

główne (2), (3), (4), rozwiązuia wszystkie przypadki i pytania zachodzące w trójkacie kulistym, iako to niżej zobaczymy. Moźnaby na ich przystosowaniu skonczyć trygonometrią kulistą iak zrobił *de la Grange*, z tym potrzebnym przydatkiem, żeby każdemu zrównaniu (4) nadadź wygodniejszą do rachunku przez logarytmy postać, iakieśmy to zrobili na (1), (3). Ale tu zachodzi iedna ważna uwaga: zrównanie fundamentalne (1) wydało trzy główne: kombinacya czterech tych zrównań między sobą, czy nas nie przyprowadzi albo do nowych iakich prawd o trójkacie kulistym, albo do sposobów ułatwiaiących rachunek w rozwiązywaniu trójkata? Rozbierzmy to zapytanie.

Zrównania między trzema bokami i trzema kątami razem.

§ 6. Poznawszy fundamentalne i główne trygonometrii zrównania, kombinujemy ie teraz z sobą, to iest: związki iedne łączmy z drugimi, przez rozmaite wartości tychże samych boków i kątów. Pierwsze zrównanie (3) daie

$$\begin{aligned} \text{dost } A &= \text{dosta.wst } B.\text{wst } C - \text{dost } B.\text{dost } C \\ \text{dosta.dost } A &= \text{dost}^2 a.\text{wst } B.\text{wst } C - \text{dosta.dost } B.\text{dost } C. \end{aligned}$$

Aże ze zrównań (1) $\text{dosta} = \text{dost } A.\text{wst } b.\text{wst } c + \text{dost } b.\text{dost } c$,

włożmy tę wartość za dosta w pierwszą stronę zrównania poprzedzaiącego, a otrzymamy

$$\begin{aligned} &\text{dost}^2 A.\text{wst } b.\text{wst } c + \text{dost } A.\text{dost } b.\text{dost } c \\ &= \text{dost}^2 a.\text{wst } B.\text{wst } C - \text{dosta.dost } B.\text{dost } C; \end{aligned}$$

zamieńmy dostawy na wstawy: $\text{dost}^2 A = 1 - \text{wst}^2 A$, $\text{dost}^2 a = 1 - \text{wst}^2 a$, będzie

$$\begin{aligned} & \text{wst}b.\text{wst}c - \text{wst}^2 A.\text{wst}b.\text{wst}c + \text{dost}A.\text{dost}b.\text{dost}c \\ & = \text{wst}B.\text{wst}C - \text{wst}^2 a.\text{wst}B.\text{wst}C - \text{dost}a.\text{dost}B.\text{dost}C \end{aligned}$$

w drugim wyrazie drugiej strony równania, z (2) położmy za $\text{wst}B = \frac{\text{wst}A.\text{wst}b}{\text{wst}a}$ za $\text{wst}C = \frac{\text{wst}A.\text{wst}c}{\text{wst}a}$.

a terminy znoszące się wymazawszy; otrzymamy

$$\text{wst}b.\text{wst}c + \text{dost}b.\text{dost}c.\text{dost}A = \text{wst}B.\text{wst}C - \text{dost}B.\text{dost}C.\text{dost}a \quad (\beta_1)$$

podobnie postąpiwszy ze równaniami na $\text{dost}B$, $\text{dost}C$, w (3) wynaydziemy dwa inne

$$\text{wst}a.\text{wst}b + \text{dost}a.\text{dost}b.\text{dost}C = \text{wst}A.\text{wst}B - \text{dost}A.\text{dost}B.\text{dost}c \quad (\beta_2),$$

$$\text{wst}a.\text{wst}c + \text{dost}a.\text{dost}c.\text{dost}B = \text{wst}A.\text{wst}C - \text{dost}A.\text{dost}C.\text{dost}b \quad (\beta_3);$$

każde ze równań (β_1) , (β_2) , (β_3) zawiera wszystkie trzy boki i wszystkie trzy kąty trójkąta: podał je najpierwszy *Cagnoli* w swojej Trygonometrii. Ale i równanie (α) w § 2 toż samo wyraża, do któregośmy przyszli tak prostym i łatwym sposobem. Każde nawet ze równań (4) może nas przyprowadzić do takiego, które ogarnia wszystkie rzeczy w trójkącie zachodzące; kiedy n.p. w drugiem (4') albo za $\text{wst}b$, albo za $\text{wst}C$, wprowadzimy z (2) wartość wyrażoną przez c , B . Podobne związki między wszystkimi rzeczami w trójkącie miano za zabawkę analistów, póki się nie pokazało ich użycie w zawilszych astronomii pytaniach.

Zrównania (α_1) w § 3 które tak prostym sposobem wyciągnęliśmy z (α) , zdają się każde z dwóch równań złożone, na które iednak nie mogliśmy ich rozebrać. Każde zrównanie *Cagnoli* powinno by nas do tych, albo do podobnych wypadków przyprowadzić. Zróbmy tego próbę na (β_1) . Wiemy z § 51. Algebry, że

$$\text{dost } A = 1 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} A = 2\text{dost}^2 \frac{1}{2} A - 1,$$

$$\text{dost } a = 1 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a = 2\text{dost}^2 \frac{1}{2} a - 1;$$

$$\text{wst } B \cdot \text{wst } C + \text{dost } B \cdot \text{dost } C = \text{dost}(B - C):$$

a zatem

$$\text{dost } B \cdot \text{dost } C = \text{dost}(B - C) - \text{wst } B \cdot \text{wst } C$$

$$\text{dost } B \cdot \text{dost } C - \text{wst } B \cdot \text{wst } C = \text{dost}(B + C).$$

Ze równań (3) wzięwszy pod uwagę pierwsze, mamy z niego

$$\begin{aligned} 1 - \text{dost } a &= 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a = 2(1 - \text{dost}^2 \frac{1}{2} a) = \\ &= \frac{\text{wst } B \cdot \text{wst } C - \text{dost } A - \text{dost } B \cdot \text{dost } C}{\text{wst } B \cdot \text{wst } C}; \end{aligned}$$

skąd wypada:

$$2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a \cdot \text{wst } B \cdot \text{wst } C = -\text{dost}(B + C) - \text{dost } A,$$

$$2\text{dost}^2 \frac{1}{2} a \cdot \text{wst } B \cdot \text{wst } C = \text{dost}(B - C) + \text{dost } A.$$

Weźmy znowu pierwsze ze równań (1) § 2, i podobnie postępując, wyciągniemy

$$\begin{aligned} 1 - \text{dost } A &= 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} A = 2(1 - \text{dost}^2 \frac{1}{2} A) \\ &= \frac{\text{wst } b \cdot \text{wst } c - \text{dost } a + \text{dost } b \cdot \text{dost } c}{\text{wst } b \cdot \text{wst } c}; \end{aligned}$$

skąd znowu wypada, że

$$2\text{wst}^2 \frac{1}{2} A \cdot \text{wst } b \cdot \text{wst } c = \text{dost}(b - c) - \text{dost } a,$$

$$2\text{dost}^2 \frac{1}{2} A \cdot \text{wst } b \cdot \text{wst } c = -\text{dost}(b + c) + \text{dost } a.$$

Za pomocą przytoczonych tu wartości, starajmy się iakiekolwiek równanie *Cagnoli*, n. p. (β_1) przywieść do najprostszych wyrazów, zachowując w niem wszystkie boki i wszystkie kąty:

$$\text{wst } b \cdot \text{wst } c + \text{dost } b \cdot \text{dost } c \cdot \text{dost } A = \text{wst } B \cdot \text{wst } C - \text{dost } B \cdot \text{dost } C \cdot \text{dost } a \quad (\beta_1)$$



wprowadźmy w (β_1) za $\text{dost} A$ jego wartość $2\text{dost}^2 \frac{1}{2} A - 1$;
za $\text{dost} a$ wartość $= 1 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a$, otrzymamy

$$\begin{aligned} & -\text{dost}(b+c) + 2\text{dost}^2 \frac{1}{2} A \cdot \text{dost} b \cdot \text{dost} c = \\ & = -\text{dost}(B+C) + 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a \cdot \text{dost} B \cdot \text{dost} C \quad (\beta'_1); \end{aligned}$$

aż dowiedliśmy wyżej, że

$$\begin{aligned} & 2\text{dost}^2 \frac{1}{2} A \cdot \text{dost} b \cdot \text{dost} c = \\ & = 2 \text{dost}^2 \frac{1}{2} A \cdot \text{dost}(b-c) - 2\text{dost}^2 \frac{1}{2} A \cdot \text{wst} b \cdot \text{wst} c \\ & = 2 \text{dost}^2 \frac{1}{2} A \cdot \text{dost}(b-c) + \text{dost}(b+c) - \text{dost} a; \\ & 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a \cdot \text{dost} B \cdot \text{dost} C = \\ & = 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a \cdot \text{dost}(B-C) - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a \cdot \text{wst} B \cdot \text{wst} C \\ & = 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a \cdot \text{dost}(B-C) + \text{dost}(B+C) + \text{dost} A; \end{aligned}$$

te ostatnie wartości wprowadzone w (β'_1) , po wyma-
zaniu znoszących się terminów, dadzą

$$\begin{aligned} & 2\text{dost}^2 \frac{1}{2} A \cdot \text{dost}(b-c) - \text{dost} A = \\ & = 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a \cdot \text{dost}(B-C) + \text{dost} a. \end{aligned}$$

W tém równaniu za $-\text{dost} A$ położywszy $1 - 2\text{dost}^2 \frac{1}{2} A$;
a za $\text{dost} a = 1 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a$; znajdziemy

$$2\text{dost}^2 \frac{1}{2} A [\text{dost}(b-c) - 1] = 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a [\text{dost}(B-C) - 1];$$

aż $\text{dost}(b-c) = 1 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} (b-c)$, $\text{dost}(B-C) = 1 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} (B-C)$ po wprowadzeniu tych wartości w rów-
wnanie ostatnie, odmienieniu znaków, i po wycią-
gnięciu pierwiastków, przyjdziemy do

$$\frac{\text{wst} \frac{1}{2} (b-c)}{\text{wst} \frac{1}{2} a} = \frac{\text{wst} \frac{1}{2} (B-C)}{\text{dost} \frac{1}{2} A} \quad \text{I.}$$

Powtóre: W to samo równanie (β_1) położmy za
 $\text{dost} A = 1 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} A$, za $\text{dost} a = 1 - 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} a$, przez
co zamieni się na

$$\begin{aligned} \text{dost}(b-c) - 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} A \cdot \text{dost } b \cdot \text{dost } c = \\ = -\text{dost}(B+C) + 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} a \cdot \text{dost } B \cdot \text{dost } C: \end{aligned}$$

aże dowiedliśmy wyżej, że

$$\begin{aligned} \text{dost}(b-c) &= 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} A \cdot \text{wst } b \cdot \text{wst } c + \text{dost } a, \\ -\text{dost}(B+C) &= 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} a \cdot \text{wst } B \cdot \text{wst } C + \text{dost } A; \end{aligned}$$

te wartości wprowadzone w poprzedzające zrównanie, zamieniają je na $-2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} A \cdot \text{dost}(b+c) - \text{dost } A =$
 $= 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} a \cdot \text{dost}(B-C) - \text{dost } a$; za $-\text{dost } A$ włożywszy
 iego wartość $-1 + 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} A$, za $-\text{dost } a$, $-1 + 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} a$,
 zamieni się na

$$\text{wst}^{2\frac{1}{2}} A [1 - \text{dost}(b+c)] = \text{wst}^{2\frac{1}{2}} a [\text{dost}(B-C) + 1]:$$

aże

$$\begin{aligned} 1 - \text{dost}(b+c) &= 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} (b+c), \\ 1 + \text{dost}(B-C) &= 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} (B-C); \end{aligned}$$

więc

$$\frac{\text{wst}^{1\frac{1}{2}}(b+c)}{\text{wst}^{1\frac{1}{2}} a} = \frac{\text{dost}^{1\frac{1}{2}}(B-C)}{\text{wst}^{1\frac{1}{2}} A} \quad \text{II.}$$

Potrzebie: Wprowadźmy w zrównanie (β_1) za $\text{dost } A$, $\text{dost } a$, następujące wartości]

$$\text{dost } A = 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} A - 1; \quad \text{dost } a = 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} a - 1;$$

zamieniemy je na

$$\begin{aligned} -\text{dost}(b+c) + 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} A \cdot \text{dost } b \cdot \text{dost } c = \\ = \text{dost}(B-C) - 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} a \cdot \text{dost } B \cdot \text{dost } C: \end{aligned}$$

a ponieważ

$$\begin{aligned} -\text{dost}(b+c) &= 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} A \cdot \text{wst } b \cdot \text{wst } c - \text{dost } a, \\ \text{dost}(B-C) &= 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} a \cdot \text{wst } B \cdot \text{wst } C - \text{dost } A; \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} A \cdot \operatorname{dost}(b-c) + \operatorname{dost} A &= \\ = -2 \operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{dost}(B+C) + \operatorname{dost} a: \end{aligned}$$

$2 \operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} A [1 + \operatorname{dost}(b-c)] = 2 \operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} a [1 - \operatorname{dost}(B+C)]$:
skąd wypadnie

$$\frac{\operatorname{dost} \frac{1}{2}(b-c)}{\operatorname{dost} \frac{1}{2} a} = \frac{\operatorname{wst} \frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{dost} \frac{1}{2} A} \quad \text{III.}$$

Poczwarte: W równaniu (β_1) nadamy na koniec $\operatorname{dost} A$, $\operatorname{dost} a$, następujące wartości

$\operatorname{dost} A = 1 - 2 \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} A$, $\operatorname{dost} a = 2 \operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} a - 1$: za
 $\operatorname{wst} b \cdot \operatorname{wst} c + \operatorname{dost} b \cdot \operatorname{dost} c$, położmy $2 \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} A \cdot \operatorname{wst} b \cdot \operatorname{wst} c$
 $+ \operatorname{dost} a$; potem za $\operatorname{wst} b \cdot \operatorname{wst} c - \operatorname{dost} b \cdot \operatorname{dost} c =$
 $= -\operatorname{dost}(b+c)$: zrobmy to samo w drugiej stronie
równania z funkcją kątów B, C ; wypadnie

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} A \cdot \operatorname{dost}(b+c) + \operatorname{dost} A &= \\ = -2 \operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{dost}(B+C) - \operatorname{dost} a: \end{aligned}$$

tu znowu za $\operatorname{dost} A$, $\operatorname{dost} a$, gdy będą wprowadzone
te same wyżej położone wartości, równanie to za-
mieni się na

$$\operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} A [1 + \operatorname{dost}(b+c)] = \operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} a [1 + \operatorname{dost}(B+C)],$$

przeto

$$\frac{\operatorname{dost} \frac{1}{2}(b+c)}{\operatorname{dost} \frac{1}{2} a} = \frac{\operatorname{dost} \frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{wst} \frac{1}{2} A} \quad \text{IV.}$$

Nic nie może być prostszego, iak równania I, II,
III, IV, z których każde wyraża związek między
wszystkimi bokami i wszystkimi kątami trójkąta
kulistego. Podał je naprzód *Delambre* w książce
Connaissance des tems 1809. k. 45. która wyszła ro-
ku 1807. ale bez żadnego dowodu. Potem *Gauss*

w dziele swoim *Theoria Motus Corporum coelestium* wydaném r. 1809. na k. 51. ogłosił te zrównania, iako dotąd w Geometrii nieznane; ale także bez żadnego dowodu; i użył ich do ważnych zagadnień astronomicznych. Doszło mnie dzieło Gaussa na początku roku 1811: w niem wspomniane zrównania uderzyły mnie i swoją prostotą, i swoim użyciem. Szukałem zaraz ich dowodu, i ten znalazłszy tak, iak tu jest wyłożony, posłałem go Akademii nauk Petersburskiej 24. Marca 1811 roku. W *Connoissance des tems 1812.* upomniał się *Delambre* przeciwko zdaniu *Gaussa*, o te zrównania, iako przez siebie naprzód podane; ale ich dowodu nie wydał. Dopiero w wielkiem i wyborném swém dziele astronomii, wydaney w Paryżu roku 1814. w tomie I. k. 161..163. dowodzi tych zrównań *Delambre* cale innym sposobem, wyciągając ie z analogii *Nepera*; co robi i rachunek zawilszym, i dowód ubocznym. Rachunek mój pokazuje, że zrównania te wypadają ze zrównania *Cagnoli*, dwie wartości na dost A , kombinując z dwiema wartościami na dost a : czyli ogólniey, dwie wartości na dostawę kąta, kombinując z dwiema wartościami na dostawę boku temuż kątowi przeciwległego; co stanowi dowód i wprost idący (*demonstratio directa*), i ogólny: bo każde zrównanie *Cagnoli* biorąc kąt w pierwszej stronie przez dostawę wyrażony, i dostawę boku temu kątowi przeciwległego w drugiej stronie zrównania będącą, i postępując sposobem tu skazanym: każde mówię zrównanie *Cagnoli* wyda cztery podobne zrównania. I tak zrównanie (β_2) wyda:

$$\frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\frac{1}{2}c} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{dost}\frac{1}{2}C}; \quad \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{wst}\frac{1}{2}c} = \frac{\text{dost}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\frac{1}{2}C}$$

$$\frac{\text{dost}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{dost}\frac{1}{2}c} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{dost}\frac{1}{2}C}; \quad \frac{\text{dost}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{dost}\frac{1}{2}c} = \frac{\text{dost}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{wst}\frac{1}{2}C}$$

zrównanie trzecie (β_3) przyprowadzi nas do czterech następujących:

$$\frac{\text{wst}_{\frac{1}{2}}(a-c)}{\text{wst}_{\frac{1}{2}}b} = \frac{\text{wst}_{\frac{1}{2}}(A-C)}{\text{dost}_{\frac{1}{2}}B}; \quad \frac{\text{wst}_{\frac{1}{2}}(a+c)}{\text{wst}_{\frac{1}{2}}b} = \frac{\text{dost}_{\frac{1}{2}}(A-C)}{\text{wst}_{\frac{1}{2}}B};$$

$$\frac{\text{dost}_{\frac{1}{2}}(a-c)}{\text{dost}_{\frac{1}{2}}b} = \frac{\text{wst}_{\frac{1}{2}}(A+C)}{\text{dost}_{\frac{1}{2}}B}; \quad \frac{\text{dost}_{\frac{1}{2}}(a+c)}{\text{dost}_{\frac{1}{2}}b} = \frac{\text{dost}_{\frac{1}{2}}(A+C)}{\text{wst}_{\frac{1}{2}}B};$$

gdzie zawarte są wszystkie kombinacye boków i kątów: co jest skutkiem dowodzenia ogólnego i wprost wyciągniętego ze swego właściwego początku. Chcąc jeszcze to dowodzenie zrobić krótszem i prostszem, wpadłem na zrównanie (α_1) w § 2: alełm pojedynczo zrównań *Delambra* otrzymać nie mógł. Widzimy bowiem, że iedno zrównanie (α_1) iest mnogością II przez III, drugie (α_1) iest I \times IV.

Chociaż w trójkącie kulistym ani żaden bok, ani żaden kąt nie może być większy od 180° , ani nawet im równy; iednakże trafić się czasem mogą kąty odjemne; kąta odjemnego zawsze wstawa iest odjemna; zrównanie I. $\frac{\text{dost}_{\frac{1}{2}}A}{\text{wst}_{\frac{1}{2}}a} = \frac{\text{wst}_{\frac{1}{2}}(B-C)}{\text{wst}_{\frac{1}{2}}(b-c)}$ pokazuje, że ponieważ pierwsza strona tego zrównania iest istotnie dodatna, druga strona takąż być musi; więc $B-C$ iest tego samego gatunku, co $b-c$, to iest, albo obadwa dodatne, albo obadwa odjemne: więc kiedy $B > C$ musi być $b > c$, i kiedy $B < C$, także $b < c$: to iest, w każdym trójkącie kulistym *bok większy leży naprzeciw kąta większego, a bok mniejszy naprzeciw kąta mniejszego, i odwrotnie, kąt większy ma naprzeciw siebie bok większy etc.* Zrównanie II uczy nas, że różnica dwóch kątów; a zrównanie III że różnica dwóch boków iest zawsze mniejsza od 180° ; co iest rzeczą oczywistą. Zrównanie nako-

nec IV. dowodzi, że summa dwóch kątów, i summa dwóch boków przeciwległych tymże kątom, są zawsze iednego gatunku, to iest albo obiedwie większe, albo obiedwie mnieysze od 180° .

Analogiie Nepera.

§ 7. Jeżeli rozdzielimy *naprzód* zrównanie I przez II: *powtórę*: III przez IV: *potrzebie* I przez III: *pozwarte* II przez IV; otrzymamy zrównania następujące:

$$\text{sty } \frac{B-C}{2} = \text{dosty } \frac{1}{2} A \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(b-c)}{\text{wst } \frac{1}{2}(b+c)}, \quad (5')$$

$$\text{sty } \frac{B+C}{2} = \text{dosty } \frac{1}{2} A \frac{\text{dost } \frac{1}{2}(b-c)}{\text{dost } \frac{1}{2}(b+c)};$$

$$\text{sty } \frac{b-c}{2} = \text{sty } \frac{1}{2} a \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(B-C)}{\text{wst } \frac{1}{2}(B+C)}, \quad (5'')$$

$$\text{sty } \frac{b+c}{2} = \text{sty } \frac{1}{2} a \frac{\text{dost } \frac{1}{2}(B-C)}{\text{dost } \frac{1}{2}(B+C)};$$

zrównania te nazywają się *Analogiiami Nepera*: za pomocą dwóch pierwszych, ze znanych dwóch boków, i kąta między nimi zawartego, wynaydujemy dwa kąty: za pomocą dwóch ostatnich z dwóch kątów znanych i boku im przyległego, wynaydujemy dwa boki. Ponieważ cztery zrównania I, II, III, IV. dzieląc iedno przez drugie, wydadz mogą sześć więcej: gdyż $\frac{4.3}{2} = 6$ § 23 Algebry: cztery dzielenia odkryły nam analogiie *Nepera*, pozostałe dwa, to iest II przez III, i I przez IV, dają (α_1) § 2. Te zrównania (5') (5'') wypadły ze zrównań wyciągniętych z (β_1) . Odbyte podobne dzielenie ze zrówna-

niami pochodzącemi z (β_2) , (β_3) wyda dwie pary z każdego, a zatem wszystkich, sześć par

$$\text{sty } \frac{A-B}{2} = \text{dosty } \frac{1}{2} C \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst } \frac{1}{2}(a+b)}, \quad (5''')$$

$$\text{sty } \frac{A+B}{2} = \text{dosty } \frac{1}{2} C \frac{\text{dost } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{dost } \frac{1}{2}(a+b)};$$

$$\text{sty } \frac{a-b}{2} = \text{sty } \frac{1}{2} c \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{wst } \frac{1}{2}(A+B)}, \quad (5\text{IV})$$

$$\text{sty } \frac{a+b}{2} = \text{sty } \frac{1}{2} c \frac{\text{dost } \frac{1}{2}(A-B)}{\text{dost } \frac{1}{2}(A+B)};$$

$$\text{sty } \frac{A-c}{2} = \text{dosty } \frac{1}{2} B \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(a-c)}{\text{wst } \frac{1}{2}(a+c)}, \quad (5\text{V})$$

$$\text{sty } \frac{A+c}{2} = \text{dosty } \frac{1}{2} B \frac{\text{dost } \frac{1}{2}(a-c)}{\text{dost } \frac{1}{2}(a+c)};$$

$$\text{sty } \frac{a-c}{2} = \text{sty } \frac{1}{2} b \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(A-C)}{\text{wst } \frac{1}{2}(A+C)}, \quad (5\text{VI})$$

$$\text{sty } \frac{a+c}{2} = \text{sty } \frac{1}{2} b \frac{\text{dost } \frac{1}{2}(A-C)}{\text{dost } \frac{1}{2}(A+C)};$$

te sześć par równań zawierają wszystkie kombinacye boków, i kątów między niemi zawartych, iako to b, c, A ; b, a, C ; a, c, B ; i znowu wszystkich kątów, i boków im przyległych. iako to B, C, a ; A, B, c ; A, C, b . Z któreykolwiek pary wyciąga się równanie

$$\text{sty } \frac{1}{2}(A+B) \text{dost } \frac{1}{2}(a+b) = \text{dosty } \frac{1}{2} C \cdot \text{dost } \frac{1}{2}(a-b)$$

albo

$$\text{sty } \frac{1}{2}(a+b) \text{dost } \frac{1}{2}(A+B) = \text{sty } \frac{1}{2} c \cdot \text{dost } \frac{1}{2}(A-B):$$

każdego tego równania druga strona iest koniecznie

dodatna; bo każdy kąt, i każdy bok mniejszy od 180° , więc i pierwsza strona dodatnią być musi: a zatem: połowa summy dwóch kątów, i połowa summy dwóch boków tym kątom przeciwległych, są zawsze tego samego gatunku: to jest albo obiedwie ostre, albo obiedwie rozwarte.

Przypadki nie objęte Analogiemi Nepera.

§ 8. Zachodzi tu jeszcze taki przypadek: w trójkącie kulistym mając dwa boki b, c , i kąt między nimi zawarty A , iakże wynaleśdź bok trzeci a , za pomocą logarytmów? Przez analogiie Nepera wynayduia się kąty, a dopiero z tych kątów, bok. Jakże wynaleśdź zaraz bok trzeci, nie przechodząc przez kąty?

$$\text{dost } A. \text{wst } b. \text{wst } c = \text{dost } a - \text{dost } b. \text{dost } c,$$

$$\text{a\kern-1pt\zeta e} \quad \text{dost } A = \text{dost}^{2\frac{1}{2}} A - \text{wst}^{2\frac{1}{2}} A;$$

$$(\text{dost}^{2\frac{1}{2}} A - \text{wst}^{2\frac{1}{2}} A) \text{wst } b. \text{wst } c = \text{dost } a - \text{dost } b. \text{dost } c$$

$$(-1 + 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} A) \text{wst } b. \text{wst } c + \text{dost } b. \text{dost } c = \text{dost } a$$

$$\text{dost}(b+c) + 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} A. \text{wst } b. \text{wst } c = \text{dost } a;$$

położmy

$$\text{dost}^{2\frac{1}{2}} A. \text{wst } b. \text{wst } c = \text{wst}^2 u, \quad 2 \text{wst}^2 u = 1 - \text{dost } 2u;$$

$$\text{dost}(b+c) + 1 - \text{dost } 2u = \text{dost } a = 1 - 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} a,$$

więc

$$2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} a = \text{dost } 2u - \text{dost}(b+c)$$

$$= 2 \text{wst} \left(\frac{b+c}{2} + u \right) \text{wst} \left(\frac{b+c}{2} - u \right)$$

$$\text{wst}^{2\frac{1}{2}} a = \sqrt{\text{wst} \left(\frac{b+c}{2} + u \right) \text{wst} \left(\frac{b+c}{2} - u \right)} \quad (m)$$