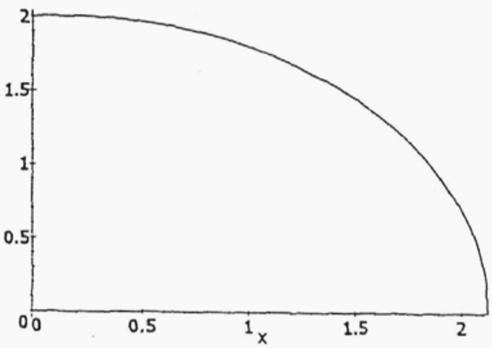
$$= \left(7+3\sqrt{1+ax}\right)a^2x^2+4ax\sqrt{1+ax} < \left(7+3\sqrt{1+\tfrac{1}{4}\tfrac{9}{4}}\right)\tfrac{1}{16}\tfrac{81}{16}+4\cdot\tfrac{1}{4}\tfrac{9}{4}\sqrt{1+\tfrac{1}{4}\tfrac{9}{4}}$$

$$= \left(7+3\sqrt{\tfrac{25}{16}}\right)\tfrac{81}{16^2}+\tfrac{36}{16}\sqrt{\tfrac{25}{16}} = \tfrac{1}{16^2}\left[\left(7+\tfrac{15}{4}\right)81+36\cdot 20\right] = \tfrac{1}{16^2\cdot 4}\left(43\cdot 81+2880\right) < 7,$$

zaś prawa strona nierówności (5.33.b) jest większa od 16. Warunek (5.33) jest więc spełniony.

Poniżej przedstawiamy wykres (rys.5.1) reprezentanta rodziny $\mathcal{F}$ dla $a = \frac{1}{8}$:

$$f(x) = \sqrt{2+\tfrac{1}{8}x - x^2 + 2\sqrt{1+\tfrac{1}{8}x}} \quad \text{dla} \quad x \in [0; 2,125].$$



rys.5.1

6. Krzywe „połówkowe"

Niech $\mathcal{P}$ oznacza rodzinę wszystkich zamkniętych,równocięciwowych krzywych płaskich. Pole obszaru ograniczonego krzywą $C \in \mathcal{P}$ oznaczymy symbolem $|\, C \,|$. Oznaczamy przez $\mathcal{P}(c)$ podrodzinę rodziny $\mathcal{P}$, taką, że:

1^okażda krzywa tej rodziny jest klasy C^2,

2^okażda krzywa tej rodziny jest wypukła,

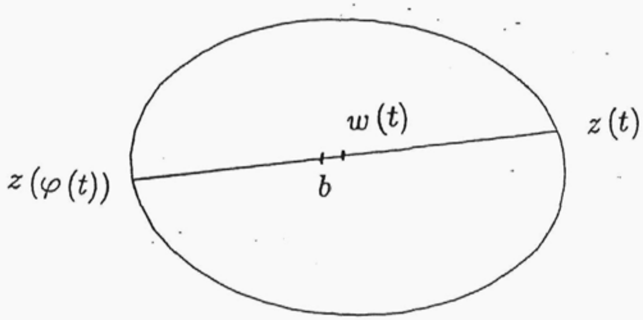
3^ostała równocięciwowa jest równa c,

4^okażda krzywa tej rodziny jest dana opisem parametrycznym

(1.2) $\qquad z(t) = r(t)\, e^{it} \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi]\,.$

Niech krzywa C będzie reprezentantem rodziny $\mathcal{P}(c)$, różnym od okręgu. Każdą cięciwę krzywej C przechodzącą przez jej punkt równocięciwowości b połowimy. Środki tych cięciw tworzą nową zamkniętą krzywę płaską S (niekoniecznie wypukłą). Interesuje nas pole obszaru ograniczonego krzywą S. Zauważmy, że jednokrotny obieg krzywej C, daje dwukrotny obieg krzywej S. W związku z powyższym przyjmujemy następujące oznaczenia:

Niech $w(t)$ oznacza środek cięciwy krzywej C, przechodzącej przez punkty $z(t)\,, z(\varphi(t))$ $(rys.6.1)$.



rys.6.1

Oczywiście mamy

(6.1) $\qquad w = \frac{1}{2}(z + z \circ \varphi) \qquad$ dla $t \in [0, 2\pi]$,

(6.2) $\qquad | z - z \circ \varphi | = c \qquad$ dla $t \in [0, 2\pi]$.

