + f(x)\dot{f}(x)\right)^2}{\sqrt{x^2 + f(x)^2}^5} \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a),$$

oraz

$$(5.19) \qquad \dot{\Psi}(0_+) = \lim_{x \longrightarrow 0_+} \dot{\Psi}(x) = \frac{4}{c}\rho,$$

$$(5.20) \qquad \ddot{\Psi}(0_+) = \lim_{x \longrightarrow 0_+} \ddot{\Psi}(x) = \frac{4}{c^2}\left[2 - 4\rho^2 + c\,\ddot{f}(0_+)\right].$$

Z (5.14) dostajemy

$$-F(\psi(x)) = \Psi(x) f(x) \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a),$$

t.j. $-F \circ \psi = \Psi f$.

Stąd otrzymujemy

$$(5.21) \qquad -\dot{\psi}\dot{F}\circ\psi = \dot{\Psi}\, f + \Psi\, \dot{f}\,.$$

Używając (5.13), (5.15) i (5.19) jesteśmy w stanie stwierdzić, że

$$-\left(-1\,\dot{F}\,(0_-)\right) = \tfrac{4}{c}\rho\tfrac{c}{2} - \rho = \rho,$$

czyli

$$(5.22) \qquad \dot{F}\,(0_-) = \dot{f}\,(0_+)\,,$$

co oznacza, że $F \in C^1\left(\frac{-c}{a}, a\right)$.

W nawiązaniu do warunku (5.8) jest oczywiste, że krzywa Γ uzyskana z wykresów F i $-F$ jest krzywą klasy C^1.

Chcemy teraz pokazać, że

$$(5.23) \qquad \ddot{F}\,(0_-) = \ddot{f}\,(0_+)\,.$$

Różniczkując (5.11) uzyskujemy

$$\ddot{\psi} = c\left[\dot{f}\,\frac{x\dot{f}-f}{\sqrt{x^2+f^2}^3} + f\,\frac{\left(\dot{f}+x\ddot{f}-\dot{f}\right)\sqrt{x^2+f^2}^3 - \left(x\dot{f}-f\right)\frac{3}{2}\sqrt{x^2+f^2}\left(2x+2f\dot{f}\right)}{(x^2+f^2)^3}\right],$$

$$\ddot{\psi} = \frac{c}{\sqrt{x^2+f^2}^5}$$

$$\left[x^3\,\dot{f}^2 - x^2 f\,\dot{f} + x f^2\,\dot{f}^2 - f^3\,\dot{f} + x f\,\ddot{f}\,(x^2+f^2) - 3x^2 f\,\dot{f} + 3x f^2 - 3x f^2\,\dot{f}^2 + 3f^3\,\dot{f}\right],$$

co zapisujemy w postaci

$$(5.24) \qquad \ddot{\psi} = \frac{c}{\sqrt{x^2+f^2}^5}\left[3xf^2 + \dot{f}\,(2f^3-4x^2 f) + \dot{f}^2\,(x^3-2xf^2) + \ddot{f}\,xf\,(x^2+f^2)\right]$$

dla $\quad x \in (0,a)\,.$

Uwzględniając wzory (5.13) i (5.16) otrzymujemy

(5.25) $\qquad \ddot{\psi}\,(0_+) = \frac{8}{c}\rho.$

Różniczkujac (5.21) dostajemy

(5.26) $\qquad -\ddot{\psi}\dot{F}\circ\psi - \left(\dot{\psi}\right)^2 \ddot{F}\circ\psi = \ddot{\Psi}\, f + 2\,\dot{\Psi}\dot{f} + \Psi\,\ddot{f} \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a)\,.$

Jeśli $x \longrightarrow 0_+$, wówczas używając formuł (5.13), (5.16), (5.19), (5.20), (5.22) i (5.25) oraz warunku

(5.27) $\qquad \ddot{f}\,(0_+) = \frac{-2}{c}\left(1 + 2\rho^2\right).$

jesteśmy w stanie uzasadnić, że $F \in C^2\,(a-c,a)$.

