

chnia kuli dzieli się na taśmy śpiczaste, które się osobno wyciskają, i niemi oblepia się kula wytoczona, lub w formie wylana.

Jeżeli trójkąt kulisty zawierać będzie wszystkie trzy kąty proste, czyli  $A=B=C=90^\circ$ ; będzie  $\text{wst} A = \text{wst} B = \text{wst} C = 1$ ,  $\text{dost} A = \text{dost} B = \text{dost} C = 0$ : co wprowadziwszy w równania (3) § 4, otrzymamy  $\text{dosta} = 0$ ,  $\text{dostb} = 0$ ,  $\text{dostc} = 0$ ; a zatem  $a=b=c=90^\circ$ : więc taki trójkąt będzie równokątnym i równobocznym, i każdy bok równy ćwiartce koła; a przeto wierzchołek każdego kąta będzie biegunem łuku sobie przeciwległego. Cała powierzchnia kuli składa się z ośmiu takowych trójkątów.

### *Trójkąt kulisty ukośno-kątny.*

§ 11. W trójkącie kulistym ukośno-kątnym zachodzi 15 przypadków czyli zadań; na co mamy tyleż równań (1), (2), (3), (4). Z tych atoli cztery tylko są prawdziwie od siebie różne. Dosyćby więc było wymienić te zadania, i skazać w dopiero wspomnionych równaniach te, które na każde zadanie odpowiedź w sobie zawierają. Ale tu zachodzą dwie ważne uwagi: *naprzód* wystawiwszy sobie taki tylko do rozwiązania trójkąt, gdzie każdy kąt, i każdy bok jest mniejszy od  $180^\circ$ : ile razy wartość boku lub kąta szukanego jest wyrażona przez wstawę, odpowiedź jest wątpliwa; bo ta sama wstawa, i z tym samym znakiem zawsze dodatnym, należy równie do boku lub kąta tak ostrego, iak rozwartego. Rozróżnia tylko te kąty dostawa, albo styczna; bo iedna i druga jest dodatna na bok lub kąt ostry; odjemna zaś na kąt lub bok rozwarty. *Powtóre* równania (1), (3), (4), są bardzo niewygodne do rachunku

przez tablice logarytmów, których w praktycznym rozwiązaniu trójkątów zwyczajnie używamy. Terminy bowiem w tych równaniach przez dodanie lub odejmowanie z sobą połączone, okazują nam potrzebę przechodu od logarytmów do liczb im odpowiadających, i od tych znowu powrotu do logarytmów: co nie tylko robotę przedłuża i powiększa, ale nawet oddala wypadki rachunku od wartości ścisłych i prawdziwych. Widzieliśmy w Algebrze § 49, że rachunek tablic logarytmicznych jest tylko przybliżeniem się do prawdy: podobnie rachunek linii trygonometrycznych; więc idąc od logarytmów do liczb, i od liczb wracając do logarytmów, oddalamy się za każdym działaniem od wypadków prawdziwych rachunku. Z tych uwag każdy łatwo zrozumie, że nam potrzeba w rozwiązaniu zagadnień na trójkąt kulisty ukośno-kątny *naprzód* równania (1), (3), (4), przerobić na takie, gdzieby zachodziło samo mnożenie i dzielenie: i tegośmy już dowiedzieli w równaniach (1'), (1''), (1'''); (3'), (3''), (3'''), zostaje nam tylko to samo do zrobienia w (4): *powtórę* trzeba unikać ile można wstaw, w wyrazie kąta, lub łuku nieznanego.

**Zadanie I.** W trójkącie ukośno-kątnym mając wszystkie trzy boki znane, wyznaleśdź kąty.

To zadanie rozwiązują w § 2 trzy równania (1'), (1''), (1'''), gdzie połowa każdego kąta jest wyrażona przez styczną koniecznie dodatnią; bo każdy kąt mniejszy od  $180^\circ$ ; a zatem znak odjemny po wyciągnięciu pierwiastku do pytania trygonometrycznego nie należy. Gdyby kąt był bardzo mały, byłoby niebezpieczno wynajdować go przez dostawę; która zbliżając się w swej wartości do promienia, mało się odmienia. Ta sama nieprzyzwoitość zachodzi w wartości wstawy, kiedy kąt bliski  $90^\circ$ . Od tego wszy-

stkiego wolne styczne, i w rozwiązaniu tego zadania nie masz żadney wątpliwości.

