

dodatna; bo każdy kąt, i każdy bok mniejszy od 180° , więc i pierwsza strona dodatnią być musi: a zatem: połowa summy dwóch kątów, i połowa summy dwóch boków tym kątom przeciwległych, są zawsze tego samego gatunku: to jest albo obiedwie ostre, albo obiedwie rozwarte.

Przypadki nie objęte Analogiemi Nepera.

§ 8. Zachodzi tu jeszcze taki przypadek: w trójkącie kulistym mając dwa boki b, c , i kąt między nimi zawarty A , iakże wynaleźć bok trzeci a , za pomocą logarytmów? Przez analogie *Nepera* wyznaydują się kąty, a dopiero z tych kątów, bok. Jakże wynaleźć zaraz bok trzeci, nie przechodząc przez kąty?

$$\text{dost } A. \text{wst } b. \text{wst } c = \text{dost } a - \text{dost } b. \text{dost } c,$$

$$\text{a\kern-0.1em\zeta e} \quad \text{dost } A = \text{dost}^{2\frac{1}{2}} A - \text{wst}^{2\frac{1}{2}} A;$$

$$(\text{dost}^{2\frac{1}{2}} A - \text{wst}^{2\frac{1}{2}} A) \text{wst } b. \text{wst } c = \text{dost } a - \text{dost } b. \text{dost } c$$

$$(-1 + 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} A) \text{wst } b. \text{wst } c + \text{dost } b. \text{dost } c = \text{dost } a$$

$$\text{dost}(b+c) + 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} A. \text{wst } b. \text{wst } c = \text{dost } a;$$

położmy

$$\text{dost}^{2\frac{1}{2}} A. \text{wst } b. \text{wst } c = \text{wst}^2 u, \quad 2 \text{wst}^2 u = 1 - \text{dost } 2u;$$

$$\text{dost}(b+c) + 1 - \text{dost } 2u = \text{dost } a = 1 - 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} a,$$

więc

$$2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} a = \text{dost } 2u - \text{dost}(b+c)$$

$$= 2 \text{wst} \left(\frac{b+c}{2} + u \right) \text{wst} \left(\frac{b+c}{2} - u \right)$$

$$\text{wst}^{2\frac{1}{2}} a = \sqrt{\left\{ \text{wst} \left(\frac{b+c}{2} + u \right) \text{wst} \left(\frac{b+c}{2} - u \right) \right\}} \quad (\text{m})$$

i zadanie rozwiązane. Albo

$$(1 - 2 \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} A) \operatorname{wst} b. \operatorname{wst} c + \operatorname{dost} b. \operatorname{dost} c = \operatorname{dost} a = 1 - 2 \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} a;$$

położmy

$$\operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} A. \operatorname{wst} b. \operatorname{wst} c = \operatorname{wst}^2 w, \quad 2 \operatorname{wst}^2 w = 1 - \operatorname{dost} 2w,$$

$$\operatorname{dost}(b - c) + \operatorname{dost} 2w = 2(1 - \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} a) = 2 \operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} a;$$

więc

$$\operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} a = \sqrt{\left\{ \operatorname{dost}\left(\frac{b-c}{2} + w\right) \operatorname{dost}\left(\frac{b-c}{2} - w\right) \right\}} \quad (n).$$

Te dwa równania (m), (n), podał *Mollweide Zeitschrift für Astronomie May, Junius 1816* p. 459 bez żadnego dowodu, który po przeczytaniu tego pisma, wyciągnąłem zaraz ze równania fundamentalnego. Tą samą drogą przyszedłem do rozwiązania następującego zadania: Mając dwa kąty A, B , i bok c między nimi leżący; wynaleśdź kąt trzeci C , nie przechodząc przez boki insze? W § (4) równanie główne (3) daie