Otóż

$$-\frac{8}{c}\rho^2 - (-1)^2\,\ddot{F}\,(0_-) = \frac{4}{c^2}\left[2 - 4\rho^2 + c\,\ddot{f}\,(0_+)\right]\frac{c}{2} + 2\frac{4}{c}\rho^2 - \ddot{f}\,(0_+)\,,$$

$$-\ddot{F}\,(0_-) = \frac{4}{c} + \frac{8}{c}\rho^2 + \ddot{f}\,(0_+)\,,$$

czyli

$$\ddot{F}\,(0_-) = \ddot{f}\,(0_+)\,.$$

Warunki: Γ jest krzywą ściśle wypukłą i $\ddot{F}$ jest ujemne są sobie równoważne, więc uwzględniając (5.26), musimy zweryfikować następującą nierównośc

(5.28) $\qquad \dot{F}_\psi\ddot{\psi} + \frac{x^2\ddot{\psi} - 2x\dot{\psi} + 2\psi}{x^3} f + 2\frac{x\dot{\psi} - \psi}{x^2}\,\dot{f} + \frac{\psi}{x}\,\ddot{f} > 0 \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a)\,.$

Niech

(5.29) $\qquad L = \dot{F}_\psi\ddot{\psi} \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a)$

i

$$(5.30) \qquad P = \tfrac{x^2\ddot{\psi}-2x\dot{\psi}+2\psi}{x^3} f + 2\tfrac{x\dot{\psi}-\psi}{x^2}\, \dot{f} + \tfrac{\psi}{x}\, \ddot{f} \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a)\,.$$

Podstawiając $\psi, \dot{\psi}$ i $\ddot{\psi}$ do (5.30) otrzymujemy

$$P = \frac{\frac{cx^2}{\sqrt{x^2+f^2}^5}\left[3xf^2+\dot{f}\left(2f^3-4x^2f\right)+\dot{f}^2\left(x^3-2xf^2\right)+\ddot{f}xf\left(x^2+f^2\right)\right]-2x\left(1+cf\frac{x\dot{f}-f}{\sqrt{x^2+f^2}^3}\right)+2\left(x-c\frac{x}{\sqrt{x^2-f^2}}\right)}{x^3} f$$
$$+2\frac{x\left(1+cf\frac{x\dot{f}-f}{\sqrt{x^2+f^2}^3}\right)-\left(x-c\frac{x}{\sqrt{x^2+f(x)^2}}\right)}{x^2}\, \dot{f} + \frac{\left(x-c\frac{x}{\sqrt{x^2+f^2}}\right)}{x}\, \ddot{f}\,.$$

Po odpowiednim uporządkowaniu, mamy

$$(5.31) \qquad \sqrt{x^2+f^2}^5 P = c\left[-2x^2f + f^3 + 2x^3\, \dot{f}' - 4xf^2\, \dot{f} + 3x^2 f\left(\dot{f}\right)^2\right] +$$
$$+ \ddot{f}\left[cf^2 + \left(\sqrt{x^2+f^2} - c\right)\left(x^2+f^2\right)\right]\left(x^2+f^2\right) \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a)\,.$$

Teraz mając na uwadze (5.21) możemy lekko zmodyfikoać formę L, mianowicie

$$L = \quad \dot{F}_\psi \ddot{\psi} \quad = \quad \dot{F}_\psi \dot{\psi}\, \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}}$$

i dokonując analogicznych podstawień jak wyżej, dostajemy

$$L = \quad \dot{F}_\psi \ddot{\psi} \quad = \quad \dot{F}_\psi \dot{\psi}\, \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}} \quad = -\left(\dot{\Psi}\, f + \Psi\, \dot{f}\right) \frac{\ddot{\psi}}{\dot{\psi}}$$
$$= -\left[c\frac{x+f(x)\dot{f}(x)}{\sqrt{x^2+f(x)^2}^3} f + \left(1 - \frac{c}{\sqrt{x^2+f(x)^2}}\right)\dot{f}\right] \frac{\frac{c}{\sqrt{x^2+f^2}^5}\left[3xf^2+\dot{f}\left(2f^3-4x^2f\right)+\dot{f}^2\left(x^3-2xf^2\right)+\ddot{f}xf\left(x^2+f^2\right)\right]}{1+cf(x)\frac{x\dot{f}(x)-f(x)}{\sqrt{x^2+f(x)^2}^3}},$$

czyli

$$(5.32) \qquad \sqrt{x^2+f^2}^5 L =$$
$$\frac{-cxf+\left(cx^2-\sqrt{x^2+f^2}^3\right)f'}{\sqrt{x^2+f^2}^3+cf(xf'-f)} c\left[3xf^2 + f'\left(2f^3-4x^2f\right) + \left(f'\right)^2\left(x^3-2xf^2\right) + xff''\left(x^2+f^2\right)\right]$$
$$\text{dla} \quad x \in (0,a)\,.$$

