Tak więc, mamy

$$(3.27) \qquad | C | \geq \max\left\{\pi r_m^2\left(1+\ln\tfrac{c}{r_m^2}\right), \pi r_M^2\left(1+\ln\tfrac{c}{r_M^2}\right)\right\}.$$

Z drugiej strony (z wykorzystaniem (3.1)), dostajemy

$$2 \mid C \mid = \int_0^{2\pi} r(t)^2\, dt = \int_0^{\pi}\left(r(t)^2 + \tfrac{c^2}{r(t)^2}\right) dt \geq 2\pi c,$$

i uzyskujemy dobrze znaną nierówność

$$(3.28) \qquad | C | \geq \pi c.$$

Analogicznie otrzymujemy oszacowanie długości krzywej równopotęgowej.

Mianowicie, używając (1.13) i (3.1), otrzymujemy

$$\begin{aligned} | L | &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r(t)^2 + \dot r(t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r(t)^2\left[1+\tfrac{\dot r(t)^2}{r(t)^2}\right]}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r(t)^2\left[1+\cot^2\alpha(t)\right]}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \tfrac{r(t)}{\sin\alpha(t)}\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \tfrac{1}{\sin\alpha(t)}\left(r(t) + \tfrac{c}{r(t)}\right) dt \geq 2\pi\sqrt{c}, \end{aligned}$$

tj.

$$(3.29) \qquad | L | \geq 2\pi\sqrt{c}.$$

4. Przedłużenie równopotęgowe

W tej części pracy rozważymy możliwość przedłużenia wklęsłej funkcji $f : [0,a] \to [0,+\infty)$ do równopotęgowej wypukłej krzywej z osią symetrii.

Pokażemy, że przedłużenie jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f spełnia pewną nierówność różniczkową zwyczajną rzędu drugiego.

Niech $\mathcal{E}$ oznacza rodzinę wszystkich równopotęgowych krzywych z osią symetrii i punktem równopotęgowości leżącym na tej osi symetrii. Możemy założyć, bez straty ogólności, że oś x jest osią symetrii, zaś początek układu współrzędnych jest punktem równopotęgowości.

Niech c będzie ustaloną liczbą dodatnią. Oznaczamy przez $\mathcal{E}(c)$ podrodzinę rodziny $\mathcal{E}$ taką, że:

1^oczęść wykresu krzywej $\Gamma \in \mathcal{E}(c)$ leżąca w górnej półpłaszczyźnie układu współrzędnych jest wykresem pewnej funkcji,

2^ostała równopotęgowa jest równa c,

3^owszystkie krzywe rodziny są klasy C^2, ewentualnie poza punktami przecięcia z osią symetrii,

4^owszystkie krzywe rodziny są ściśle wypukłe,

5^okrzywe rodziny dane są parametrycznie wzorem (1.2) .

Niech $\Gamma \in \mathcal{E}(c)$. Załóżmy, że wykres funkcji f, gdzie $f : \left[\frac{-c}{a}, a\right] \rightarrow [0, +\infty)$, zaś a jest ustaloną liczbą dodatnią, jest wykresem krzywej Γ w górnej półpłaszczyźnie układu współrzędnych. Oczywiście, kompletny wykres krzywej Γ jest uformowany przez sumę wykresów f i $-f$. Rozważmy cięciwę γ krzywej Γ

przechodzącą przez początek układu i punkt $(x, f(x))$, $x \neq 0$, krzywej Γ. Oznaczamy przez $(\varphi(x), -f(\varphi(x)))$ współrzędne końca cięciwy γ. Wówczas mamy następującą zależność

$$\frac{f(\varphi(x))}{-\varphi(x)} = \frac{f(x)}{x},$$

$$(4.1) \qquad f(\varphi(x)) = -\varphi(x) \tfrac{f(x)}{x} \qquad \text{dla} \quad x \in [\tfrac{-c}{a}, 0) \cup (0, a].$$

Wykorzystując równopotęgowość, otrzymujemy

$$(4.2) \qquad \sqrt{x^2 + f(x)^2}\sqrt{\varphi^2(x) + f(\varphi(x))^2} = c.$$

Podstawiając (4.1) do (4.2), dostajemy

$$\sqrt{x^2 + f(x)^2}\sqrt{\varphi^2(x) + \left[-\varphi(x) \tfrac{f(x)}{x}\right]^2} = c,$$

$$\sqrt{x^2 + f(x)^2}\sqrt{\varphi^2(x) \tfrac{x^2 + f(x)^2}{x^2}} = c,$$

$$\sqrt{x^2 + f(x)^2} \mid \varphi(x) \mid \tfrac{\sqrt{x^2 + f(x)^2}}{|x|} = c,$$

skąd

$$(4.3) \qquad \varphi(x) = c\tfrac{-x}{x^2 + f(x)^2} \qquad \text{dla} \quad x \in \left[\tfrac{-c}{a}, a\right].$$

Nietrudno pokazać, że φ jest ściśle malejącą funkcją.