$$\begin{aligned} \operatorname{dost} C &= \operatorname{dost} c. \operatorname{wst} A. \operatorname{wst} B - \operatorname{dost} A. \operatorname{dost} B \\ &= (\operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} c - \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} c) \operatorname{wst} A. \operatorname{wst} B - \operatorname{dost} A. \operatorname{dost} B \\ &= (-1 + 2 \operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} c) \operatorname{wst} A. \operatorname{wst} B - \operatorname{dost} A. \operatorname{dost} B \\ &= 2 \operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} c. \operatorname{wst} A. \operatorname{wst} B - \operatorname{dost}(A - B); \end{aligned}$$

położmy

$$\operatorname{dost}^2 \frac{1}{2} c. \operatorname{wst} A. \operatorname{wst} B = \operatorname{wst}^2 x, \quad 2 \operatorname{wst}^2 x = 1 - \operatorname{dost} 2x,$$

$$\operatorname{dost} C = 1 - 2 \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} C = 1 - \operatorname{dost} 2x - \operatorname{dost}(A - B);$$

więc

$$\operatorname{wst}^2 \frac{1}{2} C = \sqrt{\left\{ \operatorname{dost}\left(\frac{A-B}{2} + x\right) \operatorname{dost}\left(\frac{A-B}{2} - x\right) \right\}} \quad (p)$$

i znowu

$$\begin{aligned}\text{dost } C &= (1 - 2 \text{wst}^2 \tfrac{1}{2} c) \text{wst } A \cdot \text{wst } B - \text{dost } A \cdot \text{dost } B \\ &= -\text{dost}(A+B) - 2 \text{wst}^2 \tfrac{1}{2} c \cdot \text{wst } A \cdot \text{wst } B;\end{aligned}$$

położmy

$$\text{wst}^2 \tfrac{1}{2} c \cdot \text{wst } A \cdot \text{wst } B = \text{wst}^2 y, \quad 2 \text{wst}^2 y = 1 - \text{dost } 2y,$$

$$2(1 - \text{wst}^2 \tfrac{1}{2} C) = \text{dost } 2y - \text{dost}(A+B);$$

a zatem

$$\text{dost} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\left\{ \text{wst} \left(\frac{A+B}{2} + y \right) \text{wst} \left(\frac{A+B}{2} - y \right) \right\}} \quad (q)$$

Delambre w Conn. des tems l'an 1820 p. 343. podał także dowód na zrównanie (m), (n); i rozwiązanie przytoczonego tu pytania. Nadto iak w pierwszym przypadku bok, tak w drugim kąt wyraził przez styczną, za pomocą dosyć sztucznego i ciekawego przeobrażenia, które także bez żadnego dowodu przytoczył *Mollweide*. I lubo zrównanie $\frac{(m)}{(n)}$ daie styczną połowy boku trzeciego, gdzie wchodzi dwa kąty u, w , posiłkowe, szukamy atoli bez tych kątów wyrażenia stycznej na bok trzeci a .

$$\begin{aligned}\text{dost } a &= \text{dost } b \cdot \text{dost } c + \text{wst } b \cdot \text{wst } c \cdot \text{dost } A; \quad \text{dost } A = 1 - 2 \text{wst}^2 \tfrac{1}{2} A, \\ &= \text{dost}(b-c) - 2 \text{wst}^2 \tfrac{1}{2} A \cdot \text{wst } b \cdot \text{wst } c,\end{aligned}$$

$$1 - \text{dost } a = 2 \text{wst}^2 \tfrac{1}{2} a = 1 - \text{dost}(b-c) + 2 \text{wst}^2 \tfrac{1}{2} A \cdot \text{wst } b \cdot \text{wst } c,$$

$$1 + \text{dost } a = 2 \text{dost}^2 \tfrac{1}{2} a = 1 + \text{dost}(b-c) - 2 \text{wst}^2 \tfrac{1}{2} A \cdot \text{wst } b \cdot \text{wst } c;$$

więc

$$\begin{aligned}\text{sty}^{2\frac{1}{2}}a &= \frac{1 - \text{dost}(b-c) + 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}}A \cdot \text{wst}b \cdot \text{wst}c}{1 + \text{dost}(b-c) - 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}}A \cdot \text{wst}b \cdot \text{wst}c} \\ &= \frac{2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}}(b-c) + 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}}A \cdot \text{wst}b \cdot \text{wst}c}{2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}}(b-c) - 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}}A \cdot \text{wst}b \cdot \text{wst}c} ;\end{aligned}$$

a dla skrócenia położywszy

$$k = \frac{\text{wst}^{2\frac{1}{2}}A \cdot \text{wst}b \cdot \text{wst}c}{\text{dost}^{2\frac{1}{2}}(b-c)} ;$$

będzie

$$\begin{aligned}\text{sty}^{2\frac{1}{2}}a &= \frac{\text{sty}^{2\frac{1}{2}}(b-c) + k}{1 - k} \\ &= \text{sty}^{\frac{1}{2}}(b-c) \left\{ \frac{\text{sty}^{\frac{1}{2}}(b-c) + k \text{dosty}^{\frac{1}{2}}(b-c)}{1 - k} \right\}\end{aligned}$$

a położywszy, $k \text{dosty}^{\frac{1}{2}}(b-c) = \text{sty} z$, otrzymamy

$$\text{sty}^{2\frac{1}{2}}a = \text{sty}^{\frac{1}{2}}(b-c) \text{sty}[\frac{1}{2}(b-c) + z], \quad (r)$$

gdzie
$$\text{sty} z = \frac{\text{wst}b \cdot \text{wst}c \cdot \text{wst}A \cdot \text{sty}^{\frac{1}{2}}A}{\text{wst}(b-c)} ;$$

jeżeli zaś w zrównanie fundamentalne włożymy za

$$\text{dost}A = -1 + 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}}A,$$

otrzymamy:

$$1 - \text{dost}a = 1 - \text{dost}(b+c) - 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}}A \cdot \text{wst}b \cdot \text{wst}c,$$

$$1 + \text{dost}a = 1 + \text{dost}(b+c) + 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}}A \cdot \text{wst}b \cdot \text{wst}c ;$$

a zatem

$$\begin{aligned}\text{sty}^{2\frac{1}{2}}a &= \frac{1 - \text{dost}(b+c) - 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}}A \cdot \text{wst}b \cdot \text{wst}c}{1 + \text{dost}(b+c) + 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}}A \cdot \text{wst}b \cdot \text{wst}c} \\ &= \frac{\text{wst}^{2\frac{1}{2}}(b+c) - \text{dost}^{2\frac{1}{2}}A \cdot \text{wst}b \cdot \text{wst}c}{\text{dost}^{2\frac{1}{2}}(b+c) + \text{dost}^{2\frac{1}{2}}A \cdot \text{wst}b \cdot \text{wst}c} ,\end{aligned}$$

a nazwawszy

$$k' = \frac{\text{dost}^{2\frac{1}{2}} A. \text{wst } b. \text{wst } c}{\text{dost}^{2\frac{1}{2}} (b+c)},$$

będzie

$$\begin{aligned} \text{sty}^{2\frac{1}{2}} a &= \frac{\text{sty}^{2\frac{1}{2}} (b+c) - k'}{1 + k'} \\ &= \text{sty}^{\frac{1}{2}} (b+c) \left\{ \frac{\text{sty}^{\frac{1}{2}} (b+c) - k' \text{dosty}^{\frac{1}{2}} (b+c)}{1 + k'} \right\} \end{aligned}$$

niech będzie

$$k' \text{dosty}^{\frac{1}{2}} (b+c) = \text{sty } y,$$

a zatem

$$k' = \text{sty } y. \text{sty}^{\frac{1}{2}} (b+c);$$

więc

$$\text{sty}^{2\frac{1}{2}} a = \text{sty}^{\frac{1}{2}} (b+c). \text{sty} [\frac{1}{2} (b+c) - y] \quad (s)$$

gdzie

$$\text{sty } y = \frac{\text{wst } b. \text{wst } c. \text{wst } A. \text{dosty}^{\frac{1}{2}} A}{\text{wst } (b+c)};$$

pomnąc, że

$$2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} A = \text{wst } A. \text{dosty}^{\frac{1}{2}} A.$$

Widzimy więc z rachunku, który nas przywiódł do zrównań (r), (s): że funkcją wzoru $\frac{\text{sty}^2 A \mp k}{1 \pm k}$ zamienia się na wyraz $\text{sty } A. \text{sty} (A \mp z)$; gdy się położy $\text{sty } z = k \text{dosty } A$.

Przeróbmy podobnie zrównania (p), (q): z wartości na $\text{dost } C$ tam przytoczonych: mamy

$$1 - \text{dost } C = 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}} C = 1 + \text{dost } (A-B) - 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} c. \text{wst } A. \text{wst } B$$

$$1 + \text{dost } C = 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} C = 1 - \text{dost } (A-B) + 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}} c. \text{wst } A. \text{wst } B:$$

więc

$$\text{sty}^{2\frac{1}{2}}C = \frac{1 + \text{dost}(A-B) - 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}}c \cdot \text{wst} A \cdot \text{wst} B}{1 - \text{dost}(A-B) + 2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}}c \cdot \text{wst} A \cdot \text{wst} B},$$

a położywszy

$$k = \frac{\text{dost}^{2\frac{1}{2}}c \cdot \text{wst} A \cdot \text{wst} B}{\text{wst}^{2\frac{1}{2}}(A-B)},$$

będzie

$$\begin{aligned} \text{sty}^{2\frac{1}{2}}C &= \frac{\text{dosty}^{2\frac{1}{2}}(A-B) - k}{1 + k} \\ &= \text{dosty}^{\frac{1}{2}}(A-B) \left\{ \frac{\text{dosty}^{\frac{1}{2}}(A-B) - k \text{sty}^{\frac{1}{2}}(A-B)}{1 + k} \right\} \end{aligned}$$

położywszy znowu

$$k \text{sty}^{\frac{1}{2}}(A-B) = \text{sty} z;$$

a zatem

$$k = \text{sty} z \text{dosty}^{\frac{1}{2}}(A-B);$$

otrzymamy

$$\text{sty}^{2\frac{1}{2}}C = \text{dosty}^{\frac{1}{2}}(A-B) \text{dosty}[\frac{1}{2}(A-B) + z] \quad (t):$$

gdzie

$$\text{sty} z = \frac{2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}}c \cdot \text{wst} A \cdot \text{wst} B}{\text{wst}(A-B)},$$

a można jeszcze położyć

$$2 \text{dost}^{2\frac{1}{2}}c = \text{wst} c \cdot \text{dosty}^{\frac{1}{2}}c.$$

Wreszcie z wartości na $\text{dost} C$ prowadzących do zrównania (q) mamy:

$$1 - \text{dost} C = 1 + \text{dost}(A+B) + 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}}c \cdot \text{wst} A \cdot \text{wst} B,$$

$$1 + \text{dost} C = 1 - \text{dost}(A+B) - 2 \text{wst}^{2\frac{1}{2}}c \cdot \text{wst} A \cdot \text{wst} B,$$

skąd

$$\text{sty}^{2\frac{1}{2}}C = \frac{\text{dost}^{2\frac{1}{2}}(A+B) + \text{wst}^{2\frac{1}{2}}c \cdot \text{wst} A \cdot \text{wst} B}{\text{wst}^{2\frac{1}{2}}(A+B) - \text{wst}^{2\frac{1}{2}}c \cdot \text{wst} A \cdot \text{wst} B};$$

a nazwawszy

$$k = \frac{\text{wst}^2 \frac{1}{2} c \text{ wst } A \cdot \text{wst } B}{\text{wst}^2 \frac{1}{2} (A+B)},$$

będzie

$$\begin{aligned} \text{sty}^2 \frac{1}{2} C &= \frac{\text{dosty}^2 \frac{1}{2} (A+B) + k}{1-k} \\ &= \text{dosty} \frac{1}{2} (A+B) \left\{ \frac{\text{dosty} \frac{1}{2} (A+B) + k \text{ sty} \frac{1}{2} (A+B)}{1-k} \right\} \end{aligned}$$

a położywszy

$$k \text{ sty} \frac{1}{2} (A+B) = \text{sty } z,$$

czyli

$$k = \text{sty } z \text{ dosty} \frac{1}{2} (A+B);$$

przydziemy do zrównania

$$\text{sty}^2 \frac{1}{2} C = \text{dosty} \frac{1}{2} (A+B) \cdot \text{dosty} [\frac{1}{2} (A+B) - z] \quad (u)$$

gdzie

$$\text{sty } z = \frac{2 \text{ wst}^2 \frac{1}{2} c \text{ wst } A \cdot \text{wst } B}{\text{wst} (A+B)};$$

a możnaby jeszcze położyć

$$2 \text{ wst}^2 \frac{1}{2} c = \text{wst } c \cdot \text{sty} \frac{1}{2} c.$$

Z tego rachunku znowu się pokazuje, że funkcyja wzoru $\frac{\text{dosty}^2 A \pm k}{1 \mp k}$ może się zamienić na $\text{dosty } A \cdot \text{dosty} (A \mp z)$, kiedy się położy $\text{sty } z = k \text{ sty } A$.

Mamy więc ośm nowych zrównań trygonometrycznych, wyciągniętych ze zrównania fundamentalnego: z których cztery, to jest (m), (n), (r), (s), służą na wynalezienie boku trzeciego, z danych dwóch boków trójkąta, i z kąta między temi bokami za-

wartego: drugie cztery, to jest (p), (q), (t), (u) dają kąt trzeci w trójkącie kulistym z danego boku, i dwóch kątów iemu przyległych. Liczniejsze na ten sam kąt zrównania, są w rachunku trygonometrycznym bardzo potrzebne, i do zniesienia wątpliwości o kącie, i do ściślejszych wypadków na kąty lub łuki albo barzo małe, albo bliskie kąta prostego: iak się o tém później przekonamy.

Te są główne zrównania do których nas uwaga trójkąta kulistego prowadzi, wyciągnięone z iednego zrównania (1). Wszystkie inne dotąd znane, i pod różnemi postaciami w trygonometrii podawane, zawsze prawie są tylko przerobieniem czterech walnych zrównań (1), (2), (3), (4): iakośmy to widzieli na zrównaniach *Cagnoli*, *Delambra*, *Nepera*, i innych.

Trójkąt kulisty prostokątny.

§ 9. Przystósuymy inż tę naukę do wszystkich przypadków zadania trygonometrycznego: z sześciu rzeczy trójkąta kulistego mając trzy znane, wynaleśdź resztę: to jest analitycznie mówiąc, z sześciu ilości A, B, C, a, b, c , wyciągnąć wszystkie kombinacye, biorąc ich po cztery na raz. Tych bydź powinno $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$ § 23 Algebry: ale prawdziwie od siebie różnych nie zachodzi tylko cztery: iak się przekonać możemy z następującego układu:

$$\begin{array}{l} A, B, C, a; \quad a, b, c, A; \quad A, B, a, b; \quad \left\{ \begin{array}{l} a, b, C, A; \quad b, a, C, B; \\ A, B, C, b; \quad a, b, c, B; \quad A, C, a, c; \quad \left\{ \begin{array}{l} a, c, B, A; \quad c, a, B, C; \\ AB, C, c; \quad a, b, c, C; \quad B, C, b, c; \quad \left\{ \begin{array}{l} b, c, A, B; \quad c, b, A, C. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pierwszy przypadek iest, trzy kąty i ieden bok:
drugi przypadek, trzy boki i ieden kąt: *trzeci* przy-

padek dwa kąty i dwa boki im przeciwległe: czwarty przypadek dwa boki i dwa kąty, z których jeden jest przeciwległy, a drugi przyległy: tu wypada sześć kombinacyi, trzy do iednego, trzy do drugiego boku i kąta przyległego, iak nas uczą zrównania (4). Mamy więc cztery że tak powiem klasy i kombinacye zupełnie różne; a pod każdą klasą tyle zrównań podobnych, ile jest kombinacyi tej klassie służących. Zaczniemy od trójkąta prostokątnego, który jest przypadkiem szczególnym zadania, ale ma swoje właściwe cechy.