Nierówność (5.28) może być zapisana w postaci

$$\sqrt{x^2+f^2}^5\left(L+P\right) > 0,$$

tj.

$$\frac{-cxf+\left(cx^2-\sqrt{x^2+f^2}^3\right)\dot{f}}{\sqrt{x^2+f^2}^3+cf\left(x\dot{f}-f\right)}c\left[3xf^2+\dot{f}\,(2f^3-4x^2f)+\left(\dot{f}\right)^2(x^3-2xf^2)+xf\,\ddot{f}\,(x^2+f^2)\right]$$
$$+c\left[-2x^2f+f^3+2x^3\,\dot{f}-4xf^2\,\dot{f}+3x^2f\left(\dot{f}\right)^2\right]$$
$$+\ddot{f}\left[cf^2+\left(\sqrt{x^2+f^2}-c\right)(x^2+f^2)\right](x^2+f^2)>0.$$

Zauważamy, że mianownik $\sqrt{x^2+f^2}^3+cf\left(x\,\dot{f}-f\right)$ na mocy warunku (5.9)

jest ujemmny. Uwzględniamy ten fakt zapisujemy

$$\left[-cxf+\left(cx^2-\sqrt{x^2+f^2}^3\right)\dot{f}\right]$$
$$\cdot\left[3xf^2+\dot{f}\,(2f^3-4x^2f)+\left(\dot{f}\right)^2(x^3-2xf^2)+xf\,\ddot{f}\,(x^2+f^2)\right]$$
$$+\left[\sqrt{x^2+f^2}^3+cf\left(x\,\dot{f}-f\right)\right]$$
$$\cdot\left[-2x^2f+f^3+2x^3\,\dot{f}-4xf^2\,\dot{f}+3x^2f\left(\dot{f}\right)^2+f^2\,\ddot{f}\,(x^2+f^2)\right]$$
$$+\left[\sqrt{x^2+f^2}^3+cf\left(x\,\dot{f}-f\right)\right]\left(\tfrac{1}{c}\sqrt{x^2+f^2}-1\right)(x^2+f^2)^2\,\ddot{f}<0.$$

Grupowanie wyrazów z $\ddot{f}, \dot{f}, \left(\dot{f}\right)^2$ i $\left(\dot{f}\right)^3$ prowadzi do nierówności

$$\left(f-x\,\dot{f}\right)^3\left(\sqrt{x^2+f^2}-c\right)$$
$$+2\sqrt{x^2+f^2}\left(x\,\dot{f}-f\right)\left(x+f\,\dot{f}\right)^2$$
$$+\tfrac{1}{c}\left(\sqrt{x^2+f^2}-c\right)\sqrt{x^2+f^2}^5\,\ddot{f}<0\ .$$

Zauważmy, że nierówność tę możemy zapisać w następującej postaci

$$\tfrac{1}{c}\sqrt{x^2+f^2}^5\,\ddot{f}>\left(x\,\dot{f}-f\right)\left[\left(x\,\dot{f}-f\right)^2+2\left(x+f\,\dot{f}\right)^2\frac{\sqrt{x^2+f^2}}{c-\sqrt{x^2+f^2}}\right].$$

Dzieląc przez $\frac{1}{c}\sqrt{x^2+f^2}^5$, ostatecznie otrzymujemy

$$\ddot{f} > c\frac{x\dot{f}-f}{(x^2+f^2)^2}\left[\frac{\left(x\dot{f}-f\right)^2}{\sqrt{x^2+f^2}} + 2\frac{\left(x+f\dot{f}\right)^2}{c-\sqrt{x^2+f^2}}\right].$$

Przeprowadzone rachunki prowadzą nas do następujących twierdzeń:

