Mamy

$$(2.9) \qquad \cot^2\alpha\left[\dot{f}\circ\rho\cdot r+\ddot{f}\circ\rho\cdot\rho^2\right]-\dot{f}\circ\rho\cdot\rho\frac{\frac{k\rho}{\sin\alpha}-1}{\sin^2\alpha}$$
$$+\cot^2\alpha_\pi\left[\dot{f}\circ\rho_\pi\cdot\rho_\pi+\ddot{f}\circ\rho_\pi\cdot\rho_\pi^2\right]-\dot{f}\circ\rho_\pi\cdot\rho_\pi\frac{\frac{k_\pi\rho_\pi}{\sin\alpha_\pi}-1}{\sin^2\alpha_\pi}=0$$

dla $t\in[0,2\pi]$.

Zależność (2.10) przyjmuje postać

$$(2.11) \qquad k(0)+k(\pi)=\tfrac{1}{\rho(0)}+\tfrac{1}{\rho(\pi)}=c_S.$$

Zatem z (2.10) i (2.11) mamy

$c_R = c_S.$

3. Owale 0−równocięciwowe

W rozdziale tym rozważamy rodzinę $\mathcal{K}_p$ owali 0-równocięciwowych, tj.owali równopotęgowych. Przez $\mathcal{K}_p(c)$ oznaczamy podrodzinę rodziny $\mathcal{K}_p$ dla, której spełnione są warunki:

1^okażda krzywa C rodziny $\mathcal{K}_p(c)$ jest klasy C^2,

2^okażda krzywa C rodziny $\mathcal{K}_p(c)$ jest opisana parametrycznie wzorem (1.2),

3^ostała równopotęgowa to dodatnia liczba c,

4^okrzywizna k krzywej C rodziny $\mathcal{K}_p(c)$ jest klasy C^1.

Możemy założyć (bez straty ogólności), że początek kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie jest punktem równopotęgowości krzywej równopotęgowej C.

Niech C należy do rodziny $\mathcal{K}_p(c)$. Zatem

$$(3.1) \qquad rr_\pi = c \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi].$$

Skoro $f(x) = \ln x$, to z (2.7) otrzymujemy

$$(3.2) \qquad \cot\alpha + \cot\alpha_\pi = 0 \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi].$$

Warunek (3.2) równoważny jest warunkowi

$$(3.3) \qquad \alpha + \alpha_\pi = \pi \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi].$$

Stąd mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1. Krzywa $C \in \mathcal{K}_p(c)$ wtedy i tylko wtedy, gdy warunek (3.3) jest spełniony.

Wstawiając w (1.15) $t + \pi$ w miejsce t, po uwzględnieniu (3.3), otrzymujemy

$$(3.4) \qquad k_\pi r_\pi = (1 - \dot{\alpha})\sin\alpha \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi].$$

Uwzględniając (3.3), wzór (2.9) przyjmuje postać

$$\cot^2\alpha\left[r\frac{1}{r} + r^2\frac{(-1)}{r^2}\right] - \frac{\frac{kr}{\sin\alpha} - 1}{\sin^2\alpha} r\frac{1}{r} +$$

$$+\cot^2\alpha_\pi\left[r_\pi\frac{1}{r_\pi} + r_\pi^2\frac{(-1)}{r_\pi^2}\right] - \frac{\frac{k_\pi r_\pi}{\sin\alpha_\pi} - 1}{\sin^2\alpha_\pi} r_\pi\frac{1}{r_\pi} \equiv 0,$$

czyli

$$\frac{-kr}{\sin^3\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{-k_\pi r_\pi}{\sin^3\alpha_\pi} + \frac{1}{\sin^2\alpha_\pi} \equiv 0.$$

Stąd mamy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.2. Niech $C \in \mathcal{K}_p(c)$. Między krzywizną k krzywej C, kątem α oraz długością promienia wodzącego r, zachodzi zależność

(3.5) $\quad kr + k_\pi r_\pi = 2\sin\alpha \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi]\,.$