Ustalmy dwie dodatnie liczby c i a. Niech $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji $f : [0, a] \to [0, +\infty)$ spełniających następujące warunki:

$$(4.4) \qquad f \in C^2(0, a),$$

$$(4.5) \qquad f(a) = 0, \qquad f(0) = \sqrt{c},$$

$$(4.6) \qquad f(x) > 0 \qquad \text{dla} \quad x \in [0, a),$$

(4.7) istnieją granice $\lim\limits_{x \longrightarrow 0_+} \dot{f}(x), \qquad \lim\limits_{x \longrightarrow 0_+} \ddot{f}(x),$

(4.8) $\lim\limits_{x \longrightarrow a_-} \dot{f}(x) = -\infty,$

(4.9) $2xf(x)\dot{f}(x) < f(x)^2 - x^2 \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a),$

(4.10) $\ddot{f}(x) < 0 \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a).$

Wszystkie wyżej wypisane warunki są naturalną konsekwencją niżej przeprowadzonych rozważań.

Z każdą funkcją $f \in \mathcal{F}$ wiążemy funkcję $\varphi : [0, a] \to \left[\frac{-c}{a}, 0\right]$ daną wzorem (4.3). Tak, więc

$$\dot{\varphi}(x) = -c\frac{x^2 + f(x)^2 - x\left(2x + 2f(x)\dot{f}(x)\right)}{\left(x^2 + f(x)^2\right)^2},$$

czyli

(4.11) $\dot{\varphi}(x) = c\frac{x^2 + 2xf(x)\dot{f}(x) - f(x)^2}{(x^2 + f(x)^2)^2} \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a),$

Zauważmy, że warunek (4.9) znaczy iż funkcja φ jest ściśle malejąca.

Zauważmy również, że

(4.12) $\varphi(0) = 0 \qquad i \qquad \varphi(a) = \frac{-c}{a},$

toteż φ przekształca jednoznacznie przedział $[0, a]$ na przedział $\left[\frac{-c}{a}, 0\right]$ i

(4.13) $\dot{\varphi}(0_+) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0_+} \dot{\varphi}(x) = -1.$

Monotoniczność funkcji φ pozwala nam przedłużyć funkcję

$f : [0.a] \to [0, +\infty)$

do funkcji

$F : \left[\frac{-c}{a}, a\right] \to [0, +\infty)$

poprzez formułę

$$(4.14) \qquad F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla} \quad x \in [0, a] \\ \frac{-x}{\varphi^{-1}(x)} f\left(\varphi^{-1}(x)\right) & \text{dla} \quad x \in [\frac{-c}{a}, 0). \end{cases}$$

Pokażemy teraz, że krzywa Γ uzyskana z wykresów funkcji F i $-F$ jest reprezentantem rodziny $\mathcal{E}(c)$. W pierwszym kroku pokazujemy, że $F \in C^1\left(\frac{-c}{a}, a\right)$.

Niech

$$(4.15) \qquad \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{-c}{x^2 + f(x)^2} \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a]$$

i

$$(4.16) \qquad \rho = \dot{f}(0_+) = \lim_{x \longrightarrow 0_+} \dot{f}(x).$$

Wówczas

$$(4.17) \qquad \dot{\Phi}(x) = 2c \frac{x + f(x)\dot{f}(x)}{\left(x^2 + f(x)^2\right)^2} \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a),$$

$$(4.18) \qquad \ddot{\Phi}(x) = 2c \frac{\left(1 + \dot{f}(x)^2 + f(x)\ddot{f}(x)\right)\left(x^2 + f(x)^2\right) - 4\left(x + f(x)\dot{f}(x)\right)^2}{\left(x^2 + f(x)^2\right)^3} \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a),$$

oraz

$$(4.19) \qquad \dot{\Phi}(0_+) = \lim_{x \longrightarrow 0_+} \dot{\Phi}(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{c}},$$

$$(4.20) \qquad \ddot{\Phi}(0_+) = \lim_{x \longrightarrow 0_+} \ddot{\Phi}(x) = \frac{2}{c}\left[1 + \sqrt{c}\, \ddot{f}(0_+) - 3\rho^2\right].$$

Z (4.14) dostajemy

$$-F(\varphi(x)) = \Phi(x) f(x) \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a),$$

t.j. $-F \circ \varphi = \Phi f$.

Stąd otrzymujemy

$$(4.21) \qquad -\dot{\varphi}\dot{F} \circ \varphi = \dot{\Phi} f + \Phi \dot{f}.$$

Używając (4.13), (4.15) i (4.19) stwierdzamy, że

$$-\left(-\dot{F}(0_-)\right) = \tfrac{2\rho}{\sqrt{c}}\sqrt{c} - \rho = \rho,$$

czyli

$$(4.22) \qquad \dot{F}(0_-) = \dot{f}(0_+),$$

co oznacza, że $F \in C^1\left(\frac{-c}{a}, a\right)$.

W nawiązaniu do warunku (4.8) jest oczywiste, że krzywa Γ uzyskana z wykresów F i $-F$ jest krzywą klasy C^1.