Twierdzenie 5.1.A. Niech $f \in \mathcal{F}$. Jeśli f spełnia nierówność różniczkową

$$\ddot{f}(x) > c\frac{x\dot{f}-f}{(x^2+f^2)^2}\left[\frac{\left(x\dot{f}-f\right)^2}{\sqrt{x^2+f^2}} + 2\frac{\left(x+f\dot{f}\right)^2}{c-\sqrt{x^2+f^2}}\right] \quad \text{dla} \quad x \in (0,a) \tag{5.33}$$

i zachodzi równość

$$\ddot{f}(0_+) = \tfrac{-2}{c}\left(1 + 2\,\dot{f}(0_+)^2\right), \tag{5.27}$$

to funkcję f można przedłużyć do krzywej klasy $\mathcal{B}(c)$.

Twierdzenie 5.1.B. Niech krzywa Γ bedzie krzywą klasy $\mathcal{B}(c)$. Jeśli wykresem funkcji f jest część krzywej Γ, leżąca w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, to funkcja f należy do klasy funkcji $\mathcal{F}$ i spełniona jest nierówność różniczkowa (5.33), i zachodzi równość (5.27).

Przykład 5.1. Niech $c = 4$ i $a \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Pokażemy, że funkcja $f(x) = \sqrt{2 + ax - x^2 + 2\sqrt{1+ax}}$ dla $x \in [0, 2+a]$ należy do rodziny $\mathcal{F}$, tj. sprawdzimy warunki (5.4) – (5.10), (5.27) i (5.33).

Niewątpliwie spełnione są warunki:

$$f \in C^2(0, 2+a), \tag{5.4}$$

$$f(2+a) = 0 \quad \text{i} \quad f(0) = 2, \tag{5.5}$$

$$f(x) > 0 \qquad \text{dla} \quad x \in [0, 2+a). \tag{5.6}$$

Ponieważ $\dot{f}(x) = \frac{1}{2f(x)}\left(a - 2x + \frac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)$

i $\ddot{f}(x) = \frac{-1}{4f^3(x)\sqrt{1+ax}^3}\left[4f^2(x)\sqrt{1+ax}^3 + \left(a - 2x + \frac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)^2\sqrt{1+ax}^3 + a^2 f^2(x)\right]$,

więc spełnione są warunki:

(5.7) istnieją granice $\lim\limits_{x\longrightarrow 0_+}\dot{f}(x)$ i $\lim\limits_{x\longrightarrow 0_+}\ddot{f}(x)$,

mianowicie

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0_+}\dot{f}(x) = \frac{a}{2}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0_+}\ddot{f}(x) = \frac{-(2+a^2)}{4}$, oraz

(5.8) $\lim\limits_{x\longrightarrow (2+a)_-}\dot{f}(x) = -\infty.$

Sprawdzimy teraz warunek (5.9), tj. nierówność:

$4xf(x)\dot{f}(x) < 4f^2(x) - \sqrt{x^2 + f(x)^2}^3$ dla $x \in (0, 2+a)$.

Niech $P(x) = 4f^2(x) - \sqrt{x^2 + f^2(x)}^3$ i $L(x) = 4xf(x)\dot{f}(x)$. Mamy

$$P(x) = 4\left(2 + ax - x^2 + 2\sqrt{1+ax}\right) - \sqrt{\left(1+\sqrt{1+ax}\right)^2}^3$$

$$= 8 + 4ax - 4x^2 + 8\sqrt{1+ax} - \left(1+\sqrt{1+ax}\right)^3$$

$$= 8 + 4ax - 4x^2 + 8\sqrt{1+ax} - 1 - 3\sqrt{1+ax} - 3(1+ax) - (1+ax)\sqrt{1+ax}$$

$$= 8 + 4ax - 4x^2 + 8\sqrt{1+ax} - 1 - 3\sqrt{1+ax} - 3 - 3ax - \sqrt{1+ax} - ax\sqrt{1+ax}$$

$$= 4 + ax - 4x^2 + (4 - ax)\sqrt{1+ax}$$

i

$$L(x) = 2x\left(a - 2x + \frac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)$$

$$= 2ax - 4x^2 + \frac{2ax}{\sqrt{1+ax}}.$$

Zatem, jeśli $L(x) < P(x)$, to

$4 + ax - 4x^2 + (4 - ax)\sqrt{1 + ax} > 2ax - 4x^2 + \frac{2ax}{\sqrt{1+ax}},$

$4 - ax + (4 - ax)\sqrt{1 + ax} > \frac{2ax}{\sqrt{1+ax}},$

$(4 - ax)\sqrt{1 + ax} + 4 + 4ax - ax - a^2x^2 > 2ax,$

czyli

$$(5.9.a) \qquad (4 - ax)\sqrt{1 + ax} > a^2x^2 - ax - 4 \qquad \text{dla} \quad x \in (0, 2 + a).$$

Niech $w(x) = a^2x^2 - ax - 4$ dla $x \in [0, 2 + a]$. Wówczas $w(x) < 0$ dla $x \in (x_1, x_2)$, gdzie $x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2a} < 0$ i $x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2a} > 0$.

Zauważmy, że $2 + a < x_2$, gdyż rozwiązaniem nierówności

$2 + a < \frac{1+\sqrt{17}}{2a}$, tj. $2a^2 + 4a - \left(1 + \sqrt{17}\right) < 0$ jest

$a \in \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{17}} - 1\right)$ i $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{17}} - 1.$

Ponadto $ax < 2 + a < 3$, tak więc

$-ax > -3$

$4 - ax > 4 - 3$

$4 - ax > 1,$

czyli

$(4 - ax)\sqrt{1 + ax} > 0.$

Lewa strona nierówności (5.9.a) jest dodatnia, zaś prawa jest ujemna dla $a \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Nierówność (5.9) jest więc spełniona.

Spełniona jest również nierówność:

$$(5.10) \qquad \ddot{f}(x) < 0 \qquad \text{dla} \quad x \in (0, 2+a),$$

gdyż

$$f(x)\ddot{f}(x) = -1 - \tfrac{1}{4}a^2(1+ax)^{\frac{-3}{2}} - \dot{f}^2(x) < 0 \qquad \text{dla} \quad x \in (0, 2+a).$$

Warunek

$$(5.27) \qquad \ddot{f}(0_+) = \tfrac{-1}{2}\left(1 + 2\dot{f}(0_+)^2\right).$$

jest spełniony, gdyż

$$\ddot{f}(0_+) = \tfrac{-\left(2+a^2\right)}{4} \quad \text{i} \quad \tfrac{-1}{2}\left(1 + 2\dot{f}(0_+)^2\right) = \tfrac{-1}{2}\left(1 + \tfrac{a^2}{2}\right) = \tfrac{-\left(2+a^2\right)}{4}.$$

Sprawdzimy również warunek

$$(5.33) \qquad \ddot{f}(x) > 4\tfrac{x\dot{f}(x)-f(x)}{\left(x^2+f^2(x)\right)^2}\left[\tfrac{\left(x\dot{f}(x)-f(x)\right)^2}{\sqrt{x^2+f^2(x)}} + 2\tfrac{\left(x+f(x)\dot{f}(x)\right)^2}{4-\sqrt{x^2+f^2(x)}}\right] \qquad \text{dla} \quad x \in (0, 2+a).$$

Niech $\Upsilon(x) = 4\frac{x\dot{f}(x)-f(x)}{\left(x^2+f^2(x)\right)^2}\left[\frac{\left(x\dot{f}(x)-f(x)\right)^2}{\sqrt{x^2+f^2(x)}} + 2\frac{\left(x+f(x)\dot{f}(x)\right)^2}{4-\sqrt{x^2+f^2(x)}}\right]$. Podstawiając $f(x)$ i $\dot{f}(x)$, otrzymujemy

$$\Upsilon(x) = \tfrac{-1}{2f(x)\sqrt{1+ax}}\left(1+\sqrt{1+ax}\right)^3 \tfrac{1}{\left(1+\sqrt{1+ax}\right)^2}\left[\tfrac{\left(1+\sqrt{1+ax}\right)^4}{f^2(x)\sqrt{1+ax}^2\left(1+\sqrt{1+ax}\right)} + 2a^2\tfrac{1}{\left(3-\sqrt{1+ax}\right)\sqrt{1+ax}^2}\right]$$
$$= \tfrac{-1}{2f(x)\sqrt{1+ax}^3}\left(1+\sqrt{1+ax}\right)\left[\tfrac{1+\sqrt{1+ax}}{f^2(x)} + 2a^2\tfrac{1}{3-\sqrt{1+ax}}\right]$$
$$= \tfrac{-\left(1+\sqrt{1+ax}\right)}{2f(x)\sqrt{1+ax}^3}\left[\tfrac{\left(1+\sqrt{1+ax}\right)^3}{f^2(x)} + \tfrac{2a^2}{3-\sqrt{1+ax}}\right]$$
$$= \tfrac{-\left(1+\sqrt{1+ax}\right)}{2f^3(x)\sqrt{1+ax}^3\left(3-\sqrt{1+ax}\right)}\left[\left(1+\sqrt{1+ax}\right)^3\left(3-\sqrt{1+ax}\right) + 2a^2f^2(x)\right].$$

Niech $\Theta(x) = \ddot{f}(x)$. Wówczas podstawiając $f(x)$ i $\dot{f}(x)$, otrzymamy

$$\Theta(x) = \tfrac{-1}{f(x)}\left(1 + \dot{f}^2(x) + \tfrac{a^2}{4\sqrt{1+ax}^3}\right)$$
$$= \tfrac{-1}{f(x)}\left[1 + \tfrac{1}{4f^2(x)}\left(a - 2x + \tfrac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)^2 + \tfrac{a^2}{4\sqrt{1+ax}^3}\right]$$

$$= \frac{-1}{4f^3(x)\sqrt{1+ax}^3}\left[4f^2(x)\sqrt{1+ax}^3 + \left(a-2x+\frac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)^2\sqrt{1+ax}^3 + a^2f^2(x)\right].$$

Zatem, jeśli $\Theta(x) > \Upsilon(x)$, to

$$\frac{-1}{4f^3(x)\sqrt{1+ax}^3}\left[4f^2(x)\sqrt{1+ax}^3 + \left(a-2x+\frac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)^2\sqrt{1+ax}^3 + a^2f^2(x)\right]$$
$$> \frac{-\left(1+\sqrt{1+ax}\right)}{2f^3(x)\sqrt{1+ax}^3\left(3-\sqrt{1+ax}\right)}\left[\left(1+\sqrt{1+ax}\right)^3\left(3-\sqrt{1+ax}\right)+2a^2f^2(x)\right], \text{ tj.}$$

$$(5.33.a)\qquad \left(4f^2(x)\sqrt{1+ax}^3 + \left(a-2x+\frac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)^2\sqrt{1+ax}^3 + a^2f^2(x)\right)\left(3-\sqrt{1+ax}\right)$$
$$< 2\left(1+\sqrt{1+ax}\right)\left[\left(1+\sqrt{1+ax}\right)^3\left(3-\sqrt{1+ax}\right)+2a^2f^2(x)\right] \qquad \text{dla} \quad x\in(0,2+a).$$

Dokonamy pomocniczych przekształceń. Mamy

$$4f^2(x) + \left(a-2x+\frac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)^2$$
$$= 4\left(2+ax-x^2+2\sqrt{1+ax}\right)+a^2+4x^2+\frac{a^2}{\sqrt{1+ax}^2}-4ax+\frac{2a^2}{\sqrt{1+ax}}-\frac{4ax}{\sqrt{1+ax}}$$
$$= 8+8\sqrt{1+ax}+a^2+\frac{a^2}{\sqrt{1+ax}^2}+\frac{2a^2-4ax}{\sqrt{1+ax}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+ax}^2}\left(8+(1+ax)+8\sqrt{1+ax}^3+a^2(1+ax)+a^2+\left(2a^2-4ax\right)\sqrt{1+ax}\right),$$

czyli

$$(a)\quad 4f^2(x) + \left(a-2x+\frac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)^2$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+ax}^2}\left(8+2a^2+8ax+a^3x+\left(8+2a^2+4ax\right)\sqrt{1+ax}\right).$$