Różniczkując (3.5), a następnie wykorzystując (1.13) , (1.15) , (3.3) i (3.5) , dostajemy kolejno

$$\dot{k}r + k\dot{r} + \dot{k}_\pi r_\pi + k_\pi \dot{r}_\pi = 2\dot{\alpha}\cos\alpha,$$

$$\dot{k}r + \dot{k}_\pi r_\pi + rk\cot\alpha + r_\pi k_\pi \cot\alpha_\pi = 2\left(\tfrac{kr}{\sin\alpha} - 1\right)\cos\alpha,$$

$$\dot{k}r + \dot{k}_\pi r_\pi = 2rk\cot\alpha - 2\cos\alpha - rk\cot\alpha - r_\pi k_\pi \cot\alpha_\pi,$$

$$\dot{k}r + \dot{k}_\pi r_\pi = rk\cot\alpha + r_\pi k_\pi \cot\alpha - 2\cos\alpha,$$

$$\dot{k}r + \dot{k}_\pi r_\pi = (rk + r_\pi k_\pi - 2\sin\alpha)\cot\alpha,$$

$$\dot{k}r + \dot{k}_\pi r_\pi = [rk + r_\pi k_\pi - (kr + k_\pi r_\pi)]\cot\alpha,$$

czyli

(3.6) $\quad \dot{k}r + \dot{k}_\pi r_\pi = 0 \qquad \text{dla} \quad t \in [0, 2\pi]\,.$

Stąd, ze względu na (3.1) , mamy następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.3. Jeśli równopotęgowy owal $C \in \mathcal{K}_p(c)$, to

(3.7) $\quad \dot{k}r^2 + \dot{k}_\pi c = 0 \qquad \text{dla} \quad t \in [0, 2\pi]\,.$

Formuła (3.7) ma nastepującą interpretację geometryczną:

Twierdzenie 3.4. Niech $C \in \mathcal{K}_p(c)$ i niech cięciwa równopotęgowa krzywej C przechodzi przez punkty A, B. Wtedy, jeśli A jest wierzchołkiem krzywej C , wówczas B jest również jej wierzchołkiem.

Z twierdzenia 3.4 i z twierdzenia o czterech wierzchołkach[11] wynika natychmiast następujący wniosek:

Wniosek 3.1. Owal równopotęgowy $C \in \mathcal{K}_p(c)$ ma $4n+2$ wierzchołków, $n \geqslant 1$.

3.1. Owale równopotęgowe z dokładnie sześcioma wierzchołkami

Jak wiemy owal równopotęgowy ma co najmniej sześć wierzchołków. Skonstruujemy teraz owal z dokładnie sześcioma wierzchołkami.

Niech

$$r(t) = \exp(b \sin t) \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi] \quad \text{i ustalonego } b \in (0,1)\,. \tag{3.8}$$

Zauważmy, że

$$r(t)\, r(t+\pi) = \exp(b\sin t)\exp(b\sin(t+\pi)) = \exp(b\sin t)\exp(-b\sin t) = 1$$

dla $t \in [0, 2\pi]$.

Z (1.14) mamy

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{2\dot{r}^2(t) - r(t)\ddot{r}(t) + r^2(t)}{\left(\sqrt{\dot{r}^2(t)+r^2(t)}\right)^3} \\ &= \frac{2b^2\cos^2 t\exp(2b\sin t) - \exp(b\sin t)\left[b^2\cos^2 t\exp(b\sin t) - b\sin t\exp(b\sin t)\right] + \exp(2b\sin t)}{\left(\sqrt{b^2\cos^2 t\exp(2b\sin t)+\exp(2b\sin t)}\right)^3} \\ &= \frac{\exp(2b\sin t)\left(2b^2\cos^2 t - b^2\cos^2 t + b\sin t + 1\right)}{\exp(3b\sin t)\left(\sqrt{b^2\cos^2 t+1}\right)^3}, \end{aligned}$$

czyli

$$k(t) = \frac{1+b\sin t+b^2\cos^2 t}{(1+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}\exp(-b\sin t) > 0 \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi]\,. \tag{3.9}$$

