Zainteresowanie krzywymi równocięciwowymi wynikało m.in. z braku odpowiedzi na następujące pytanie: „Czy istnieje krzywa wypukła C z dwoma punktami równocięciwowości?" Pytanie to postawił Fujiwara w roku 1916 [6]. Niezależnie od niego, pytanie to postawili również Blaschke, Rothe i Weitzenböck w roku 1917 [1]. W literaturze pytanie to znane jest pod nazwą - „problemem równocięciwowości". Ukazało się wiele artykułów, w których autorzy próbowali odpowiedzieć na wyżej postawione pytanie, m.in. W.Süss [18], A.Dirac [2], L.Dulmage [3], H.G.Helfenstein [7], V.Linis [12], E.Wirsing [19], J.Sancho de San Roman [16], E.Ehrhart [4], V.Klee [10], R.Schäfke and H.Volkmer [17]. A.Dirac pokazał, że jeśli istnieje rozwiązanie „problemu równocięciwowości", to krzywa musi być klasy C^1 oraz musi mieć dwie prostopadłe osie symetrii. Z kolei E.Wirsing pokazał, że krzywa będąca rozwiązaniem „problemu równocięciwowości" jest krzywą analityczną. Dopiero w roku 1997, M.Rychlik [15] udowodnił, że krzywa równocięciwowa z dwoma punktami równocięciwowości nie istnieje.

2. Krzywe k-równocięciwowe i uogólniony problem Fujiwary

Oprócz klas krzywych równocięciwowych i równopotęgowych możemy zdefiniować w podobny sposób inne klasy krzywych. Mianowicie, dla ustalonej liczby całkowitej $k \neq 0$ zdefiniujemy krzywą $k-$ równocięciwową w następujący sposób:

Definicja 2.1. Zamkniętą, płaską krzywą C, nazwiemy $k-$ równocięciwową, jeśli dla krzywej C istnieje punkt $P \in D_C$ i następujący warunek jest spełniony:

dla dowolnej cięciwy o końcach P_1, P_2, przechodzącej przez P, mamy

$$(2.1) \qquad | PP_1 |^k + | PP_2 |^k = c = \text{constans}$$

i suma nie zależy od wyboru cięciwy.

Stałą c nazywamy stałą $k-$ równocięciwową, zaś punkt P nazywamy punktem $k-$ równocięciwowym krzywej C.

Klasę wszystkich krzywych (owali) $k-$ równocięciwowych oznaczamy symbolem $\mathcal{C}(k)$ $(\mathcal{O}(k))$. Tak więc $\mathcal{C}(1)$ $(\mathcal{O}(1))$ oznacza klasę wszystkich krzywych (owali) równocięciwowych. Klasę $\mathcal{C}(-1)$ rozpatrywał Falconer[5], który pokazał, że jedyną krzywą klasy C^2 z dwoma punktami $(-1)-$ równocięciwowości jest elipsa.

Możemy ujednolicić podejście do klas wyróżnionych krzywych.

Jeśli $t \longrightarrow r(t)\, e^{it}$ jest krzywą $k-$ równocięciwową, zaś

$$(2.2) \qquad f(x) = x^k \qquad \text{dla} \quad x \in (0, +\infty),$$

to mamy

$$(2.3) \qquad f(r(t)) + f(r(t+\pi)) = c = \text{constans}.$$

Zauważmy, że w przypadku krzywych równopotęgowych rozpatrujemy funkcję

$$(2.4) \qquad f(x) = \ln x \qquad \text{dla} \quad x \in (0, +\infty).$$

Wygodnie jest wprowadzić następującą definicję:

Definicja 2.2. Krzywą równopotęgową nazywać będziemy krzywą 0−równocięciwową.

Funkcje x^k i $\ln x$ są funkcjami monotonicznymi, wypukłymi (wklęsłymi), klasy C^2.

W związku z powyższym, z dowolną funkcją $f:(0,+\infty)\longrightarrow R$, spełniającą warunki:

$$(2.5)\qquad \begin{cases} f \quad \text{jest monotoniczna,} \\ f \quad \text{jest wypukła (wklęsła),} \\ f \quad \text{jest klasy } C^2, \end{cases}$$

możemy stowarzyszyć klasę krzywych $\mathcal{C}_f$, wyznaczoną wzorem (2.3).

Z każdą funkcją $g:R\longrightarrow R$ zwiążemy funkcję $g_\pi:R\longrightarrow R$, określoną wzorem

$$(2.6)\qquad g_\pi(t)=g(t+\pi) \qquad \text{dla } t\in R.$$

Tak więc, z (2.3) otrzymujemy

$\dot{f}\circ r\cdot \dot{r}+\dot{f}\circ r_\pi\cdot \dot{r_\pi}=0,$

$\dot{f}\circ r\cdot r\frac{\dot{r}}{r}+\dot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi\frac{\dot{r_\pi}}{r_\pi}=0.$

Wykorzystując (1.13), dostajemy

$$(2.7)\qquad \dot{f}\circ r\cdot r\cot\alpha+\dot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi\cot\alpha_\pi=0 \qquad \text{dla } t\in[0,2\pi].$$

Niech C będzie krzywą daną wzorem (1.2), należącą do klasy $\mathcal{C}_f$.

Pokażemy, że istnieje taki punkt t_0, że $\alpha(t_0)=\frac{\pi}{2}$.

Otóż, całkując (2.7), otrzymujemy

$$\int_0^\pi r(t)\,\dot{f}\,(r(t))\cot\alpha(t)\,dt + \int_0^\pi r(t+\pi)\,\dot{f}\,(r(t+\pi))\cot\alpha(t+\pi)\,dt = 0.$$

Zmieniając zmienne w drugiej całce, dostajemy

$$\int_0^{2\pi} r(t)\,\dot{f}\,(r(t))\cot\alpha(t)\,dt = 0. \tag{2.8}$$

Skoro f jest monotoniczna, to ze wzoru tego wynika natychmiast, że istnieje taka wartość parametru t_0, że $\alpha(t_0) = \frac{\pi}{2}$.

Zauważmy, że z (2.7) wynika następujący wniosek:

Wniosek 2.1. Jeśli f jest funkcją monotoniczną i $\alpha(t_0) = \frac{\pi}{2}$ dla pewnego $t_0 \in [0, 2\pi]$, to $\alpha(t_0 + \pi) = \frac{\pi}{2}$.

Możemy przyjąć oczywiście, że $t_0 = 0$.

Ma miejsce twierdzenie:

Twierdzenie 2.1. Niech funkcja $f : (0, +\infty) \longrightarrow R$ spełnia warunki (2.5). Niech C będzie krzywą daną wzorem (1.2), należącą do klasy $\mathcal{C}_f$. Dla krzywej C istnieje cięciwa przechodząca przez początek układu współrzędnych, taka, że styczne do krzywej na końcach tej cięciwy są prostopadłe do tej cięciwy.

Twierdzenie to jest naturalną konsekwencją wniosku 2.1.

Teraz, różniczkując (2.7), otrzymujemy

$$\dot{f}\circ r\cdot \dot{r}\cot\alpha - \dot{f}\circ r\cdot r\frac{\dot{\alpha}}{\sin^2\alpha} + \ddot{f}\circ r\cdot r\,\dot{r}\cot\alpha$$

$$+\,\dot{f}\circ r_\pi\cdot \dot{r_\pi}\cot\alpha_\pi - \dot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi\frac{\dot{\alpha_\pi}}{\sin^2\alpha_\pi} + \ddot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi\,\dot{r_\pi}\cot\alpha_\pi \equiv 0,$$

$$\cot\alpha\left[\dot{f}\circ r\cdot\dot{r} + \ddot{f}\circ r\cdot r\,\dot{r}\right] - \dot{f}\circ r\cdot r\frac{\dot{\alpha}}{\sin^2\alpha}$$

$$+\cot\alpha_\pi\left[\dot{f}\circ r_\pi\cdot\dot{r_\pi}+\ddot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi\,\dot{r_\pi}\right]-\dot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi\frac{\dot{\alpha_\pi}}{\sin^2\alpha_\pi}\equiv 0.$$

Po uwzględnieniu (1.13) i (1.15) mamy

$$\cot^2\alpha\left[\dot{f}\circ r\cdot r+\ddot{f}\circ r\cdot r^2\right]-\dot{f}\circ r\cdot r\frac{\frac{kr}{\sin\alpha}-1}{\sin^2\alpha} \tag{2.9}$$
$$+\cot^2\alpha_\pi\left[\dot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi+\ddot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi^2\right]-\dot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi\frac{\frac{k_\pi r_\pi}{\sin\alpha_\pi}-1}{\sin^2\alpha_\pi}\equiv 0$$

dla $t\in[0,2\pi]$.

Biorąc pod uwagę problem Fujiwary [6] dla krzywych klasy $\mathcal{C}(1)$ $(\mathcal{O}(1))$, twierdzenie Falconera [5] dotyczące krzywych klasy $\mathcal{C}(-1)$ $(\mathcal{O}(-1))$ i rozważania Yanagihary [20] o krzywych $0-$równocięciwowych(równopotęgowych), możemy postawić następujące pytanie:

Dla jakich liczb całkowitych k, istnieje krzywa (krzywa wypukła), klasy C^2 z dwoma punktami $k-$równocięciwowości?

Podamy teraz kilka ogólnych uwag, dotyczących tego problemu, przy następującym założeniu:

(Z) Niech funkcja $f:(0,+\infty)\longrightarrow R$ spełnia warunki (2.5). Niech C będzie krzywą daną wzorem (1.2), należącą do klasy $\mathcal{C}_f$, z dwoma punktami $k-$równocięciwowości R i S oraz stałymi k-równocięciwowymi odpowiednio c_R,c_S.

Wówczas mamy:

Twierdzenie 2.2. Jeśli krzywa C spełnia założenie (Z) w klasie $\mathcal{C}(2)$ $(\mathcal{O}(2))$, to $c_R=c_S$.

Dowód. Oznaczmy przez $\mid G \mid$ pole obszaru ograniczonego przez krzywą G,

$t \longrightarrow r(t)\, e^{it} \qquad$ dla $\ t \in [0, 2\pi]$.

Obliczamy pole obszaru ograniczonego krzywą G. Mamy

$$\begin{aligned}
\mid G \mid &= \tfrac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} r^2(t)\, dt \\
&= \tfrac{1}{2} \left[\int\limits_0^{\pi} r^2(t)\, dt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} r^2(t)\, dt \right] \\
&= \tfrac{1}{2} \left[\int\limits_0^{\pi} r^2(t)\, dt + \int\limits_0^{\pi} r^2(t+\pi)\, dt \right] \\
&= \tfrac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \left[r^2(t) + r^2(t+\pi) \right] dt.
\end{aligned}$$

Jeśli C jest krzywą 2–równocięciwową względem punktów R i S, i $\rho(t)$ oznacza długość promienia wodzącego dowolnego punktu krzywej C względem punktu 2–równocięciwowości R, to $\rho^2(t) + \rho^2(t+\pi) = c_R$ i mamy

$\mid C \mid = \frac{\pi}{2} c_R.$

Podobnie dla punktu 2–równocięciwowości S, otrzymujemy

$\mid C \mid = \frac{\pi}{2} c_S.$

Zatem $c_R = c_S$.

Falconer [5] wykorzystał w swojej pracy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.3. Jeśli krzywa C spełnia założenie (Z) w klasie $\mathcal{C}(-1)$, to $c_R = c_S$.

Dowód. Pokażemy, że twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z warunku (2.9).

