POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Wydział
Matematyki i Nauk Informacyjnych

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr Robert Stępnicki

Rozszerzenia równopotęgowe i równocięciwowe

WARSZAWA

2004

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

mgr Robert Stępnicki

ROZPRAWA DOKTORSKA

ROZSZERZENIA RÓWNOPOTĘGOWE I RÓWNOCIĘCIWOWE

PROMOTOR ROZPRAWY

Prof. dr hab. Waldemar Cieślak

WARSZAWA 2004

Wstęp

W pracy tej rozpatrujemy klasę krzywych $k-$równocięciwowych, będących naturalnym uogólnieniem krzywych równocięciwowych i równopotęgowych.

W rozdziale 1 podajemy pewne ogólne uwagi dotyczące krzywych zamkniętych. Uwagi te są przydatne w dalszej części pracy.

W rozdziale 2 definiujemy krzywe $k-$równocięciwowe i podajemy pewne twierdzenia o własnościach krzywych wypukłych, klasy C^2, o dwóch punktach $k-$równocięciwowości. W rozdziale tym stawiamy uogólnioną wersję problemu równocięciwowości.

Rozdział 3 jest poświęcony krzywym równopotęgowym. Pokazane zostało, iż każdy równopotęgowy owal ma $4n+2$ wierzchołków $(n \geq 1)$, z czego dwa wierzchołki leżą na końcach cięciwy równopotęgowej. Ponadto podany został przykład owalu z dokładnie sześcioma wierzchołkami. Ostatnie dwa podrozdziały rozdziału 3 są poświęcone wzorom całkowym Croftona i estymacji pola i długości krzywej równopotęgowej.

W rozdziałach 4 i 5 podajemy warunek konieczny i wystarczający przedłużenia wklęsłej funkcji $f : [0, a] \longrightarrow [0, +\infty]$ do wypukłej krzywej równopotęgowej lub równocięciwowej z osią symetrii.

W rozdziale 6 szacujemy pole obszaru ograniczonego przez krzywą „połówkową", tj. krzywą powstałą z punktów połowicznego podziału cięciw, przechodzących przez punkt równocięciwowości zamkniętej, wypukłej, równocięciwowej krzywej płaskiej. Problem został zilustrowany przykładami. W rozdziale tym stawiamy również hipotezę, że w klasie krzywych „połówkowych" największe pole ogranicza okrąg.

1. Ogólne pojęcia i oznaczenia

Dana jest funkcja $r : R \to R$ spełniająca nastepujące warunki:

$$\left\{ \begin{array}{l} r \in C^2 \\ r\left(t+2\pi\right) = r\left(t\right) \qquad \text{dla} \;\; t \in R. \\ r\left(t\right) > 0 \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Krzywą C opisujemy we współrzędnych biegunowych

$t \longrightarrow r\left(t\right) \qquad \text{dla} \;\; t \in \left[0, 2\pi\right].$

Parametrycznie krzywa ta zadana jest formułą

$z\left(t\right) = r\left(t\right) \cos t + ir\left(t\right) \sin t,$

lub

$$z\left(t\right) = r\left(t\right) e^{it} \qquad \text{dla} \quad t \in \left[0, 2\pi\right]. \tag{1.2}$$

Wszystkie funkcje związane z krzywą C rozpatrujemy jako funkcje okresowe o okresie 2π.

Kropka ·oznaczać będzie pochodną względem parametru t.

Niech $\alpha\left(t\right)$ oznacza kąt skierowany pomiędzy wektorem wodzącym punktu $z\left(t\right)$, a wktorem stycznym $\dot{z}\left(t\right)$ w punkcie $z\left(t\right)$.

Dla krzywej C klasy C^2 mamy: