został zilustrowany przykładami. W rozdziale tym stawiamy również hipotezę, że w klasie krzywych „połówkowych” największe pole ogranicza okrąg.

1. Ogólne pojęcia i oznaczenia

Dana jest funkcja $r : R \to R$ spełniająca nastepujące warunki:

$$
\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} r \in C^2 & \\ r(t + 2\pi) = r(t) & \text{dla } \ t \in R. \\ r(t) > 0 & \end{cases}
$$

Krzywą C opisujemy we współrzędnych biegunowych

$$t \longrightarrow r(t) \qquad \text{dla } \ t \in [0, 2\pi].$$

Parametrycznie krzywa ta zadana jest formułą

$$z(t) = r(t) \cos t + ir(t) \sin t,$$

lub

$$\text{(1.2)} \qquad z(t) = r(t)\, e^{it} \qquad \text{dla } \ t \in [0, 2\pi].$$

Wszystkie funkcje związane z krzywą C rozpatrujemy jako funkcje okresowe o okresie 2π.

Kropka oznaczać będzie pochodną względem parametru t.

Niech $\alpha(t)$ oznacza kąt skierowany pomiędzy wektorem wodzącym punktu $z(t)$, a wktorem stycznym $\dot{z}(t)$ w punkcie $z(t)$.

Dla krzywej C klasy C^2 mamy:

(1.3) $\qquad \dot{z}(t) = \dot{r}(t)\, e^{it} + r(t)\, ie^{it}.$

(1.4) $\qquad |\dot{z}(t)| = \sqrt{\dot{r}^2(t) + r^2(t)},$

(1.5) $\qquad \ddot{z}(t) = \left[\ddot{r}(t) - r(t)\right] e^{it} + 2\,\dot{r}(t)\, ie^{it}.$

Wprowadzimy oznaczenie $\{a+bi, c+di\} = ad - bc$ dla liczb zespolonych $a+bi$, $c+di$.

Z (1.3) i (1.5) otrzymujemy

$$\left\{\dot{z}(t), \ddot{z}(t)\right\} = \left\{\dot{r}(t)\, e^{it} + r(t)\, ie^{it}, \left(\ddot{r}(t) - r(t)\right) e^{it} + 2\,\dot{r}(t)\, ie^{it}\right\},$$

(1.6) $\qquad \left\{\dot{z}(t), \ddot{z}(t)\right\} = 2\,\dot{r}^2(t) - r(t)\,\ddot{r}(t) + r^2(t).$

Iloczyn skalarny między wektorami $z(t), \dot{z}(t)$ wyraża się wzorami

(1.7) $\qquad \left\langle z(t), \dot{z}(t)\right\rangle = r(t)\sqrt{\dot{r}^2(t) + r^2(t)}\cos\alpha(t).$

lub

(1.8) $\qquad \left\langle z(t), \dot{z}(t)\right\rangle = \left\langle r(t)\, e^{it}, \dot{r}(t)\, e^{it} + r(t)\, ie^{it}\right\rangle = r(t)\,\dot{r}(t).$

Zatem wykorzystując (1.7) i (1.8), otrzymujemy

$$\dot{r}(t) = \sqrt{\dot{r}^2(t) + r^2(t)}\cos\alpha(t),$$

czyli

(1.9) $\qquad \cos\alpha(t) = \frac{\dot{r}(t)}{\sqrt{\dot{r}^2(t) + r^2(t)}}.$

Mamy również zależności

(1.10) $\qquad \left|\left\{z(t), \dot{z}(t)\right\}\right| = \left|\left\{r(t)\, e^{it}, \dot{r}(t)\, e^{it} + r(t)\, ie^{it}\right\}\right| = r^2(t)$

lub

$$(1.11) \qquad |\{z(t), \dot{z}(t)\}| = |z(t)||\dot{z}(t)| \sin\alpha(t) = r(t)\sqrt{\dot{r}^2(t) + r^2(t)} \sin\alpha(t).$$

Tak więc, wykorzystując (1.10) i (1.11) , dostajemy

$$r(t) = \sqrt{\dot{r}^2(t) + r^2(t)} \sin\alpha(t),$$

czyli

$$(1.12) \qquad \sin\alpha(t) = \frac{r(t)}{\sqrt{\dot{r}^2(t)+r^2(t)}}.$$

Dzieląc stronami (1.9) i (1.12) otrzymamy

$$(1.13) \qquad \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} = \cot\alpha(t) \qquad \text{dla} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Krzywizna k krzywej C, po wykorzystaniu (1.6) , wyraża się wzorem

$$(1.14) \qquad k(t) = \frac{\{\dot{z}(t), \ddot{z}(t)\}}{|\dot{z}(t)|^3} = \frac{2\dot{r}^2(t) - r(t)\ddot{r}(t) + r^2(t)}{\left(\sqrt{\dot{r}^2(t)+r^2(t)}\right)^3} \qquad \text{dla} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Przekształcając (1.14) i uwzględniając (1.13) , otrzymujemy