Przypomnijmy, iż warunek (2.9) dla punktu (-1)-równocięciwowości R ma postać

$$\text{(2.9)} \qquad \cot^2\alpha\left[\dot{f}\circ r\cdot r+\ddot{f}\circ r\cdot r^2\right]-\dot{f}\circ r\cdot r\frac{\frac{kr}{\sin\alpha}-1}{\sin^2\alpha}$$

$$+\cot^2\alpha_\pi\left[\dot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi+\ddot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi^2\right]-\dot{f}\circ r_\pi\cdot r_\pi\frac{\frac{k_\pi r_\pi}{\sin\alpha_\pi}-1}{\sin^2\alpha_\pi}\equiv 0$$

$$\text{dla } t\in[0,2\pi].$$

W klasie $\mathcal{C}(-1)$ mamy $f(x)=\frac{1}{x}$ i warunek (2.9) przyjmuje postać

$$\cot^2\alpha(t)\left[\tfrac{-1}{r^2(t)}r(t)+\tfrac{2}{r^3(t)}r^2(t)\right]-\frac{\frac{k(t)r(t)}{\sin\alpha(t)}-1}{\sin^2\alpha(t)}\left[\tfrac{-1}{r^2(t)}\right]r(t)$$

$$+\cot^2\alpha(t+\pi)\left[\tfrac{-1}{r^2(t+\pi)}r(t+\pi)+\tfrac{2}{r^3(t+\pi)}r^2(t+\pi)\right]$$

$$-\frac{\frac{k(t+\pi)r(t+\pi)}{\sin\alpha(t+\pi)}-1}{\sin^2\alpha(t+\pi)}\left[\tfrac{-1}{r^2(t+\pi)}\right]r(t+\pi)=0.$$

Jak wiemy $\alpha(t_0)=\alpha(t_0+\pi)=\frac{\pi}{2}$ dla pewnego $t_0\in[0,2\pi]$.

Bez straty ogólności przyjmiemy, że $t_0=0$.

Zatem

$$\{\cot^2\alpha(0)+[k(0)r(0)-1]\}\tfrac{1}{r(0)}+\{\cot^2\alpha(\pi)+[k(\pi)r(\pi)-1]\}\tfrac{1}{r(\pi)}=0.$$

i otrzymujemy zależność

$$[k(0)r(0)-1]\tfrac{1}{r(0)}+[k(\pi)r(\pi)-1]\tfrac{1}{r(\pi)}=0.$$

Stąd

$$\text{(2.10)} \qquad k(0)+k(\pi)=\tfrac{1}{r(0)}+\tfrac{1}{r(\pi)}=c_R.$$

Przez analogię rozpatrujemy warunek (2.9) dla punktu (-1)-równocięciwowości S.

Mamy

$$(2.9) \qquad \cot^2\alpha\left[\dot{f}\circ\rho\cdot r+\ddot{f}\circ\rho\cdot\rho^2\right]-\dot{f}\circ\rho\cdot\rho^{\frac{\frac{k\rho}{\sin\alpha}-1}{\sin^2\alpha}}$$

$$+\cot^2\alpha_\pi\left[\dot{f}\circ\rho_\pi\cdot\rho_\pi+\ddot{f}\circ\rho_\pi\cdot\rho_\pi^2\right]-\dot{f}\circ\rho_\pi\cdot\rho_\pi\frac{\frac{k_\pi\rho_\pi}{\sin\alpha_\pi}-1}{\sin^2\alpha_\pi}=0$$

dla $t\in[0,2\pi]$.

Zależność (2.10) przyjmuje postać

$$(2.11) \qquad k(0)+k(\pi)=\tfrac{1}{\rho(0)}+\tfrac{1}{\rho(\pi)}=c_S.$$

Zatem z (2.10) i (2.11) mamy

$c_R=c_S$.

3. Owale 0–równocięciwowe

W rozdziale tym rozważamy rodzinę $\mathcal{K}_p$ owali 0-równocięciwowych, tj.owali równopotęgowych. Przez $\mathcal{K}_p(c)$ oznaczamy podrodzinę rodziny $\mathcal{K}_p$ dla, której spełnione są warunki:

1^okażda krzywa C rodziny $\mathcal{K}_p(c)$ jest klasy C^2,

2^okażda krzywa C rodziny $\mathcal{K}_p(c)$ jest opisana parametrycznie wzorem (1.2),

3^ostała równopotęgowa to dodatnia liczba c,

4^okrzywizna k krzywej C rodziny $\mathcal{K}_p(c)$ jest klasy C^1.

Możemy założyć (bez straty ogólności), że początek kartezjańskiego układu współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie jest punktem równopotęgowości krzywej równopotęgowej C.