Różniczkując (3.9), dostajemy

$\dot{k}\,(t) = \frac{1}{\exp(2b\sin t)(1+b^2\cos^2 t)^3}\cdot$

$\Big\{(b\cos t - 2b^2\cos t\sin t)\exp(b\sin t)\,(1+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$

$-\,(1+b\sin t+b^2\cos^2 t)\cdot$

$\Big[\exp(b\sin t)\,b\cos t\left(\sqrt{1+b^2\cos^2 t}\right)^3 + \exp(b\sin t)\,\frac{3}{2}\sqrt{1+b^2\cos^2 t}\,(-2b^2\cos t\sin t)\Big]\Big\}$

$= \frac{1}{\exp(2b\sin t)(1+b^2\cos^2 t)^3}\cdot$

$\{\exp(b\sin t)\,\sqrt{1+b^2\cos^2 t}\cdot$

$[-2b^2\cos t\sin t\,(1+b^2\cos^2 t)+b\cos t\,(1+b^2\cos^2 t)$

$-\,(1+b\sin t+b^2\cos^2 t)\,(b\cos t\,(1+b^2\cos^2 t)-3b^2\cos t\sin t)]\}$

$$= \frac{\exp(-b\sin t)}{(1+b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}\{-2b^2\cos t\sin t\,(1+b^2\cos^2 t)+b\cos t\,(1+b^2\cos^2 t)-b\cos t\,(1+b^2\cos^2 t)^2$$
$$-b^2\cos t\sin t\,(1+b^2\cos^2 t)+3b^2\cos t\sin t\,(1+b^2\cos^2 t)+3b^3\cos t\sin^2 t\}$$

$$= \Big[b\cos t\,(1+b^2\cos^2 t)+3b^3\cos t\sin^2 t-b\cos t\,(1+b^2\cos^2 t)^2\Big]\,\frac{\exp(-b\sin t)}{(1+b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= [-b^2\cos^4 t-4\cos^2 t+3]\,\frac{b^3\exp(-b\sin t)}{(1+b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}\cos t.$$

Tak więc, mamy

$$\text{(3.10)}\qquad \dot{k}\,(t)\,(1+b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}\exp(b\sin t) = b^3\,[-b^2\cos^4 t-4\cos^2 t+3]\cos t$$

dla $t\in[0,2\pi]$.

W przedziale $[0,2\pi)$, równanie (3.10) ma dokładnie sześć pierwiastków.

$\dot{k}\,(t)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$\cos t=0$ lub $-b^2\cos^4 t-4\cos^2 t+3=0.$

Stąd

$\cos t = 0 \quad$ lub $\quad \cos^2 t = \frac{-2+\sqrt{4+3b^2}}{b^2} > 0 \quad$ lub $\quad \cos^2 t = \frac{-2-\sqrt{4+3b^2}}{b^2} < 0.$

Łatwo sprawdzić, że dla $b \in (0,1)$ mamy $0 < -2 + \sqrt{4+3b^2} < b^2$.

3.2. Wypukłe krzywe równopotęgowe

W paragrafie tym rozważamy klasę $\mathcal{K}$ płaskich, zamkniętych, wypukłych krzywych C, klasy C^2, opisanych formułą (1.2). Definiujemy funkcję $\lambda : R \to R$ nastepująco:

(3.11) $\quad \lambda = k \mid \dot{z} \mid \qquad$ dla $t \in R$,

tj.

(3.12) $\quad \lambda = \frac{2\dot{r}^2 + r^2 - r\ddot{r}}{r^2+\dot{r}^2} \qquad$ dla $t \in R$.

Jest oczywiste, że funkcja λ jest dodatnio określona, ciągła i 2π okresowa. Uwzględniając (1.13), otrzymujemy

$\lambda = 1 - \frac{\ddot{r}r - \dot{r}^2}{r^2+\dot{r}^2}$,

$\lambda = 1 - \frac{\left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^{\cdot}}{1+\left(\frac{\dot{r}}{r}\right)^2}$,

$\lambda = 1 + \left(\operatorname{arccot} \frac{\dot{r}}{r}\right)^{\cdot}$,

$\lambda = 1 + \dot{\alpha}$.

Tak więc mamy prostą relację pomiędzy funkcjami λ and α, mianowicie

(3.13) $\quad \lambda = 1 + \dot{\alpha} \qquad$ dla $t \in R$.

Całkując (3.13), uwzględniając okresowość funkcji α, uzyskujemy

(3.14) $\int\limits_0^{2\pi} \lambda(t)\,dt = 2\pi.$

Zauważmy, że funkcja Λ, określona poniżej

(3.15) $\Lambda(t) = \int\limits_0^{t} \lambda(s)\,ds \qquad$ dla $t \in [0, 2\pi]$,

ma następujące znaczenie geometryczne:

$\Lambda(t)$ jest miarą kąta zorientowanego pomiędzy wektorem wodzącym punktu $z(0)$, a styczną do krzywej C w punkcie $z(t)$.

Odnotujmy własności funkcji λ :

$1°\lambda$ jest funkcją dodatnio określoną,

$2°\lambda$ jest funkcją $2\pi-$okresową,

$3°\lambda$ jest funkcją ciągłą,

$4° \int\limits_0^{2\pi} \lambda(t)\,dt = 2\pi$,

$5° 0 < \int\limits_0^{t} \lambda(s)\,ds < t + \pi$.

Odnotujmy również własności funkcji α :

$1°\alpha \in C^1$,

$2°\alpha$ jest funkcją 2π-okresową,

$3°\dot{\alpha} + 1 > 0 \qquad$ dla $t \in R$,

$4° \int\limits_0^{2\pi} \cot\alpha(t)\,dt = 0$.

Jak wiemy $\cot\alpha = \frac{\dot{r}}{r}$, więc

$$\int_0^t \cot\alpha(s)\,ds = \int_0^t \frac{\dot{r}(s)}{r(s)}ds = \ln r(t) - \ln r(0),$$
$$r(t) = \exp\left(\int_0^t \cot\alpha(s)\,ds + \ln r(0)\right),$$
$$r(t) = \exp\left(\int_0^t \cot\alpha(s)\,ds\right) r(0),$$

czyli

$$(3.16) \quad r(t) = r_o \exp\int_0^t \cot\alpha(s)\,ds, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

gdzie $r_o = r(0)$.

Możemy założyć bez straty ogólności, że $\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$.

Z równości (3.13) $\dot{\alpha} = \lambda - 1$, mamy

$$\int_0^t \dot{\alpha}(s)\,ds = \int_0^t (\lambda(s) - 1)\,ds = \alpha(t) - \alpha(0) = \alpha(t) - \tfrac{\pi}{2}$$

i

$$\cot\alpha(t) = -\tan\left(\alpha(t) - \tfrac{\pi}{2}\right) = -\tan\int_0^t (\lambda(s) - 1)\,ds = \tan\int_0^t (1 - \lambda(s))\,ds$$
$$\text{dla } t \in [0, 2\pi].$$

Prawdziwa jest zatem równość

$$(3.17) \quad r(t) = r_o \exp\int_0^t \tan\int_0^\tau (1 - \lambda(s))\,ds d\tau \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi].$$

Okresowość funkcji r pozwala nam napisać

$$(3.18) \quad \int_0^{2\pi} \tan\int_0^\tau (\lambda(s) - 1)\,ds d\tau = 0.$$

Na mocy (1.15), wykorzystując (3.13), krzywiznę k krzywej C możemy zapisać w następujący sposób

$$(3.19) \quad k = \frac{1}{r}(1 + \dot{\alpha})\sin\alpha \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi].$$

Różniczkując (3.19) i wykorzystując (1.13), dostajemy

$\dot{k} = \frac{1}{r^2} \{[\ddot{\alpha} \sin \alpha + (1 + \dot{\alpha})\, \dot{\alpha} \cos \alpha]\, r - [(1 + \dot{\alpha}) \sin \alpha]\, \dot{r}\}$

$= \frac{1}{r} \left[\ddot{\alpha} + (1 + \dot{\alpha})\, \dot{\alpha} \cot \alpha - (1 + \dot{\alpha}) \frac{\dot{r}}{r}\right]$