Zauważmy, że

$$w - b = z - b - \frac{c}{2}\frac{z-b}{|z-b|}.$$

Tak więc, krzywa S ma następujący opis parametryczny:

(6.3) $\qquad w - b = \left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)(z - b) \qquad$ dla $t \in [0, 2\pi]$,

Różniczkując (6.3), otrzymujemy

$$(w-b)^{\cdot} = \left[\left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)(z-b)\right]^{\cdot} =$$
$$= \left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)^{\cdot}(z-b) + \left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)(z-b)^{\cdot}.$$

Do obliczenia pola odszaru ograniczonego krzywą S wykorzystamy wzór Greena:

$$2 \mid S \mid = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{w - b, (w-b)^{\cdot}\}\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{\left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)(z-b), \left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)^{\cdot}(z-b) + \left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)(z-b)^{\cdot}\right\} dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{\left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)(z-b), \left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)^{\cdot}(z-b)\right\} dt$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{\left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)(z-b), \left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)(z-b)^{\cdot}\right\} dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)^2 \{z - b, (z-b)^{\cdot}\}\, dt,$$

tj.

(6.4) $\qquad 2 \mid S \mid = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{c}{2}\frac{1}{|z-b|}\right)^2 \{z - b, (z-b)^{\cdot}\}\, dt.$

Z twierdzenia całkowego o wartości średniej [**] uzyskujemy

$$2\mid S\mid=\left(1-\tfrac{c}{2}\tfrac{1}{|z(\xi)-b|}\right)^2\tfrac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\{z-b,(z-b)^{\cdot}\}\,dt \qquad \text{dla pewnego } \xi\in[0,2\pi],$$

czyli

$$(6.5)\qquad 2\mid S\mid=\left(1-\tfrac{c}{2}\tfrac{1}{|z(\xi)-b|}\right)^2\mid C\mid \qquad \text{dla pewnego } \xi\in[0,2\pi].$$

Jeśli $\mid S\mid>0$, to $\mid z(\xi)-b\mid\neq\frac{c}{2}$.

Niech $x=\mid z(\xi)-b\mid$.

Wzór (6.5) przybiera formę

$$(6.6)\qquad \mid S\mid=\tfrac{(2x-c)^2}{8x^2}\mid C\mid.$$

Raz jeszcze, na mocy wzoru Greena i równocięciwowości krzywej C, mamy

$$\begin{aligned}2\mid C\mid&=\int\limits_0^{2\pi}r(t)^2\,dt\\&=\int\limits_0^{\pi}r(t)^2\,dt+\int\limits_{\pi}^{2\pi}r(t)^2\,dt\\&=\int\limits_0^{\pi}r(t)^2\,dt+\int\limits_0^{\pi}r(t+\pi)^2\,dt\\&=\int\limits_0^{\pi}r(t)^2\,dt+\int\limits_0^{\pi}[r(t)-c]^2\,dt\\&=\int\limits_0^{\pi}\left[2r(t)^2-2cr(t)+c^2\right]dt<c^2\int\limits_0^{\pi}dt=\pi c^2.\end{aligned}$$

Tak, więc

$$(6.7)\qquad \mid C\mid<\tfrac{1}{2}\pi c^2.$$

Z twierdzenia Holditcha [11], wynika natychmiast, że

$$(6.8)\qquad \mid C\mid=2\mid S\mid+\tfrac{\pi c^2}{4}.$$

Z zależności tej i z nierówności (6.7) , otrzymujemy

$2 \mid S \mid + \frac{\pi c^2}{4} < \frac{1}{2}\pi c^2,$

czyli

$\mid S \mid < \frac{\pi c^2}{8}.$

Z zależności (6.8) mamy również, że jeśli C jest okręgiem,to $\mid S \mid = 0$.

W związku z powyższym prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie 6.1. Pole obszaru ograniczonego przez krzywą S, powstałą z punktów połowicznego podziału cięciw o długości c, przechodzacych przez punkt równocięciwowości zamkniętej, wypukłej, krzywej płaskiej równocięciwowej C, jest mniejsze niż $\frac{\pi c^2}{8}$.

Oczywistą jest także nierówność

$\mid C \mid > 2 \mid S \mid .$

Skoro C nie jest okręgiem i $x \neq \frac{c}{2}$, to wykorzystując formułę (6.6) , dostajemy

$\frac{8x^2}{(2x-c)^2} \mid S \mid > 2 \mid S \mid .$

Zatem uzyskujemy nierówność

$\frac{x^2}{(2x-c)^2} > \frac{1}{4}.$

Jej rozwiązaniem jest

(6.9) $\qquad x \in \left(\frac{c}{4}, \frac{c}{2}\right) \cup \left(\frac{c}{2}, c\right).$