Chcemy teraz pokazać, że

$$(4.23) \qquad \ddot{F}(0_-) = \ddot{f}(0_+).$$

Różniczkując (4.11) uzyskujemy

$$\ddot{\varphi}(x) = \tfrac{c}{(x^2+f(x)^2)^4}\cdot$$
$$\left[\left(2x + 2f(x)\dot{f}(x) + 2x\dot{f}(x)^2 + 2xf(x)\ddot{f}(x) - 2f(x)\dot{f}(x)\right)\left((x^2 + f(x)^2)^2\right)\right.$$
$$\left. - \left(x^2 + 2xf(x)\dot{f}(x) - f(x)^2\right) 2\left(x^2 + f(x)^2\right)\left(2x + 2f(x)\dot{f}(x)\right)\right],$$

co zapisujemy w postaci

$$(4.24) \qquad \ddot{\varphi}(x) = 2cx\tfrac{1+\dot{f}(x)^2+f(x)\ddot{f}(x)}{\left(x^2+f(x)^2\right)^2} - 4\tfrac{x+f(x)\dot{f}(x)}{x^2+f(x)^2}\dot{\varphi}(x) \qquad \text{dla } x \in (0,a).$$

Uwzględniając wzory (4.13) i (4.16) otrzymujemy

(4.25) $\qquad \ddot{\varphi}\,(0_+) = \frac{4}{\sqrt{c}}\rho.$

Różniczkujac (4.21) dostajemy

$$(4.26) \qquad -\ddot{\varphi}\dot{F}\circ\varphi - (\dot{\varphi})^2\,\ddot{F}\circ\varphi = \ddot{\Phi}\,f + 2\,\dot{\Phi}\dot{f} + \Phi\,\ddot{f} \qquad \text{dla} \quad x\in(0,a)\,.$$

Jeśli $x \longrightarrow 0_+$, wówczas używając formuł $(4.13)\,,(4.16)\,,(4.19)\,,(4.20)\,,(4.22)$ i (4.25) oraz warunku

$$(4.27) \qquad \ddot{f}\,(0_+) = \frac{-1}{\sqrt{c}}\left(1+\rho^2\right).$$

jesteśmy w stanie uzasadnić, że $F \in C^2\left(\frac{-c}{a}, a\right)$.

Otóż

$$-\frac{4}{\sqrt{c}}\rho^2 - \ddot{F}\,(0_-) = \frac{2}{c}\left[1-\sqrt{c}\frac{1}{\sqrt{c}}\left(1+\rho^2\right)-3\rho^2\right]\sqrt{c}+2c\frac{\rho^2}{\sqrt{c^3}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\left(1+\rho^2\right),$$

$$-\ddot{F}\,(0_-) = -\frac{8}{\sqrt{c}}\rho^2+\frac{7}{\sqrt{c}}\rho^2+\frac{1}{\sqrt{c}},$$

czyli

$$\ddot{F}\,(0_-) = \frac{-1}{\sqrt{c}}\left(1+\rho^2\right) = \ddot{f}\,(0_+)\,.$$

Warunki: Γ jest krzywą ściśle wypukłą i $\ddot{F}$ jest ujemne są sobie równoważne, więc uwzględniając (4.26), musimy zweryfikowac następującą nierówność

$$(4.28) \qquad \dot{F}_\varphi\ddot{\varphi} + \frac{x^2\ddot{\varphi}-2x\dot{\varphi}+2\varphi}{x^3}f + 2\frac{x\dot{\varphi}-\varphi}{x^2}\,\dot{f} + \frac{\varphi}{x}\,\ddot{f} > 0 \qquad \text{dla} \quad x\in(0,a)\,.$$

Niech

$$(4.29) \qquad L = \dot{F}_\varphi\ddot{\varphi} \qquad \text{dla} \quad x\in(0,a)$$

i

$$(4.30) \qquad P = \frac{x^2\ddot{\varphi}-2x\dot{\varphi}+2\varphi}{x^3} f + 2\frac{x\dot{\varphi}-\varphi}{x^2}\,\dot{f} + \frac{\varphi}{x}\,\ddot{f} \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a)\,.$$

Podstawiając φ, $\dot{\varphi}$ i $\ddot{\varphi}$ do (4.30) , otrzymujemy

$$P = \frac{x^2\left(2cx\frac{1+\dot{f}(x)^2+f(x)\ddot{f}(x)}{\left(x^2+f(x)^2\right)^2} - 4\frac{x+f(x)\dot{f}(x)}{x^2+f(x)^2}\left(c\frac{x^2+2xf(x)\dot{f}(x)-f(x)^2}{(x^2+f(x)^2)^2}\right)\right) - 2x\left(c\frac{x^2+2xf(x)\dot{f}(x)-f(x)^2}{(x^2+f(x)^2)^2}\right) + 2\left(\frac{-cx}{x^2+f(x)^2}\right)}{x^3} f\,(x)$$
$$+2\frac{x\left(c\frac{x^2+2xf(x)\dot{f}(x)-f(x)^2}{(x^2+f(x)^2)^2}\right)-\left(\frac{-cx}{x^2+f(x)^2}\right)}{x^2}\,\dot{f}\,(x) + \frac{\frac{-cx}{x^2+f(x)^2}}{x}\,\ddot{f}\,(x)\,.$$

Po odpowiednim uporządkowaniu, mamy

(4.31)

$$\tfrac{1}{c}\left(x^2+f^2\right)P = 6x^2 f\left(\dot{f}\right)^2 - 4x^3\,\dot{f} - 12xf^2\,\dot{f} - 2f^3\left(\dot{f}\right)^2 - x^4\,\ddot{f} + f^4\,\ddot{f} - 6x^2 f + 2f^3$$

$$\text{dla} \quad x \in (0,a)\,.$$

Teraz, mając na uwadze (4.21) , możemy lekko zmodyfikować formę L, mianowicie

$$L = \dot{F}_{\varphi}\ddot{\varphi} = \dot{F}_{\varphi}\dot{\varphi}\,\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}$$