*Zadanie II.* Znając trzy kąty, wynaleśdź boki.

W § 4 zrównania (3'), (3''), (3''') zupełnie to zadanie rozwiązują. Tu zachodzą te same uwagi, co w zadaniu (I); i nie masz żadney o kącie wątpliwości. W praktycznych rachunkach prawie nigdy na to zadanie nie wpadamy.

*Zadanie III.* Znając dwa boki i kąt między nimi zawarty, wynaleśdź dwa kąty, i bok trzeci.

To zadanie najczęściej zachodzi w *Astronomii*; i co do wynalezienia kątów rozwiązanie się przez (5'), (5''), (5v), analogiie *Nepera* w § 6. Mając połowę summy i połowę różnicy dwóch kątów, te dodane do siebie dają kąt większy, odciagnione zaś od siebie dają kąt mniejszy.

Bok trzeci wynaleśdź się może przez wstawy za pomocą (2) w § 3, albo też za pomocą zrównań (1) przez sposób następujący. Zrównanie pierwsze (1) daie

$$\begin{aligned} \text{dost } a &= \text{dost } A. \text{wst } b. \text{wst } c + \text{dost } b. \text{dost } c \\ &= \text{dost } c (\text{dost } b + \text{dost } A. \text{sty } c. \text{wst } b) \\ &= \text{dost } c (\text{dost } b + \text{sty } \varphi. \text{wst } b) \\ &= \frac{\text{dost } c}{\text{dost } \varphi} (\text{dost } b. \text{dost } \varphi + \text{wst } b. \text{wst } \varphi) \\ &= \frac{\text{dost } c}{\text{dost } \varphi} \text{dost } (b - \varphi): \end{aligned}$$

położyliśmy  $\text{dost } A. \text{sty } c = \text{sty } \varphi$ , skąd wypadło

$\text{dost } a = \frac{\text{dost } c}{\text{dost } \varphi} \text{dost } (b - \varphi)$ : kąt  $\varphi$  zowie się u *analistów* *kątem posilkowym* (*angulus auxiliaris*). Zo-

baczmy co on znaczy. Zrównanie  $\text{dost } A.\text{sty } c = \text{sty } \varphi$  jest zrównaniem ( $e$ ) na trójkąt prostokątny § 9, gdzie  $c$  jest przeciwprostokątną. Więc w trójkącie ukośnokątnym  $ABC$ , z kąta  $B$  na bok mu przeciwległy  $b$  spuściwszy łuk pionowy, ten rozdzieli bok  $b$  na dwa odcinki, to jest na  $\varphi$  przyległy kątowi  $A$ , albo bokowi  $c$ ; i na  $b - \varphi$  przyległy kątowi  $C$ , albo bokowi  $a$ . Zrównanie  $\frac{\text{dost } c}{\text{dost } a} = \frac{\text{dost } \varphi}{\text{dost } (b - \varphi)}$  uczy nas, że się mają dostawy boków, iak dostawy odcinków tym bokom przyległych: co się nazywa *prawidłem dostaw*. Widzimy więc, że przybieranie od analistów kąta posiłkowego, jest to częstokroć rozdzieleniem trójkąta ukośnokątnego na dwa trójkąty prostokątne przez spuszczenie łuku pionowego.

Ale ieszcze z dwóch boków i kąta między niemi zawartego, można zaraz wynaleśdź bok trzeci przez zrównania ( $m$ ), ( $n$ ), ( $r$ ), ( $s$ ) § 8: każde z tych zrównań da nam te same wypadki, byleby bok nie był barzo mały; bo by w tym razie nie można użyć zrównania ( $n$ ): na kąt znowu wątpliwy nie przyda się ( $m$ ): ale zrównania ( $r$ ), ( $s$ ) mogą ułatwić i wątpliwość łuku, i dadź wypadki dokładne. Wynalazłszy za pomocą tych zrównań bok trzeci trójkąta, i mając już ieden kąt, możemy bez użycia analogii *Nepera* wynaleśdź drugie dwa kąty za pomocą dość prostych zrównań ( $1$ ), ( $1_{\text{m}}$ ) ( $1_{\text{m}}$ ) w § 2: i tu się pokazuje, iak te zrównania są w trygonometrii pożyteczne.

*Zadanie IV.* Znając dwa kąty, i bok im przyległy; wynaleśdź dwa boki, i kąt trzeci.

W rozwiązaniu tego zadania na wynalezienie boków służą *Analogie Nepera* w § 6 ( $5''$ ), ( $5\text{IV}$ ), ( $5\text{VI}$ ): kąt trzeci wynayduie się przez zrównania ( $2$ ) w § 3.

albo też za pomocą zrównań (3) § 4 sposobem następującym:

$$\text{dost } A = \text{dost } a \cdot \text{wst } B \cdot \text{wst } C - \text{dost } B \cdot \text{dost } C,$$

$$\frac{\text{dost } A}{\text{dost } C} = \text{dost } a \cdot \text{sty } C \cdot \text{wst } B - \text{dost } B;$$

niech będzie

$$\text{dost } a \cdot \text{sty } C = \text{dost } x = \frac{\text{dost } x'}{\text{wst } x};$$

$$\frac{\text{dost } A}{\text{dost } C} = \frac{\text{wst } B \cdot \text{dost } x - \text{dost } B \cdot \text{wst } x}{\text{wst } x} = \frac{\text{wst } (B - x)}{\text{wst } x}$$

a zatem kąt trzeci

$$\text{dost } A = \frac{\text{dost } C \cdot \text{wst } (B - x)}{\text{wst } x}.$$

Tu znowu widzimy, że zrównanie na kąt pośilkowy  $\text{dost } a \cdot \text{sty } C = \text{dost } x$ , jest zrównaniem (c) na trójkąt prostokątny kulisty; gdzie  $a$  jest przeciwprostokątną; i z kąta  $B$  spuściwszy łuk pionowy, ten podzieli kąt  $B$  na dwa odcinki, z których odcinek przyległy bokowi  $a$ , jest  $x$ . W rozwiązaniu tego zadania nie masz wątpliwego.

Z dwóch kątów i boku między niemi położonego, możemy natychmiast wynaleść kąt trzeci przez zrównania (p), (q), (t), (u), § 8. Mając zaś wszystkie trzy kąty w trójkącie i jeden bok, możemy wynaleść dwa inne boki przez zrównania (3<sub>i</sub>), (3<sub>ii</sub>), (3<sub>iii</sub>) § 4. Tu znowu widzimy iak te nowe zrównania są w trygonometrii przydatne.

*Zadanie V.* Mając dwa boki i kąt iednemu przeciwległy, wynaleść dwa kąty, i bok trzeci.

To zadanie rozwiązuja nam równania (4) § 5, z których każde zamyka dwa boki i dwa kąty, a jeden z tych kątów jest przeciwległy jednemu z boków. Pierwsze n. p. (4) zamyka  $a, c, A$ ; i można z niego wyciągnąć  $B$ ; drugie ma  $a, b, A$ ; i można z niego wynaleźć  $C$ ; więc pierwsza część zadania co do wyznaczenia kątów zdaie się ułatwiona. Ale iak w pierwszym równaniu  $B$ , tak w drugim równaniu  $C$ , jest wyrażone przez wstawę i dostawę razem; więc nie można ich rozwiązać, tylko trzeba każdy kąt szukany, przez tę samą linią trygonometryczną wyrazić; a zatem albo wstawę zamienić na dostawę; albo dostawę zamienić na wstawę. Aże  $\text{wst} C = \sqrt{1 - \text{dost}^2 C}$ ,  $\text{dost} C = \sqrt{1 - \text{wst}^2 C}$ . Będziemy więc mieli równanie 28° stopnia. Dwa pierwiastki tego równania zrobią wątpliwość, który z nich do naszego zadania należy? Rozwiązanie więc tego zadania jest przypadkiem w trygonometrii *wątpliwym*. I chociaż przez sztukę rachunkową możemy uniknąć równania 28° stopnia, wszelako wypadki nie przestaną byźd wątpliwe: iak się o tém zaraz przekonamy: Weźmy pod uwagę drugie (4):

$$\text{dosty } a = \text{dosty } b \cdot \text{dost } C + \frac{\text{dosty } A}{\text{wst } b} \text{wst } C;$$

położmy

$$\frac{\text{dosty } A}{\text{dost } b} = \text{sty } x,$$

$$\text{dosty } a = \text{dosty } b (\text{dost } C + \text{sty } x \cdot \text{wst } C)$$

$$= \frac{\text{dosty } b}{\text{dost } x} \text{dost } (C - x);$$

więc

$$\text{dost}(C - x) = \frac{\text{dosty } a \cdot \text{dost } x}{\text{dosty } b} = \text{dost}(x - C).$$

$C - x + x = x - (x - C) = C$ : może więc kąt ten mieć dwie wartości; bo dostawa kąta tak dodatniego jak ujemnego, jest dodatnią: kąt pośilkowy  $x$  wypada ze zrównania (c) § 9, gdzie  $b$  jest przeciwprostokątną. Łuk pionowy rozdzielił kąt  $C$  na dwa odcinki, z których  $x$  jest odcinkiem przyległym bokowi  $b$ . Podobnie znajdziemy, położwszy

$$\frac{\text{dosty } A}{\text{dost } c} = \text{sty } x,$$

$$\text{dost}(B - x) = \frac{\text{dosty } a \cdot \text{dost } x}{\text{dosty } c}.$$

Bok trzeci wynayduie się przez wstawy za pomocą zrównań (2) § 3, albo przez prawidło dostaw wyłożone w zadaniu III terażniejszego §. W pierwszym przypadku gdyby były znane  $a, b, A$  wypada znaleźć  $c$  z (1):

$$\begin{aligned} \text{dost } c &= \text{dost } C \cdot \text{wst } a \cdot \text{wst } b + \text{dost } a \cdot \text{dost } b \\ &= \text{dost } b \cdot [\text{dost } C \cdot \text{sty } b \cdot \text{wst } a + \text{dost } a]: \end{aligned}$$

a położwszy

$$\text{dost } C \cdot \text{sty } b = \text{sty } x,$$

będzie

$$\text{dost } c = \frac{\text{dost } b}{\text{dost } x} \text{ dost}(a - x).$$

W drugim przypadku znane są  $A, a, c$ , potrzeba wyznaleźć  $b$ . Położwszy  $\text{dost } B \cdot \text{sty } c = \text{sty } x$ , otrzymamy

$$\text{dost } b = \frac{\text{dost } c}{\text{dost } x} \text{ dost}(a - x).$$

**Zadanie VI.** Mając dwa kąty i bok iednemu kątowi przeciwległy, wynaleźć dwa boki, i kąt trzeci.



Zadanie to rozwiązuje się iak poprzedzające za pomocą zrównań (4) § 5, gdzie bok kątowi danemu przyległy, iest wyrażony przez wstawę i dostawę razem; a zatém może mieć dwie wartości, i zrobić wypadek wątpliwy, dla przyczyn tych samych, które się wyłożyły w poprzedzającym zadaniu. Maiąc n. p.  $A, C, a$  wynależdź  $b, c, B$ . Zrównanie (4') daie

$$\frac{\text{dosty } a}{\text{dost } C} \text{ wst } b - \text{dost } b = \text{sty } C. \text{dosty } A;$$

położmy

$$\frac{\text{dosty } a}{\text{dost } C} = \text{dosty } x,$$

$$\frac{\text{wst } b. \text{dost } x - \text{wst } x. \text{dost } b}{\text{wst } x} = \text{sty } C. \text{dosty } A,$$

$$\text{wst } (b - x) = \text{wst } x. \text{sty } C. \text{dosty } A.$$

gdzie  $b - x$  może być łukiem ostrym lub rozwartym. Podobną wartość wyciągniemy na  $c$  z pierwszego zrównania (4) znając kąt  $B$ , i położymy

$$\frac{\text{dosty } a}{\text{dost } B} = \text{dosty } x = \frac{\text{dost } x}{\text{wst } x},$$

$$\text{wst } (c - x) = \text{wst } x. \text{sty } B. \text{dosty } A.$$

Wszystkie kombinacye iakie zachodzić mogą między kątami i bokiem przeciwległym, dadzą się wyciągnąć z reszty zrównań (4). Co do kąta trzeciego n. p.  $B$ , ten wyciągnąć można albo ze zrównań (2) § 3, za pomocą wstaw; albo ze zrównań (3) w § 4, sposobem następującym:

$$\text{dost } B = \text{dost } b. \text{wst } A. \text{wst } C - \text{dost } A. \text{dost } C,$$

$$\frac{\text{dost } B}{\text{dost } A} = \text{dost } b. \text{sty } A. \text{wst } C - \text{dost } C; \text{dost } b. \text{sty } A = \text{dosty } x,$$



$$\text{dost } B = \frac{\text{dost } A \cdot \text{wst}(C - x)}{\text{wst } x}.$$

Przypadki wątpliwe, które zachodzą w dwóch ostatnich zadaniach, ułatwiają się albo przez warunki pytania, albo przez własności ogólne trójkątów kulistych, a naybarzniej przez tę: że bok większy leży naprzeciwko kąta większego; i kąt większy ma sobie przeciwległy bok większy. Kąty nawet inne towarzyszące sobie, albo od siebie zawisłe wiele pomagają do zniesienia wątpliwości. Ułatwia ją nakoniec rachunek analityczny wykonany na różnych zrównaniach, przez inne linie trygonometryczne tenże sam łuk lub kąt dających. Dla tego barzo jest rzeczą w podobnych zadaniach pożyteczną, mieć nie iedno zrównanie na ten sam łuk, lub kąt wyrażony przez różne linie trygonometryczne.

### *Rozciągnięcie nauki o trójkątach kulistych, i prawidło na znaki.*

§ 12. Przebiegliśmy wszystkie zadania w rozwiązaniu trójkąta kulistego zachodzić mogące, i podaliśmy prawidła iak przez dowiedzione zrównania ze trzech rzeczy znanych, wynayduie się reszta. W trójkącie prostokątnym dosyć nam iest znać dwie rzeczy; bo kąt prosty iest trzecią znaną. A lubo w trygonometrii każdy bok, i każdy kąt uważa się iako mniejszy od  $180^\circ$ ; w pytaniach atoli astronomicznych zachodzą łuki i kąty, które się ciągną od  $0^\circ$  do  $360^\circ$ . Szukając odpowiedzi na takowe pytania przez trygonometrią kulistą, otrzymujemy łuki i kąty, które albo są przepełnieniem  $180^\circ$ , i należą do trzeciej; albo dopełnieniem do  $360^\circ$ , i należą do czwartej ćwiartki koła. Otrzymany z rachunku kąt dodaiemy do  $180^\circ$



$$2 \operatorname{sty} \frac{1}{2} x = \operatorname{sty} x (1 - \operatorname{sty}^2 \frac{1}{2} x); \quad \operatorname{sty} \frac{1}{2} x \cdot \operatorname{dost} \frac{1}{2} x = \operatorname{wst} \frac{1}{2} x,$$

$$\operatorname{wst} x = 2 \operatorname{wst} \frac{1}{2} x \operatorname{dost} \frac{1}{2} x = 2 \operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} x \cdot \operatorname{sty} \frac{1}{2} x;$$

ażé

$$\operatorname{se} \frac{1}{2} x = \frac{1}{\operatorname{dost} \frac{1}{2} x} = \sqrt{1 + \operatorname{sty}^2 \frac{1}{2} x};$$

więc

$$\operatorname{wst} x = \operatorname{dost} x \cdot \operatorname{sty} x = \frac{\operatorname{sty} x (1 - \operatorname{sty}^2 \frac{1}{2} x)}{1 + \operatorname{sty}^2 \frac{1}{2} x},$$

czyli

$$\operatorname{dost} x = \frac{1 - \operatorname{sty}^2 \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{sty}^2 \frac{1}{2} x}.$$

Niech będzie

$$\operatorname{dost} x = a = \frac{1 - \operatorname{sty}^2 \frac{1}{2} x}{1 + \operatorname{sty}^2 \frac{1}{2} x};$$

rozwiązawszy to równanie, otrzymamy

$$\operatorname{sty}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 - a}{1 + a}.$$

Każdą więc dostawę wyrazić potrafimy przez styczną:  
n. p. w § 9 na trójkąt prostokątny znaleźliśmy

$$\operatorname{dost} a = \operatorname{dost} b \cdot \operatorname{dost} c,$$

więc

$$\operatorname{sty}^2 \frac{1}{2} a = \frac{1 - \operatorname{dost} b \cdot \operatorname{dost} c}{1 + \operatorname{dost} b \cdot \operatorname{dost} c}.$$

W tymże § pod przypadkiem III.

$$\operatorname{dost} a = \operatorname{dost} B \cdot \operatorname{dost} C;$$

więc

$$\operatorname{sty}^2 \frac{1}{2} a = \frac{1 - \operatorname{dost} B \cdot \operatorname{dost} C}{1 + \operatorname{dost} B \cdot \operatorname{dost} C} = \frac{-\operatorname{dost} (B + C)}{\operatorname{dost} (C - B)}.$$

Ponieważ kąta odjemnego dostawa jest dodatna; równanie ostatnie uczy nas, że w trójkącie prostokątnym kulistym, summa dwóch kątów ukośnych jest

zawsze większa od kąta prostego, co już wiemy skądinąd. To jeszcze ostatnie zrównanie uczy nas, że bylebyśmy wiedzieli sumę i różnicę dwóch kątów ukośnych w trójkącie prostokątnym, wynajdziemy przeciwprostokątną. Ponieważ

$$\text{wst } x = 2 \text{ dost}^{\frac{1}{2}} x \text{ sty}^{\frac{1}{2}} x$$

$$\text{dost}^{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{\text{sie}^{\frac{1}{2}} x} = \frac{1}{1 + \text{sty}^{\frac{1}{2}} x};$$

więc

$$\text{wst } x = \frac{2 \text{ sty}^{\frac{1}{2}} x}{1 + \text{sty}^{\frac{1}{2}} x}.$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \text{sie } x - 1 &= \frac{1}{\text{dost } x} - 1 = \frac{1 - \text{dost } x}{\text{dost } x} = \frac{2 \text{ wst}^{\frac{1}{2}} x}{\text{dost } x} \\ &= \frac{\text{wst } x}{\text{dost } x} \cdot \frac{\text{wst}^{\frac{1}{2}} x}{\text{dost}^{\frac{1}{2}} x} = \text{sty } x \cdot \text{sty}^{\frac{1}{2}} x; \end{aligned}$$

mamy bowiem

$$2 \text{ wst}^{\frac{1}{2}} x \text{ dost}^{\frac{1}{2}} x = \text{wst } x, \quad 2 \text{ wst}^{\frac{1}{2}} x = \frac{\text{wst } x}{\text{dost}^{\frac{1}{2}} x};$$

$$\text{sty}^{\frac{1}{2}} x = \frac{\text{sie } x - 1}{\text{sty } x};$$

$$\frac{\text{wst } a + \text{wst } b}{\text{wst } a - \text{wst } b} = \frac{\text{sty}^{\frac{1}{2}}(a + b)}{\text{sty}^{\frac{1}{2}}(a - b)} \quad \S 54 \text{ Algebry.}$$

Kiedy więc  $a = 90^\circ$ ,  $\text{wst } a = 1$ , i zrównanie to zamieni się na

$$\frac{1 + \text{wst } b}{1 - \text{wst } b} = \frac{\text{sty}(45^\circ + \frac{1}{2}b)}{\text{sty}(45^\circ - \frac{1}{2}b)} = \text{sty}^2(45^\circ + \frac{1}{2}b);$$

$$\frac{1 - \text{wst } b}{1 + \text{wst } b} = \frac{\text{sty}(45^\circ - \frac{1}{2}b)}{\text{sty}(45^\circ + \frac{1}{2}b)} = \text{sty}^2(45^\circ - \frac{1}{2}b);$$

gdym

$$\text{sty}(45^\circ + \frac{1}{2}b) \cdot \text{sty}(45^\circ - \frac{1}{2}b) = 1,$$

a zatem

$$\frac{1}{\text{sty}(45^\circ - \frac{1}{2}b)} = \text{sty}(45^\circ + \frac{1}{2}b):$$

$$\text{wst } 45^\circ = \text{dost } 45^\circ; \text{ wst}^2 45^\circ + \text{dost}^2 45^\circ = 2\text{wst}^2 45^\circ = 2\text{dost}^2 45^\circ = 1:$$

więc

$$\text{wst } 45^\circ = \text{dost } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\text{wst } b = 2 \text{ wst } \frac{1}{2}b \cdot \text{dost } \frac{1}{2}b; \text{ wst}^2 \frac{1}{2}b + \text{dost}^2 \frac{1}{2}b = 1:$$

więc

$$(1 + \text{wst } b)^{\frac{1}{2}} = \text{dost } \frac{1}{2}b + \text{wst } \frac{1}{2}b:$$

i podobnie

$$(1 - \text{wst } \frac{1}{2}b)^{\frac{1}{2}} = \text{dost } \frac{1}{2}b - \text{wst } \frac{1}{2}b,$$

$$\text{sty}(45^\circ + y) = \frac{1 + \text{sty } y}{1 - \text{sty } y}.$$

Niech będzie

$$\text{sty } y = \frac{a}{b}, \quad 1 + \text{sty } y = \frac{a+b}{b}, \quad 1 - \text{sty } y = \frac{b-a}{b};$$

a zatem

$$\frac{b+a}{b-a} = \frac{1 + \text{sty } y}{1 - \text{sty } y} = \text{sty}(45^\circ + y).$$

III. W § 51 Algebry zrównania ( $\beta$ ) dowodzą; że

$$2 \text{ wst } x \cdot \text{wst } y = \text{dost}(x-y) - \text{dost}(x+y);$$

a zatem

$$2 \text{ wst } A \cdot \text{wst}(C-B) = \text{dost}(A+B-C) - \text{dost}(A+C-B)$$

$$2 \text{ wst } B \cdot \text{wst}(A-C) = \text{dost}(B+C-A) - \text{dost}(A+B-C)$$

$$2 \text{ wst } C \cdot \text{wst}(B-A) = \text{dost}(A+C-B) - \text{dost}(B+C-A)$$

więc

$$\text{wst } A \cdot \text{wst}(C-B) + \text{wst } B \cdot \text{wst}(A-C) + \text{wst } C \cdot \text{wst}(B-A) = 0 \quad (a).$$

I znowu tenże § 51 Algebry uczy, że:

$$2 \text{ dost } x \cdot \text{wst } y = \text{wst}(x+y) - \text{wst}(x-y),$$

a zatem

$$2 \text{ dost } A \cdot \text{wst}(C-B) = \text{wst}(A+C-B) - \text{wst}(A+B-C)$$

$$2 \text{ dost } B \cdot \text{wst}(A-C) = \text{wst}(A+B-C) - \text{wst}(B+C-A)$$

$$2 \text{ dost } C \cdot \text{wst}(B-A) = \text{wst}(B+C-A) - \text{wst}(A+C-B);$$

więc

$$\text{dost } A \cdot \text{wst}(C-B) + \text{dost } B \cdot \text{wst}(A-C) + \text{dost } C \cdot \text{wst}(B-A) = 0 \quad (b).$$

Zrównania (a) i (b) podał *Gauss* bez żadnego dowodu *Theoria motus* p. 82; które zachodzą między trzema iakiemikolwiek kątami. Z nich wypada

$$\text{sty } A = \frac{\text{wst } B \cdot \text{wst}(C-A) + \text{wst } C \cdot \text{wst}(A-B)}{\text{dost } B \cdot \text{wst}(C-A) + \text{dost } C \cdot \text{wst}(A-B)} \quad (c).$$

Wystawiwszy sobie trzy boki trójkąta kulistego,  $a, b, c$ , będą także zachodziły podobne trzy zrównania między temi bokami, to jest:

$$\text{wst } a \cdot \text{wst}(c-b) + \text{wst } b \cdot \text{wst}(a-c) + \text{wst } c \cdot \text{wst}(b-a) = 0 \quad (a'),$$

$$\text{dost } a \cdot \text{wst}(c-b) + \text{dost } b \cdot \text{wst}(a-c) + \text{dost } c \cdot \text{wst}(b-a) = 0 \quad (b'),$$

$$\text{sty } a = \frac{\text{wst } b \cdot \text{wst}(c-a) + \text{wst } c \cdot \text{wst}(a-b)}{\text{dost } b \cdot \text{wst}(c-a) + \text{dost } c \cdot \text{wst}(a-b)} \quad (c').$$

*Rozwiązanie równań trygonometrycznych za pomocą kąta nieoznaczonego.*

§ 14. Mając dwie nieznane ilości  $p, Q$ , dane przez dwa równania

$$p \text{ wst } Q = A; \quad p \text{ dost } Q = B;$$

wynaydziemy

$$\text{sty } Q = \frac{A}{B}, \quad p = \frac{A}{\text{wst } Q} = \frac{B}{\text{dost } Q}.$$

Ale mając dwa równania

$$p \text{ wst}(A - P) = a, \quad p \text{ wst}(B - P) = b;$$

gdzie  $p$  i  $P$  są ilości nieznane, które trzeba wynaleźć; możemy prawda przez rozwinięcie tych dwóch równań, i rozdzielenie ich przez siebie przyyśdź do następującej wartości na  $P$

$$\text{sty } P = \frac{a \text{ wst } B - b \text{ wst } A}{a \text{ dost } B - b \text{ dost } A} = \frac{b \text{ wst } A - a \text{ wst } B}{b \text{ dost } A - a \text{ dost } B}.$$

Lecz ogólniejszy sposób na rozwiązanie podobnych równań podają nam (a) i (b) § poprzedzającego. Możemy bowiem w dwóch podanych równaniach

$$p \text{ wst}(A - P) = a, \quad p \text{ wst}(B - P) = b,$$

uważać trzy kąty  $A, B, P$ , między którymi zachodzą takie związki iakie wyrażają równania (a), (b): włożmy w te równania za  $\text{wst}(A - P) = \frac{a}{p}$ ,  $\text{wst}(B - P) = \frac{b}{p}$ ; i żeby otrzymać wszystkie rozmaite wartości iakie mieć mogą  $p, P$ , wprowadźmy kąt nieoznaczony  $H$ , kładąc  $H - A$  za  $A$ ;  $H - B$  za  $B$ ;  $H - P$  za  $P$ . Przez



ten sposób zrównania (a), (b), wezmą następujące wyrażenie:

$$p \text{ wst}(B-A) \text{ wst}(H-P) = b \text{ wst}(H-A) - a \text{ wst}(H-B),$$

$$p \text{ wst}(B-A) \text{ dost}(H-P) = b \text{ dost}(H-A) - a \text{ dost}(H-B).$$

Teraz z różnych przypuszczeń na  $H$ , powstają różne wartości na  $P, p$ ,

Niech będzie  $H = A$ :

$$p \text{ wst}(B-A) \text{ wst}(A-P) = -a \text{ wst}(A-B) = a \text{ wst}(B-A),$$

$$p \text{ wst}(B-A) \text{ dost}(A-P) = b - a \text{ dost}(B-A),$$

czyli

$$p \text{ wst}(A-P) = a, \quad p \text{ dost}(A-P) = \frac{b - a \text{ dost}(B-A)}{\text{wst}(B-A)};$$

$$\text{sty}(A-P) = \frac{a \text{ wst}(B-A)}{b - \text{dost}(B-A)}.$$

Powtóre: Niech będzie  $H = B$

$$p \text{ wst}(B-A) \text{ wst}(B-P) = b \text{ wst}(B-A),$$

$$p \text{ wst}(B-A) \text{ dost}(B-P) = b \text{ dost}(B-A) - a:$$

czyli

$$p \text{ wst}(B-P) = b,$$

$$p \text{ dost}(B-P) = \frac{b \text{ dost}(B-A) - a}{\text{wst}(B-A)};$$

$$\text{sty}(B-P) = \frac{b \text{ wst}(B-A)}{b \text{ dost}(B-A) - a}.$$

*Potrzebie:* Niech będzie  $H = \frac{1}{2}(A+B)$ :

$$p \operatorname{wst}(B-A) \operatorname{wst}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P\right) = (b+a) \operatorname{wst}\frac{1}{2}(B-A),$$

$$p \operatorname{wst}\left(\frac{A+B}{2} - P\right) = \frac{b+a}{2 \operatorname{dost}\frac{1}{2}(B-A)};$$

$$p \operatorname{dost}\left(\frac{A+B}{2} - P\right) = \frac{b-a}{2 \operatorname{wst}\frac{1}{2}(B-A)};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sty}\left(\frac{A+B}{2} - P\right) &= \frac{b+a}{b-a} \operatorname{sty}\frac{1}{2}(B-A) \\ &= \operatorname{sty}(45^\circ + y) \operatorname{sty}\frac{1}{2}(B-A): \end{aligned}$$

kiedy położymy  $\frac{a}{b} = \operatorname{sty} y$ , § 13. II.

Gdybyśmy chcieli znaleźć wartość na  $p$  przez  $a, b$ , nie czekając na rachunek kąta  $P$ ; ponieważ

$$p^2 \operatorname{wst}^2(A-P) + p^2 \operatorname{dost}^2(A-P) = p^2,$$

z dwóch pierwszych przypuszczeń na  $H$ , otrzymamy

$$p \operatorname{wst}(B-A) = \sqrt{[a^2 - 2ab \operatorname{dost}(B-A) + b^2]}.$$

Gdyby przyszło wyznaczać  $p, P$  z dwóch równań

$$p \operatorname{dost}(A-P) = a, \quad p \operatorname{dost}(B-P) = b;$$

można na to użyć wyżej położonych wzorów, ale za  $A$ , trzeba brać  $90^\circ + A$ ; za  $B$ ,  $90^\circ + B$ ; będzie  $A-P = 90^\circ - (P-A)$ ;  $B-P = 90^\circ - (P-B)$ .

Nowy ten sposób rozwiązywania równań trygonometrycznych bardzo może rozlegić w rachunku analitycznym użycie.