Wykorzystajmy raz jeszcze formuły (6.6) i (6.8) , mianowicie

$\mid S \mid = \frac{(2x-c)^2}{8x^2} \mid C \mid,$

czyli

$$| S |= \frac{(2x-c)^2}{8x^2}\left(2 | S | + \frac{\pi c^2}{4}\right),$$

$$\left(1 - \frac{(2x-c)^2}{4x^2}\right) | S |= \frac{(2x-c)^2}{32x^2}\pi c^2.$$

Tak więc, dostajemy kolejną formułę na pole $| S |$

$$(6.10) \qquad | S |= \frac{\pi c}{8}\frac{(2x-c)^2}{4x-c}.$$

W związku z (6.6) , (6.7) i (6.10) , otrzymujemy

$$\frac{8x^2}{(2x-c)^2} | S |< \frac{\pi c^2}{2},$$

$$| S |< \frac{\pi c^2 (2x-c)^2}{16x^2},$$

$$\frac{\pi c}{8}\frac{(2x-c)^2}{4x-c} < \frac{\pi c^2}{8}\frac{(2x-c)^2}{2x^2},$$

$$2x^2 < c\,(4x-c)\,,$$

$$2x^2 - 4cx + c^2 < 0.$$

Rozwiązaniem powyższej nierówności jest

$$(6.11) \qquad x \in \left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)c, \frac{c}{2}\right) \cup \left(\frac{c}{2}, c\right).$$

Oczywiście zauważamy, że $\left(\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)c, \frac{c}{2}\right) \cup \left(\frac{c}{2}, c\right) \subset \left(\frac{c}{4}, \frac{c}{2}\right) \cup \left(\frac{c}{2}, c\right)$.

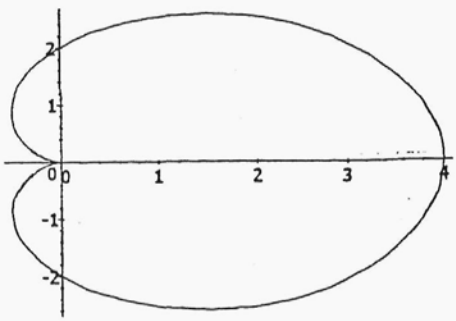
Przykład 6.1. Przykładem krzywej równocięciwowej jest konchoida okręgu (ślimak Pascala), [13]. Równanie biegunowe ślimaka Pascala ma postać

$$(6.12) \qquad \rho = 2a\cos t \pm q, \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad ,$$

gdzie dodatnia półoś Ox układu kartezjańskiego jest półosią biegunową, zaś punkt O biegunem. Zauważmy, że punkt O jest również punktem równocięciwowości.

Dla $q = 2a$ konchoida okręgu nazywana jest kardioidą($rys.6.2$), zaś równanie biegunowe (6.12) ma postać

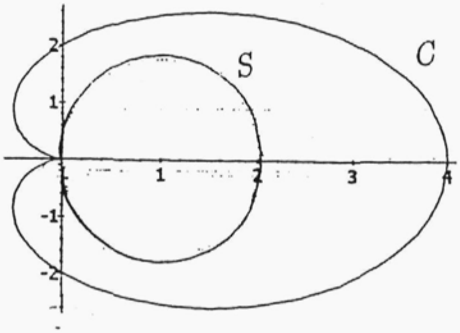
$$\rho = 2a\cos t \pm 2a, \qquad t \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]. \tag{6.13}$$



rys.6.2

Kardioida jest przykładem zamkniętej, równocięciwowej krzywej płaskiej.Nie jest to krzywa wypukła.

Krzywa S, powstała z punktów połowicznego podziału cięciw o długości $c = 4a$, przechodzacych przez punkt równocięciwowości O jest okręgiem, o promieniu długości a i polu równym $|\, S \,| = \pi a^2$ ($rys.6.3$).



rys.6.3

Zauważmy, że

$$\mid C \mid = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 dt$$

$$= 4a^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2 t + 2)\, dt$$

$$= 4a^2 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 3)\, dt$$

$$= 6\pi a^2.$$

Niewątpliwie twierdzenie Holditcha (6.8) i twierdzenie 6.1 są spełnione, gdyż

$$6\pi a^2 = 2\pi a^2 + \tfrac{\pi 16 a^2}{4}$$

i

$$\mid S \mid = \pi a^2 < \tfrac{\pi 16 a^2}{8}.$$

Rozpatrujemy krzywe równocięciwowe klasy $\mathcal{C}\,(1)$ z tą samą stałą równocięciwową c i związane z nimi krzywe „połówkowe". Klasę tych krzywych „połówkowych" oznaczamy $\mathcal{B}_c$. Wydaje się być prawdziwą hipoteza:

Hipoteza. W klasie krzywych „połówkowych" $\mathcal{B}_c$ największe pole ogranicza okrąg.