i dokonując analogicznych podstawień jak wyżej, dostajemy

$$L = \dot{F}_{\varphi}\ddot{\varphi} = \dot{F}_{\varphi}\dot{\varphi}\,\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} = -\left(\dot{\Phi}\,f + \Phi\,\dot{f}\right)\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} =$$
$$= -\left(2c\frac{x+f(x)\dot{f}(x)}{\left(x^2+f(x)^2\right)^2} f\,(x) + \frac{-c}{x^2+f(x)^2}\,\dot{f}\,(x)\right)\frac{2cx\frac{1+\dot{f}(x)^2+f(x)\ddot{f}(x)}{\left(x^2+f(x)^2\right)^2} - 4\frac{x+f(x)\dot{f}(x)}{x^2+f(x)^2}\left(c\frac{x^2+2xf(x)\dot{f}(x)-f(x)^2}{(x^2+f(x)^2)^2}\right)}{\left(c\frac{x^2+2xf(x)\dot{f}(x)-f(x)^2}{(x^2+f(x)^2)^2}\right)},$$

czyli

$$(4.32) \qquad \tfrac{1}{c}\left(x^2+f^2\right)L =$$
$$\frac{x^2\dot{f}-2xf-f^2\dot{f}}{x^2+2xf\dot{f}-f^2}\left(-2x^3 + 6xf^2 - 12x^2 f\,\dot{f} + 4f^3\,\dot{f} + 2x^3\left(\dot{f}\right)^2 - 6xf^2\left(\dot{f}\right)^2 + 2x^3 f\,\ddot{f} + 2xf^3\right.$$

$$\text{dla} \quad x \in (0,a)\,.$$

Nierówność (4.28) może być zapisana w postaci

$\frac{1}{c}\left(x^2+f^2\right)(L+P)>0,$

tj.

$$\frac{x^2\dot{f}-2xf-f^2\dot{f}}{x^2+2xf\dot{f}-f^2}\left(-2x^3+6xf^2-12x^2f\,\dot{f}+4f^3\,\dot{f}+2x^3\left(\dot{f}\right)^2-6xf^2\left(\dot{f}\right)^2+2x^3f\,\ddot{f}+2xf^3\,\ddot{f}\right)$$
$$+6x^2f\left(\dot{f}\right)^2-4x^3\,\dot{f}-12xf^2\,\dot{f}-2f^3\left(\dot{f}\right)^2-x^4\,\ddot{f}+f^4\,\ddot{f}-6x^2f+2f^3>0.$$

Zauważamy, że mianownik $x^2+2xf\,\dot{f}-f^2$ na mocy warunku (4.9) jest ujemny.

Uwzględniając ten fakt, zapisujemy

$$\left(x^2\,\dot{f}-2xf-f^2\,\dot{f}\right)$$
$$\cdot\left(-2x^3+6xf^2-12x^2f\,\dot{f}+4f^3\,\dot{f}+2x^3\left(\dot{f}\right)^2-6xf^2\left(\dot{f}\right)^2+2x^3f\,\ddot{f}+2xf^3\,\ddot{f}\right)$$
$$+\left(6x^2f\left(\dot{f}\right)^2-4x^3\,\dot{f}-12xf^2\,\dot{f}-2f^3\left(\dot{f}\right)^2-x^4\,\ddot{f}+f^4\,\ddot{f}-6x^2f+2f^3\right)$$
$$\cdot\left(x^2+2xf\,\dot{f}-f^2\right)<0.$$

Grupowanie wyrazów z $\ddot{f}, \dot{f}, \left(\dot{f}\right)^2$ i $\left(\dot{f}\right)^3$ prowadzi do nierówności

$$\ddot{f}\left(-x^6-3x^4f^2-3x^2f^4-f^6\right)+\dot{f}\left(2x^5+4x^3f^2+2xf^4\right)+\left(\dot{f}\right)^2\left(-2x^4f-4x^2f^3-2f^5\right)$$
$$+\left(\dot{f}\right)^3\left(2x^5+4x^3f^2+2xf^4\right)-\left(2x^4f+4x^2f^3+2f^5\right)<0.$$

Zauważmy, że nierówność tą możemy zapisać w następującej postaci

$$-\left(x^2+f^2\right)^3\,\ddot{f}+2x\left(x^2+f^2\right)^2\left(\dot{f}\right)^3-2f\left(x^2+f^2\right)^2\left(\dot{f}\right)^2+2x\left(x^2+f^2\right)^2\,\dot{f}$$
$$-2f\left(x^2+f^2\right)^2<0.$$

Dzieląc przez $\left(x^2+f^2\right)^2$, otrzymujemy

$$\tfrac{1}{2}\left(x^2+f^2\right)\ddot{f}>x\left(\dot{f}\right)^3-f\left(\dot{f}\right)^2+x\,\dot{f}-f.$$

Ostatecznie mamy

$$\frac{1}{2}\left(x^2+f^2\right)\ddot{f}>\left(x\,\dot{f}-f\right)\left(1+\left(\dot{f}\right)^2\right).$$

Przeprowadzone rachunki prowadzą nas do następujących twierdzeń:

Twierdzenie 4.1.A. Niech $f\in\mathcal{F}$. Jeśli f spełnia nierówność różniczkową

$$(4.33)\qquad \ddot{f}\,(x)>2\tfrac{x\dot{f}(x)-f(x)}{x^2+f^2(x)}\left[1+\dot{f}\,(x)^2\right]\qquad \text{dla}\quad x\in(0,a)$$

i zachodzi równość

$$(4.27)\qquad \ddot{f}\,(0_+)=\tfrac{-1}{\sqrt{c}}\left(1+\dot{f}\,(0_+)^2\right),$$

to funkcję f można przedłużyć do krzywej klasy $\mathcal{E}\,(c)$.

Twierdzenie 4.1.B. Niech krzywa Γ będzie krzywą klasy $\mathcal{E}\,(c)$. Jeśli wykresem funkcji f jest część krzywej Γ, leżąca w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, to funkcja f należy do klasy funkcji $\mathcal{F}$ i spełniona jest nierówność różniczkowa (4.33), i zachodzi równość (4.27).

Przykład 4.1. Niech $f\,(x)=\sqrt{1-x\eta\,(x)}$ dla $x\in[0,a^\star]\subset[0,1]$, gdzie funkcja $\eta:R\longrightarrow R$ spełnia warunki:

$1^o\eta\in C^2$ dla $x\in(0,a^\star)\subset[0,1]$,

$2^o a^\star\eta\,(a^\star)-1=0$,

$3^o 1-x\eta\,(x)>0$ dla $x\in[0,a^\star)\subset[0,1]$,

$4^o\ \dot{\eta}\,(0_+)=1$,

$5^o x^2\ \dot{\eta}\,(x)>x^2-1$ dla $x\in(0,a^\star)\subset[0,1]$,

$6^o\ \dot{\eta}\ (x) + \frac{1}{2}x\ \ddot{\eta}\ (x) + \frac{\left(\eta(x)+x\dot{\eta}(x)\right)^2}{4(1-x\eta(x))} > 0$ dla $x \in (0, a^*) \subset [0,1]$.

$7^o \left[4\left(1 - x\eta\left(x\right)\right)\left(\dot{\eta}\ (x) + \frac{1}{2}x\ \ddot{\eta}\ (x)\right) + \left(\eta\left(x\right) + x\ \dot{\eta}\ (x)\right)^2\right]\left(x^2 + 1 - x\eta\left(x\right)\right)$

$< \left(2 - x\eta\left(x\right) + x^2\ \dot{\eta}\ (x)\right)\left[4\left(1 - x\eta\left(x\right)\right) + \left(\eta\left(x\right) + x\ \dot{\eta}\ (x)\right)^2\right]$

dla $x \in (0, a^*) \subset [0,1]$.

Warunki 1^o–7^o w przykładzie 1 są równoważne warunkom (4.6) – (4.10), (4.27) i (4.33) opisanym w rozdziale 4, są konsekwencją niżej przedstawionych rozważań.

Mianowicie, dla funkcji

$f\left(x\right) = \sqrt{1 - x\eta\left(x\right)}$ dla $x \in [0, a^*]$,

warunek (4.4), tj. $f \in C^2\left(0, a^*\right)$ jest równoważny warunkowi 1^o,

warunek (4.5), tj. $f(a^*) = 0$ i $f\left(0\right) = \sqrt{c} = 1$

są spełnione dzięki warunkowi 2^o,

warunek (4.6), tj. $f\left(x\right) > 0$ dla $x \in [0, a^*)$, znaczy to samo, co warunek 3^o.

Poza tym, mamy

$\dot{f} = \frac{-\eta - x\dot{\eta}}{2f}$,

$2f\ \dot{f} = -\eta - x\ \dot{\eta}$,

$-2\left(\dot{f}^2 + f\ \ddot{f}\right) = 2\ \dot{\eta} + x\ \ddot{\eta}$,

$\dot{f}^2 + f\ \ddot{f} = -\ \dot{\eta} - \frac{1}{2}x\ \ddot{\eta}$.

Warunek (4.7), dotyczący granic, jest równoważny warunkom 1^o i 4^o, bowiem

$\dot{f}\,(0_+) = \frac{-\eta(0_+)}{2}$,

$\dot{f}^2\,(0_+) + f\,(0_+)\,\ddot{f}\,(0_+) = -\,\dot{\eta}\,(0_+)\,,$

$\left[\frac{-\eta(0_+)}{2}\right]^2 + \ddot{f}\,(0_+) = -\,\dot{\eta}\,(0_+)\,,$

$\ddot{f}\,(0_+) = -\,\dot{\eta}\,(0_+) - \frac{\eta^2(0_+)}{2}.$

Z drugiej strony, na mocy (4.27) wiemy, że

$\ddot{f}\,(0_+) = \frac{-1}{f(0_+)}\left[1 + \dot{f}^2\,(0_+)\right].$

Tak więc

$-\,\dot{\eta}\,(0_+) - \frac{\eta^2(0_+)}{2} = -1 - \dot{f}^2\,(0_+)\,,$

$\dot{\eta}\,(0_+) + \frac{\eta^2(0_+)}{2} = 1 + \frac{\eta^2(0_+)}{4},$

czyli

$\dot{\eta}\,(0_+) = 1.$

Przyjrzyjmy się nierówności (4.9), tj. nierówności

$2xf\,(x)\,\dot{f}\,(x) < f\,(x)^2 - x^2.$

Otóż

$x\,[-\eta\,(x) - x\,\dot{\eta}\,(x)] < 1 - x\eta\,(x) - x^2,$

czyli uzyskujemy warunek 5^o, t.j.

$x^2\,\dot{\eta}\,(x) > x^2 - 1 \quad \text{dla} \quad x \in (0, a^\star) \subset [0, 1]\,.$

Mamy na uwadze również, że $\ddot{f}\,(x) < 0$, to

$0 > f\,(x)\,\ddot{f}\,(x) = -\,\dot{\eta}\,(x) - \frac{1}{2}x\,\ddot{\eta}\,(x) - \dot{f}^2\,(x)$

i dostajemy warunek 6^o t.j.

$$\dot{\eta}(x) + \tfrac{1}{2}x\,\ddot{\eta}(x) + \frac{\left[\eta(x)+x\dot{\eta}(x)\right]^2}{4[1-x\eta(x)]} > 0 \quad \text{dla} \quad x \in (0, a^*) \subset [0,1].$$

Pozostaje nierówność (4.33), tj. $\quad \ddot{f}(x) > 2\frac{x\dot{f}(x)-f(x)}{x^2+f^2(x)}\left[1+\dot{f}(x)^2\right].$

Wstawiając do tej nierówności $f(x)$, $\dot{f}(x)$ i $\ddot{f}(x)$, otrzymujemy

$$-\left[\dot{\eta}(x) + \tfrac{1}{2}x\,\ddot{\eta}(x) + \frac{\left[\eta(x)+x\dot{\eta}(x)\right]^2}{4[1-x\eta(x)]}\right](x^2+1-x\eta(x))$$
$$> \left[x\eta(x) - x^2\,\dot{\eta}(x) - 2\right]\left[1 + \frac{\left[\eta(x)+x\dot{\eta}(x)\right]^2}{4[1-x\eta(x)]}\right],$$

skąd mamy warunek 7^o

$$\left[4(1-x\eta(x))\left(\dot{\eta}(x) + \tfrac{1}{2}x\,\ddot{\eta}(x)\right) + \left(\eta(x) + x\,\dot{\eta}(x)\right)^2\right](x^2+1-x\eta(x))$$
$$< (2 - x\eta(x) + x^2\,\dot{\eta}(x))\left[4(1-x\eta(x)) + \left(\eta(x) + x\,\dot{\eta}(x)\right)^2\right] \quad \text{dla } x \in (0,a^*) \subset [0,1].$$

Zauważmy, że w szczególności funkcja

$\eta(x) = x + ax^2 \qquad$ dla ustalonego $a > 0$ i $x \in [0, a^*] \subset [0,1]$

spełnia wyżej wypisane warunki 1^o–7^o.

Dla ustalonego $a > 0$ rozpatrzymy równanie $1 - x^2 - ax^3 = 0$.

Wielomian $w(x) = 1 - x^2 - ax^3$ jest funkcją ściśle malejącą dla $x > 0$, albowiem $\dot{w}(x) = -x(2+3ax) < 0$ dla $x \in (0, +\infty)$.

Skoro $w(0) = 1$, $w(1) = -a < 0$ i wielomian jest funkcją malejącą w przedziale $(0, +\infty)$, to istnieje dokładnie jeden pierwiastek wielomianu $w(x)$ w przedziale $(0,1)$. Oznaczmy go symbolem a^*.

W związku z powyższym, warunki 1^o–3^o są spełnione.

ad.4^o

$\dot{\eta}\,(0_+) = 1.$

ad.5^o

Nierówność 5^o sprowadza się do nierówności

$$x^2\,(1+2ax) > x^2 - 1,$$

skąd otrzymujemy oczywistą nierówność

$$2ax^3 > -1 \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a^\star) \subset [0,1]\,.$$

ad.6^o

Wykorzystując punkt 2^o, otrzymujemy

$$1 + 3ax + \tfrac{\left(2x+3ax^2\right)^2}{4-4x^2-4ax^3} = 1 + 3ax + \tfrac{\left(2x+3ax^2\right)^2}{4(1-x^2-ax^3)} > 0 \qquad \text{dla} \quad x \in (0, a^\star) \subset [0,1]\,.$$

ad.7^o

Nierówność 7^o przyjmuje postać

$$\left\{4\left[1 - x\left(x+ax^2\right)\right](1+3ax) + \left[x + ax^2 + x\,(1+2ax)\right]^2\right\}\left[x^2 + 1 - x\left(x+ax^2\right)\right]$$

$$< \left[2 + (1+2ax)\,x^2 - x\left(x+ax^2\right)\right]\left\{4\left[1 - x\left(x+ax^2\right)\right] + \left[x + ax^2 + x\,(1+2ax)\right]^2\right\},$$

$$\left[4\left(1-x^2-ax^3\right)(1+3ax) + \left(2x+3ax^2\right)^2\right]\left(1-ax^3\right)$$

$$< \left(2+ax^3\right)\left[4\left(1-x^2-ax^3\right) + \left(2x+3ax^2\right)^2\right],$$

$$4\left(1-x^2-ax^3\right)\left[(1+3ax)\left(1-ax^3\right) - \left(2+ax^3\right)\right] < \left(2x+3ax^2\right)^2\left(2+ax^3-1+ax^3\right),$$

$$4\left(1-x^2-ax^3\right)\left(-3a^2x^4 - 2ax^3 + 3ax - 1\right) < \left(2x+3ax^2\right)^2\left(1+2ax^3\right).$$

Skoro wyrażenia

$$4\left(1-x^2-ax^3\right),\ \left(2x+3ax^2\right)^2,\ \left(1+2ax^3\right)$$

są dodatnio określone dla $x \in (0,a^\star) \subset [0,1]$,

wystarczy więc, by było

$$-3a^2x^4-2ax^3+3ax-1 \leq 0 \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a^\star).$$

Niech

$$m(x) = -3a^2x^4-2ax^3+3ax-1 \leq 0 \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a^\star).$$

Mamy

$$m(0) = -1,$$

$$\dot{m}(x) = 3a\left(-4ax^3-2x^2+1\right),$$

$$\ddot{m}(x) = -12a\left(3ax+1\right)x < 0 \qquad \text{dla} \quad x \in (0,a^\star),$$

czyli funkcja $m(x)$ jest wklęsła na przedziale $(0,a^\star)$.

W przedziale $(0,a^\star)$ winien być punkt extremalny (maximum), oznaczmy go $x^\star$, taki, że $\dot{m}(x^\star)=0$ i $\ddot{m}(x^\star)<0$ i $m(x^\star)<0$.

Tak więc

$$\dot{m}(x^\star) = 3a\left(-4ax^{\star 3}-2x^{\star 2}+1\right)=0$$

i

$$m(x^\star) = -3a^2x^{\star 4}-2ax^{\star 3}+3ax^\star-1$$

$$= -ax^\star\left(3ax^{\star 3}+2x^{\star 2}\right)+3ax^\star-1$$

$$= -ax^{\star}\left(4ax^{\star 3} + 2x^{\star 2} - 1\right) + a^2x^{\star 4} - ax^{\star} + 3ax^{\star} - 1$$

$$= a^2x^{\star 4} + 2ax^{\star} - 1$$

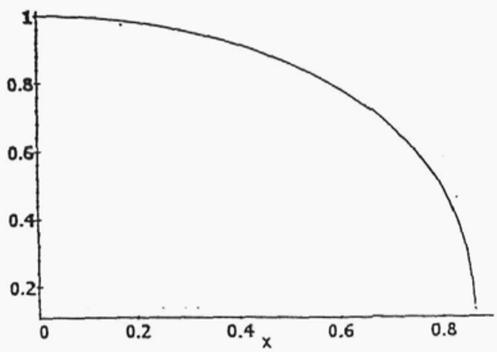
$$< a^2a^{\star 4} + 2aa^{\star} - 1$$

$$< a^2 + 2a - 1 = (a+1)^2 - 2 < 0 \qquad \text{dla} \quad a \in \left(0, \sqrt{2} - 1\right).$$

Reasumując, dla dowolnego ustalonego $a \in \left(0, \sqrt{2} - 1\right)$, funkcja

$f(x) = \sqrt{1 - x^2 - ax^3}$ dla $x \in [0, a^{\star}] \subset [0, 1]$, może być przedłużona do krzywej równopotęgowej.

Przykład 4.2. Niech $f(x) = \left(1 - \frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{8}}$ dla $x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $(rys.4.1)$.



rys.4.1

Zauważmy, że

$f(0) = 1 = \sqrt{c}$, więc $c = 1$,

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$,

$\dot{f}(x) = \frac{-x}{\left(1 - \frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{8}}} < 0$ dla $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\dot{f}(0) = 0$,

$$\ddot{f}\,(x) = \frac{-\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)}{\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{13}{8}}} < 0 \qquad \text{dla} \quad x \in \left(0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\ddot{f}\,(0) = -1,$$

istnieją granice: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0_+} \dot{f}\,(x) = 0,\quad \lim\limits_{x\longrightarrow 0_+} \ddot{f}\,(x) = -1,\quad \lim\limits_{x\longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}_-} \dot{f}\,(x) = -\infty.$

Jak widać warunki (4.4), (4.5), (4.6), (4.10) są spełnione.

Warunek (4.27) ,tj. $\ddot{f}\,(0_+) = \frac{-1}{\sqrt{c}}\left(1+\dot{f}\,(0_+)^2\right)$, jest również spełniony.

Sprawdzamy nierówność (4.9), tj. $2xf\,\dot{f} < f^2 - x^2$ dla $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Nierówność jest oczywiście spełniona dla $x = 0$.

Dla $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ otrzymujemy kolejno

$$-2x^2\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{8}}\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{-5}{8}} < \left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}} - x^2,$$

$$-2x^2\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{-1}{4}} < \left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}} - x^2,$$

$$x^2\left[1-2\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{-1}{4}}\right] < \left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}},$$

$$\frac{x^2\left[\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}}-2\right]}{\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}}} < \left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}},$$

$$x^2\left[\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}}-2\right] < 1-\tfrac{4}{3}x^2,$$

$$\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}} < \tfrac{1}{x^2}+\tfrac{2}{3}.$$

Przez l i p oznaczamy odpowiednio funkcje znajdujące się po lewej i prawej stronie powyższej nierówności.