$= \frac{1}{r} [\ddot{\alpha} + (1 + \dot{\alpha})\, \dot{\alpha} \cot \alpha - (1 + \dot{\alpha}) \cot \alpha]$,

czyli

$$\dot{k} = \frac{1}{r} \left[\ddot{\alpha} + \left(\dot{\alpha}^2 - 1\right) \cot \alpha\right] \sin \alpha \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi]. \tag{3.20}$$

Funkcje λ i α pozwalają nam skonstruować szczególny przykład rodziny krzywych równopotęgowych .

Przykład 3.2.1. Niech $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} + \arctan \sin t \qquad$ dla $t \in [0, 2\pi]$.

Rzeczywiście funkcja α posiada wcześniej wypisane własności, tj. :

$1^\circ \alpha \in C^1$,

$2^\circ \alpha$ jest funkcją $2\pi-$okresową,

$3^\circ \int\limits_0^{2\pi} \cot \alpha(t)\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\pi}{2} + \arctan \sin t\right) dt$

$= -\int\limits_0^{2\pi} \tan(\arctan \sin t)\, dt = -\int\limits_0^{2\pi} \sin t dt = 0,$

$4^\circ 1 + \dot{\alpha}(t) = 1 + \frac{\cos t}{1+\sin^2 t} \geqslant 0 \qquad$ dla $t \in [0, 2\pi]$

(z równością tylko dla $t = \pi$).

Zauważmy ponadto, że funkcja α jest dodatnio określona, α przyjmuje wartosci z przedziału $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ i funkcja α spełnia tożsamość z twierdzenia 3.1:

$\alpha(t) + \alpha(t + \pi) = \frac{\pi}{2} + \arctan \sin t + \frac{\pi}{2} + \arctan \sin(t + \pi) = \pi.$

Z (3.19) widzimy, że $k = \frac{1}{r}(1+\dot{\alpha})\sin\alpha \geqslant 0$ i krzywa C generowana przez α jest wypukła, ale nie jest owalem.

Sprawdzimy teraz ile wierzchołków ma krzywa C. W tym celu przyrównajmy do zera $\dot{k}$. Wtedy z (3.20) otrzymujemy

$$\frac{1}{r}\left[\ddot{\alpha}+\left(\dot{\alpha}^2-1\right)\cot\alpha\right]\sin\alpha = 0,$$

$$\ddot{\alpha}+\left(\dot{\alpha}^2-1\right)\cot\alpha = 0,$$

$$\cot\left(\tfrac{\pi}{2}+\arctan\sin t\right)\left[\left(\tfrac{\cos t}{1+\sin^2 t}\right)^2-1\right]+\frac{-\sin t\left(1+\sin^2 t\right)-\cos t 2\sin t\cos t}{\left(1+\sin^2 t\right)^2} = 0,$$

$$\tan\left(\arctan\sin t\right)\left(\cos^2 t-1-2\sin^2 t-\sin^4 t\right)+\sin t+\sin^3 t+2\sin t\cos^2 t = 0,$$

$$\left(-3\sin^2 t-\sin^4 t\right)+\sin t\left(3-\sin^2 t\right)\sin t = 0,$$

$$\left(\sin^4 t+4\sin^2 t-3\right)\sin t = 0,$$

$$\left(\sin^2 t+2+\sqrt{7}\right)\left(\sin^2 t+2-\sqrt{7}\right)\sin t = 0.$$

Stąd wynika, że

$$\sin t = 0 \qquad \text{lub} \qquad \sin^2 t = -2+\sqrt{7} < 1.$$

Niewątpliwie równanie $\dot{k}(t) = 0$ ma sześć pierwiastków.

Wykorzystując (3.16), promień wodzący dowolnego punktu krzywej C wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} r(t) &= r_o \exp\int_0^t \cot\alpha(s)\,ds \\ &= r_o \exp\int_0^t (-\sin s)\,ds \\ &= r_o \exp(\cos t-1) \qquad \text{dla} \quad t\in[0,2\pi], \end{aligned}$$

gdzie r_o jest dowolnie ustaloną liczbą dodatnią.

3.3. Wzór całkowy Croftona dla krzywych równopotęgowych

Niech C_j , $t \to r_j(t)\, e^{it}$ $(j = 1, 2)$ będą dwiema różnymi krzywymi równopotęgowymi i

$$(3.21) \qquad r_j(t)\, r_j(t+\pi) = c_j \qquad \text{dla} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Zakładamy, że krzywa C_1 leży w obszarze ograniczonym krzywą C_2 (wówczas $c_2 > c_1$). Oznaczmy przez C_1C_2 obszar ograniczony przez krzywe C_1 i C_2, zaś przez D obszar C_1C_2 z wyciętym pewnym odcinkiem.

Niech $E = \{(s,t) : 0 < s < 1,\ 0 < t < 2\pi\}$.

Rozważmy odwzorowanie $F : E \to D$ dane wzorem

$$(3.22) \quad F(s,t) = R(s,t)\, e^{it} = r_2(t)^s\, r_1(t)^{1-s}\, e^{it}.$$

Dla każdego ustalonego s_o krzywa $t \to F(s_o, t)$ jest krzywą równopotęgową, gdyż

$$\begin{aligned} R(s_o,t)\, R(s_o, t+\pi) &= r_2(t)^{s_o}\, r_1(t)^{1-s_o}\, r_2(t+\pi)^{s_o}\, r_1(t+\pi)^{1-s_o} \\ &= [r_2(t)\, r_2(t+\pi)]^{s_o}\, [r_1(t)\, r_1(t+\pi)]^{1-s_o} \\ &= c_2^{s_o} c_1^{1-s_o}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że F jest odwzorowaniem $1:1$ i jakobian $F'(s,t)$ w punkcie (s,t) jest dany wzorem

$$F'(s,t) = \{r_2(t)^s \ln r_2(t)\, r_1(t)^{1-s}\, e^{it} - r_2(t)^s\, r_1(t)^{1-s} \ln r_1(t)\, e^{it},$$

$$\left(\dot{r_2(t)^s}\right) r_1(t)^{1-s} e^{it} + r_2(t)^s \left(\dot{r_1(t)^{1-s}}\right) e^{it} + r_2(t)^s r_1(t)^{1-s} ie^{it}\Big\}$$

$$= \left\{r_2(t)^s \ln r_2(t) r_1(t)^{1-s} e^{it}, r_2(t)^s r_1(t)^{1-s} ie^{it}\right\} -$$

$$- \left\{r_2(t)^s r_1(t)^{1-s} \ln r_1(t) e^{it}, r_2(t)^s r_1(t)^{1-s} ie^{it}\right\}$$

$$= r_2(t)^s \ln r_2(t) r_1(t)^{1-s} r_2(t)^s r_1(t)^{1-s} - r_2(t)^s r_1(t)^{1-s} \ln r_1(t) r_2(t)^s r_1(t)^{1-s}$$

$$= \left[r_2(t)^s r_1(t)^{1-s}\right]^2 \left[\ln r_2(t) - \ln r_1(t)\right],$$

tj.

$$F'(s,t) = \left(r_2(t)^s r_1(t)^{1-s}\right)^2 \ln \tfrac{r_2(t)}{r_1(t)}. \tag{3.23}$$

Niech $\omega \in R^2$. Oznaczmy przez $\| \omega \|$ długość odcinka łączącego początek układu O z punktem ω. Wykorzystując dyfeomorfizm F udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.5. Niech krzywe równopotęgowe C_1, C_2 spełniają warunek (3.21). Jeśli krzywa C_1 leży w obszarze ograniczonym krzywą C_2 (wówczas $c_2 > c_1$), to prawdziwy jest następujący wzór całkowy Croftona

$$\iint\limits_{C_1C_2} \tfrac{1}{\|\omega\|^2} d\omega = \pi \ln \tfrac{c_2}{c_1}. \tag{3.24}$$