$$k\left(\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}\right)^3 = 2\,\dot{r}^2 - r\,\ddot{r} + r^2,$$

$$k\frac{r^3}{\sin^3\alpha} = 2r^2\cot^2\alpha - r\left(\dot{r}\cot\alpha - r\frac{\dot{\alpha}}{\sin^2\alpha}\right) + r^2,$$

$$k\frac{r^3}{\sin^3\alpha} = 2r^2\cot^2\alpha - r^2\cot^2\alpha + r^2\frac{\dot{\alpha}}{\sin^2\alpha} + r^2,$$

$$k\frac{r^3}{\sin^3\alpha} = r^2\cot^2\alpha + r^2\frac{\dot{\alpha}}{\sin^2\alpha} + r^2,$$

$$k\frac{r}{\sin^3\alpha} = \cot^2\alpha + \frac{\dot{\alpha}}{\sin^2\alpha} + 1.$$

Ostatecznie otrzymujemy ważną zależność:

$$(1.15) \qquad \frac{kr}{\sin\alpha} = 1 + \dot{\alpha} \qquad \text{dla} \quad t \in [0, 2\pi],$$

którą wykorzystamy w dalszej części pracy.

Definicja 1.1. Zamkniętą, płaską krzywą C, o dodatniej krzywiźnie, bez punktów wielokrotnych, nazywamy owalem.

Niech D_C oznacza obszar ograniczony krzywą C.

Ustalmy liczbę dodatnią c.

Definicja 1.2. Zamkniętą, płaską krzywą C, nazwiemy równopotęgową, jeśli dla krzywej C istnieje punkt $P \in D_C$ i następujący warunek jest spełniony:

dla dowolnej cięciwy o końcach P_1, P_2, przechodzącej przez P, mamy

$$(1.16) \qquad |PP_1||PP_2| = c = \text{constans}$$

i iloczyn nie zależy od wyboru cięciwy.

Stałą c nazywamy stałą równopotęgową, zaś punkt P nazywamy punktem równopotęgowym krzywej C.

O krzywych równopotęgowych pisał jako pierwszy Yanagihara [20], [21], a następnie Kelly [9], Rosenbaum [14] oraz Zuccheri [22].

Definicja 1.3. Zamkniętą, płaską krzywą C, nazwiemy równocięciwową, jeśli dla krzywej C istnieje punkt $O \in D_C$ i następujący warunek jest spełniony:

dla dowolnej cięciwy o końcach P_1, P_2, przechodzącej przez O, mamy

$$(1.17) \qquad |OP_1| + |OP_2| = c = \text{constans}$$

i suma nie zależy od wyboru cięciwy.

Stałą c nazywamy stałą równocięciwową, zaś punkt O nazywamy punktem równocięciwowym krzywej C.

Zainteresowanie krzywymi równocięciwowymi wynikało m.in. z braku odpowiedzi na następujące pytanie: „Czy istnieje krzywa wypukła C z dwoma punktami równocięciwowości?" Pytanie to postawił Fujiwara w roku 1916 [6]. Niezależnie od niego, pytanie to postawili również Blaschke, Rothe i Weitzenböck w roku 1917 [1]. W literaturze pytanie to znane jest pod nazwą - „problemem równocięciwowości". Ukazało się wiele artykułów, w których autorzy próbowali odpowiedzieć na wyżej postawione pytanie, m.in. W.Süss [18], A.Dirac [2], L.Dulmage [3], H.G.Helfenstein [7], V.Linis [12], E.Wirsing [19], J.Sancho de San Roman [16], E.Ehrhart [4], V.Klee [10], R.Schäfke and H.Volkmer [17]. A.Dirac pokazał, że jeśli istnieje rozwiązanie „problemu równocięciwowości", to krzywa musi być klasy C^1 oraz musi mieć dwie prostopadłe osie symetrii. Z kolei E.Wirsing pokazał, że krzywa będąca rozwiązaniem „problemu równocięciwowości" jest krzywą analityczną. Dopiero w roku 1997, M.Rychlik [15] udowodnił, że krzywa równocięciwowa z dwoma punktami równocięciwowości nie istnieje.

2. Krzywe k-równocięciwowe i uogólniony problem Fujiwary

Oprócz klas krzywych równocięciwowych i równopotęgowych możemy zdefiniować w podobny sposób inne klasy krzywych. Mianowicie, dla ustalonej liczby całkowitej $k \neq 0$ zdefiniujemy krzywą $k-$ równocięciwową w następujący sposób:

Definicja 2.1. Zamkniętą, płaską krzywą C, nazwiemy $k-$ równocięciwową,