Dla lewej strony, mamy

$$l\,(x) = \left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$\dot{l}\,(x) = \tfrac{1}{4}\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{-3}{4}}\left(\tfrac{-8}{3}x\right) < 0 \qquad \text{dla} \quad x \in \left(0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$l \searrow$ w przedziale $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$l(x) \in (0,1]$ dla $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Dla prawej strony , mamy

$p(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3}$,

$\dot{p}(x) = \frac{-2}{x^3} < 0$ dla $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$p \searrow$ w przedziale $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$p(x) \in (2, +\infty)$ dla $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Stwierdzamy, że nierówność $l(x) < p(x)$ jest spełniona dla $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, a zatem jest spełniona nierówność $2xf\,\dot{f} < f^2 - x^2$ dla $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Niewątpliwie funkcja $\varphi(x) = \frac{-x}{x^2 + \left(1 - \frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}}}$ przyjmuje wartości ujemne dla $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Poza tym

$$\dot{\varphi}(x) = -\frac{x^2 + \left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}} - x\left[2x + \frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{-1}{4}}\left(\frac{-8}{3}x\right)\right]}{\left[x^2 + \left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}}\right]^2},$$

$$\dot{\varphi}(x) = -\frac{x^2\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}} + 1 - \frac{4}{3}x^2 - x\left[2x\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}} - 2x\right]}{\left[x^2 + \left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}}\right]^2\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}}},$$

$$\dot{\varphi}(x) = \frac{x^2\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}} - \left(1+\frac{2}{3}x^2\right)}{\left[x^2 + \left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}}\right]^2\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

Z wyżej przeprowadzonych rachunków, wynika, że

$$\dot{\varphi}(x) = \frac{x^2\left[\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{3}\right)\right]}{\left[x^2 + \left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}}\right]^2\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}}} < 0 \qquad \text{dla} \quad x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Sprawdzamy teraz nierówność (4.33) ,

$$\ddot{f} > 2\frac{x\dot{f}-f}{x^2+f^2}\left[1+\dot{f}^2\right] \quad \text{w przedziale } \left(0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

tj. nierówność

$$\frac{-\left(1+\frac{1}{3}x^2\right)}{\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{13}{8}}} > 2\frac{\frac{-x^2}{\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{8}}}-\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{8}}}{x^2+\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}}}\left(1+\frac{x^2}{\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{4}}}\right) \qquad \text{dla} \quad x \in \left(0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Upraszczając, dostajemy

$$-\left(1+\tfrac{1}{3}x^2\right)\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{-13}{8}} > 2\frac{\frac{1}{3}x^2-1}{\left[x^2+\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}}\right]\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{8}}}\frac{\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{4}}+x^2}{\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{4}}},$$

$$-\left(1+\tfrac{1}{3}x^2\right) > 2\left(\tfrac{1}{3}x^2-1\right)\frac{1-\frac{4}{3}x^2}{x^2+\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{3}{4}}}\frac{\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{4}}+x^2}{\left(1-\frac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{4}}},$$

$$-\left(1+\tfrac{1}{3}x^2\right)\left[x^2\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{4}}+\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^2\right]$$

$$> 2\left(\tfrac{1}{3}x^2-1\right)\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)\left[\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{4}}+x^2\right],$$

$$\left[-x^2\left(1+\tfrac{1}{3}x^2\right)-2\left(\tfrac{1}{3}x^2-1\right)\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)\right]\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{4}}$$

$$> 2x^2\left(\tfrac{1}{3}x^2-1\right)\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)+\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^2\left(1+\tfrac{1}{3}x^2\right),$$

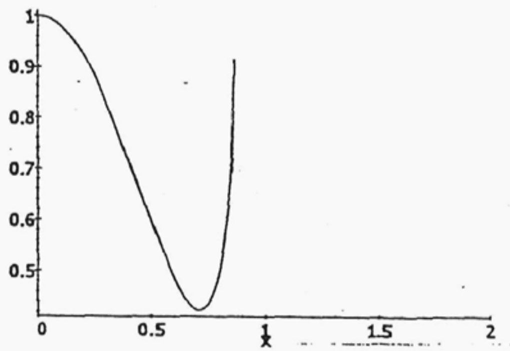
$$\left(\tfrac{5}{9}x^4-\tfrac{13}{3}x^2+2\right)\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{5}{4}} > \left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)\left(\tfrac{2}{9}x^4-3x^2+1\right),$$

$$\left(\tfrac{5}{9}x^4-\tfrac{13}{3}x^2+2\right)\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}} > \tfrac{2}{9}x^4-3x^2+1 \qquad \text{dla} \quad x \in [0, \tfrac{\sqrt{3}}{2})$$

lub równoważną formę tej nierówności

$$\left(1-\tfrac{4}{3}x^2\right)^{\frac{1}{4}}\left(\tfrac{5}{9}x^4-\tfrac{13}{3}x^2+2\right)-\tfrac{2}{9}x^4+3x^2-1>0 \qquad \text{dla} \quad x \in [0, \tfrac{\sqrt{3}}{2}).$$

Jeśli oznaczymy przez g funkcję po lewej stronie ostatniej nierówności, to funkcja ta jest dodatnio określona dla $x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, co pokazuje rys.4.2, sporządzony przy pomocy programu SWP.



rys.4.2

Pomimo, iż funkcje użyte w przykładzie są stosunkowo proste, to jednak jesteśmy zmuszeni używać matematycznego oprogramowania komputerowego, aby pokazać nierówność (4.33).

5.Przedłużenie równocięciwowe

W tej części pracy rozważymy możliwość przedłużenia wklęsłej funkcji $f : [0, a] \to [0, +\infty)$ do równocięciwowej wypukłej krzywej z osią symetrii. Pokażemy, że przedłużenie jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f spełnia pewną nierówność różniczkową zwyczajną rzędu drugiego.

Niech $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę wszystkich równocięciwowych krzywych z osią symetrii i punktem równocięciwowości leżącym na tej osi symetrii. Możemy założyć, bez straty ogólności, że oś x jest osią symetrii, zaś początek układu współrzędnych jest punktem równocięciwowości.