Dowód. Niech $\omega \in C_1C_2$. Oznaczamy przez t miarę kąta skierowanego pomiędzy osią odciętych x, a odcinkiem $O\omega$. Wówczas $\omega = r_2(t)^s r_1(t)^{1-s} e^{it}$ dla pewnego $s \in (0,1)$. Wykorzystując jakobian F', dostajemy

$$\iint\limits_{C_1C_2} \tfrac{1}{\|\omega\|^2} d\omega = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\left(r_2(t)^s r_1(t)^{1-s}\right)^2} \left(r_2(t)^s r_1(t)^{1-s}\right)^2 \ln \tfrac{r_2(t)}{r_1(t)} dt ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln \frac{r_2(t)}{r_1(t)} dt$$
$$= \int_0^{\pi} \ln \frac{r_2(t)}{r_1(t)} dt + \int_0^{\pi} \ln \frac{r_2(t+\pi)}{r_1(t+\pi)} dt$$
$$= \int_0^{\pi} \ln \frac{c_2}{c_1} dt$$
$$= \pi \ln \frac{c_2}{c_1}.$$

3.4. Estymacja pola powierzchni i długości krzywych równopotęgowych

Niech krzywa równopotęgowa C będzie dana wzorem (1.2) i $rr_\pi \equiv c$. Niech

$$r_M = \max\{r(t) : t \in [0, 2\pi]\} \tag{3.25}$$

i

$$r_m = \min\{r(t) : t \in [0, 2\pi]\}. \tag{3.26}$$

Oznaczamy przez $S_m C$ obszar ograniczony przez krzywą C i okrąg S_m ze środkiem w początku układu współrzędnych, o promieniu r_m. Podobnie definiujemy obszar oznaczony CS_M.

Używając całkowego wzoru Croftona (3.24), otrzymujemy

$$\pi \ln \frac{c}{r_m^2} = \iint_{S_m C} \frac{1}{\|\omega\|^2} d\omega \leq \frac{1}{r_m^2} \mid S_m C \mid = \frac{1}{r_m^2} \left(\mid C \mid - \pi r_m^2 \right)$$

i

$$\pi \ln \frac{r_M^2}{c} = \iint_{CS_M} \frac{1}{\|\omega\|^2} d\omega \geq \frac{1}{r_M^2} \mid CS_M \mid = \frac{1}{r_M^2} \left(\pi r_M^2 - \mid C \mid \right).$$

Tak więc, mamy

$$(3.27) \qquad |C| \geq \max\left\{\pi r_m^2\left(1+\ln\tfrac{c}{r_m^2}\right), \pi r_M^2\left(1+\ln\tfrac{c}{r_M^2}\right)\right\}.$$

Z drugiej strony (z wykorzystaniem (3.1)), dostajemy

$$2\,|C| = \int_0^{2\pi} r(t)^2\,dt = \int_0^{\pi}\left(r(t)^2 + \tfrac{c^2}{r(t)^2}\right)dt \geq 2\pi c,$$

i uzyskujemy dobrze znaną nierówność

$$(3.28) \qquad |C| \geq \pi c.$$

Analogicznie otrzymujemy oszacowanie długości krzywej równopotęgowej.

Mianowicie, używając (1.13) i (3.1), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|L| &= \int_0^{2\pi}\sqrt{r(t)^2+\dot r(t)^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{r(t)^2\left[1+\tfrac{\dot r(t)^2}{r(t)^2}\right]}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{r(t)^2\left[1+\cot^2\alpha(t)\right]}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\tfrac{r(t)}{\sin\alpha(t)}\,dt \\
&= \int_0^{\pi}\tfrac{1}{\sin\alpha(t)}\left(r(t)+\tfrac{c}{r(t)}\right)dt \geq 2\pi\sqrt{c},
\end{aligned}$$

tj.

$$(3.29) \qquad |L| \geq 2\pi\sqrt{c}.$$

4. Przedłużenie równopotęgowe

W tej części pracy rozważymy możliwość przedłużenia wklęsłej funkcji $f : [0,a] \to [0,+\infty)$ do równopotęgowej wypukłej krzywej z osią symetrii.