Wykorzystując (a) stwierdzamy, że

$$\left(4f^2(x) + \left(a-2x+\frac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)^2\right)\sqrt{1+ax}^3 + a^2f^2(x)$$
$$= \left(8+2a^2+8ax+a^3x\right)\sqrt{1+ax}+\left(8+2a^2+4ax\right)(1+ax)+a^2\left(2+ax-x^2+2\sqrt{1+ax}\right)$$
$$= \left(8+4a^2+8ax+a^3x\right)\sqrt{1+ax}+8+8ax+2a^2+2a^3x+4ax+4a^2x^2+2a^2+$$
$$a^3x-a^2x^2,$$

czyli

$$(b)\quad \left(4f^2(x) + \left(a - 2x + \tfrac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)^2\right)\sqrt{1+ax}^3 + a^2 f^2(x)$$

$$= \left(8 + 4a^2 + 8ax + a^3 x\right)\sqrt{1+ax} + 8 + 4a^2 + 12ax + 3a^3 x + 3a^2 x^2,$$

Ponadto, mamy

$$\left(1+\sqrt{1+ax}\right)^3\left(3-\sqrt{1+ax}\right) + 2a^2 f^2(x)$$

$$= \left(4 + 3ax + (4+ax)\sqrt{1+ax}\right)\left(3-\sqrt{1+ax}\right) + 2a^2\left(2 + ax - x^2 + 2\sqrt{1+ax}\right)$$

$$= 12 - 4\sqrt{1+ax} + 9ax - 3ax\sqrt{1+ax} + (12+3ax)\sqrt{1+ax} - (4+ax)(1+ax)$$

$$+4a^2 + 2a^3 x - 2a^2 x^2 + 4a^2\sqrt{1+ax}$$

$$= 8\sqrt{1+ax} + 12 + 9ax - 4 - 4ax - ax - a^2x^2 + 4a^2 + 2a^3x - 2a^2x^2 + 4a^2\sqrt{1+ax}$$

$$= 8 + 4a^2 + 4ax + 2a^3 x - 3a^2 x^2 + \left(8 + 4a^2\right)\sqrt{1+ax},$$

tj.

$$(c)\quad \left(1+\sqrt{1+ax}\right)^3\left(3-\sqrt{1+ax}\right) + 2a^2 f^2(x)$$

$$= 8 + 4a^2 + \left(2a^3 + 4a\right)x - 3a^2x^2 + \left(8+4a^2\right)\sqrt{1+ax}.$$

Zatem, wykorzystując (a) i (b), lewa strona nierówności $(5.33.a)$ przyjmuje postać

$$\left(4f^2(x)\sqrt{1+ax}^3 + \left(a - 2x + \tfrac{a}{\sqrt{1+ax}}\right)^2\sqrt{1+ax}^3 + a^2f^2(x)\right)\left(3-\sqrt{1+ax}\right)$$

$$= \left[\left(8 + 4a^2 + 8ax + a^3x\right)\sqrt{1+ax} + 8 + 4a^2 + 12ax + 3a^3x + 3a^2x^2\right]\left(3-\sqrt{1+ax}\right)$$

$$= \left(24 + 12a^2 + 24ax + 3a^3x\right)\sqrt{1+ax} + 24 + 12a^2 + 36ax + 9a^3x + 9a^2x^2$$

$$-\left(8 + 4a^2 + 8ax + a^3x\right)(1+ax) - \left(8 + 4a^2 + 12ax + 3a^3x + 3a^2x^2\right)\sqrt{1+ax}$$

$$= \left(16 + 8a^2 + 12ax - 3a^2x^2\right)\sqrt{1+ax} + 24 + 12a^2 + 36ax + 9a^3x + 9a^2x^2$$

$$-8 - 8ax - 4a^2 - 4a^3x - 8ax - 8a^2x^2 - a^3x - a^4x^2$$

$$= \left(16 + 8a^2 + 12ax - 3a^2x^2\right)\sqrt{1+ax} + 16 + 8a^2 + 20ax + 4a^3x + a^2x^2 - a^4x^2.$$

Prawa strona nierówności $(5.33.a)$, po wykorzystaniu (c), przybiera formę

$$2\left[\left(1+\sqrt{1+ax}\right)^3\left(3-\sqrt{1+ax}\right) + 2a^2f^2(x)\right]\left(1+\sqrt{1+ax}\right)$$

$$= 2\left[8 + 4a^2 + \left(2a^3 + 4a\right)x - 3a^2x^2 + \left(8+4a^2\right)\sqrt{1+ax}\right]\left(1+\sqrt{1+ax}\right)$$

$$= 2\left[8 + 4a^2 + \left(2a^3 + 4a\right)x - 3a^2x^2 + \left(8+4a^2\right)\sqrt{1+ax}\right.$$

$$\left. + \left(8 + 4a^2 + \left(2a^3+4a\right)x - 3a^2x^2\right)\sqrt{1+ax} + \left(8+4a^2\right)(1+ax)\right]$$

$$= 2\left[\left(16 + 8a^2 + \left(2a^3+4a\right)x - 3a^2x^2\right)\sqrt{1+ax}\right.$$

$$\left. +8 + 4a^2 + \left(2a^3+4a\right)x - 3a^2x^2 + 8 + 8ax + 4a^2 + 4a^3x\right]$$

$$= 2\left[16 + 8a^2 + \left(6a^3 + 12a\right)x - 3a^2x^2 + \left(16 + 8a^2 + \left(2a^3+4a\right)x - 3a^2x^2\right)\sqrt{1+ax}\right]$$

Tak więc, nierówność $(5.33.a)$ sprowadza się do postaci

$$16 + 8a^2 + 20ax + 4a^3x + a^2x^2 - a^4x^2 + \left(16 + 8a^2 + 12ax - 3a^2x^2\right)\sqrt{1+ax}$$

$$< 32 + 16a^2 + 12a^3x + 24ax - 6a^2x^2 + \left(32 + 16a^2 + 4a^3x + 8ax - 6a^2x^2\right)\sqrt{1+ax},$$

tj.

$$(5.33.b) \quad 7a^2x^2 + 3a^2x^2\sqrt{1+ax} + 4ax\sqrt{1+ax}$$

$$< 16 + 8a^2 + 4ax + 8a^3x + a^4x^2 + \left(16 + 8a^2 + 4a^3x\right)\sqrt{1+ax}.$$

Zauważmy, że lewa strona nierówności $(5.33.b)$ jest mniejsza od 7, gdyż

$$7a^2x^2 + 3a^2x^2\sqrt{1+ax} + 4ax\sqrt{1+ax}$$

$$= \left(7+3\sqrt{1+ax}\right)a^2x^2+4ax\sqrt{1+ax} < \left(7+3\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{9}{4}}\right)\frac{1}{16}\frac{81}{16}+4\cdot\frac{1}{4}\frac{9}{4}\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{9}{4}}$$

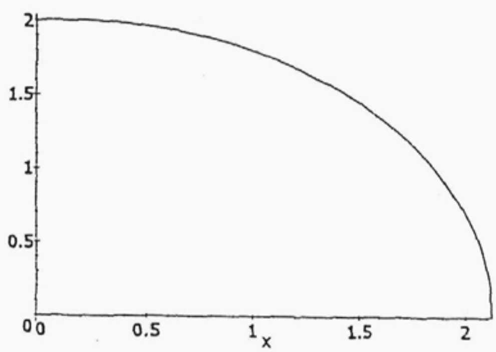
$$= \left(7+3\sqrt{\frac{25}{16}}\right)\frac{81}{16^2}+\frac{36}{16}\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{1}{16^2}\left[\left(7+\frac{15}{4}\right)81+36\cdot 20\right] = \frac{1}{16^2\cdot 4}\left(43\cdot 81+2880\right) <$$

$7,$

zaś prawa strona nierówności (5.33.*b*) jest większa od 16. Warunek (5.33) jest więc spełniony.

Poniżej przedstawiamy wykres (*rys.*5.1) reprezentanta rodziny $\mathcal{F}$ dla $a = \frac{1}{8}$:

$$f(x) = \sqrt{2+\frac{1}{8}x-x^2+2\sqrt{1+\frac{1}{8}x}} \quad \text{dla} \quad x \in [0; 2,125].$$



rys.5.1

6. Krzywe „połówkowe"

Niech $\mathcal{P}$ oznacza rodzinę wszystkich zamkniętych,równocięciwowych krzywych płaskich. Pole obszaru ograniczonego krzywą $C \in \mathcal{P}$ oznaczymy symbolem $|\,C\,|$. Oznaczamy przez $\mathcal{P}(c)$ podrodzinę rodziny $\mathcal{P}$, taką, że:

1°każda krzywa tej rodziny jest klasy C^2,