Przypuśćmy że kąt $A = 90^\circ$; będzie a przeciwprostokątną: $\text{wst } A = 1$, $\text{dost } A = 0$, $\text{sty } A = \frac{1}{0}$, $\text{dosty } A = 0$: wprowadźmy te warunki w zrównania tak fundamentalne, iak główne; będzie

Przypadek I. Zrównanie (1) daie

$$(a) \quad \text{dost } a = \text{dost } b \cdot \text{dost } c:$$

to zrównanie rozwiązuie nam zadanie: w trójkącie prostokątnym mając dwa boki, wynaleśdź trzeci; i razem nas uczy, że w tym trójkącie kiedy dwa boki kąt prosty zawieraiące są albo obadwa mnieysze, albo obadwa większe od 90° ; przeciwprostokątna iest zawsze mnieysza od 90° : albo krócéy; kiedy b, c , są iednego gatunku, zawsze $a < 90^\circ$: kiedy zaś b, c , są różnego gatunku, $a > 90^\circ$: a zatém kiedy przeciwprostokątna z którymkolwiek bokiem iest iednego gatunku; bok drugi iest koniecznie mnieyszy od 90° : kiedy zaś przeciwprostokątna z którymkolwiek bokiem iest różnego gatunku; bok drugi iest koniecznie większy od 90° . To wszystko wspiera się na tym początku: że dostawa kąta ostrego iest dodatna, rozwartego odjemna. To zrównanie iest bardzo łatwe

do pamiętania. Moglibyśmy tę wartość na dost a wprowadzić we dwa następujące równania (1) i otrzymalibyśmy, że $\text{dost } B = \text{dost } b \cdot \text{wst } C$, $\text{dost } C = \text{dost } c \cdot \text{wst } B$; ale nam te równania wypadną zkadnąd.

Przypadek II. Wprowadziwszy $\text{wst } A = 1$ w równanie (2); otrzymamy

$$(b) \quad \frac{1}{\text{wst } a} = \frac{\text{wst } B}{\text{wst } b} = \frac{\text{wst } C}{\text{wst } c}, \text{ a zatem } \frac{\text{wst } c}{\text{wst } a} = \text{wst } C,$$

albo

$$\frac{\text{wst } c}{\text{wst } C} = \text{wst } a, \quad \text{wst } c = \text{wst } a \cdot \text{wst } C;$$

to równanie rozwiązuje te zadania: mając przeciwprostokątną i bok; wyznalesdź kąt temu bokowi przeciwny; albo mając bok i kąt mu przeciwny, wyznalesdź przeciwprostokątną; albo mając przeciwprostokątną i kąt którykolwiek, wyznalesdź bok temu kątowi przeciwny.

Przypadek III. Wprowadźmy warunki kąta prostego w równania (3); wypadnie

$$(c) \quad \text{dost } a = \text{dost } B \cdot \text{dost } C = \frac{1}{\text{sty } B \cdot \text{sty } C};$$

$$(d) \quad \text{dost } b = \frac{\text{dost } B}{\text{wst } C}; \quad \text{dost } c = \frac{\text{dost } C}{\text{wst } B}; \text{ te same,}$$

co w przypadku I.

(c) rozwiązuje nam dwa zadania: mając dwa kąty, wyznalesdź przeciwprostokątną, albo mając przeciwprostokątną i kąt, wyznalesdź kąt drugi.

(d) rozwiązuje zadania następujące: mając dwa kąty, wyznalesdź bok iednemu z tych kątów przeciwn-

legły: mając bok i kąt mu przeciwległy, wynaleśdź kąt drugi: mając bok i kąt mu przyległy, wynaleśdź kąt drugi.

Przypadek IV. Z sześciu zrównań pod znakiem (4) § 4, cztery tylko zamykają kąt A ; każda zaś para wyraża ten sam związek, iak to zaraz zobaczymy. Uczynimy w zrównaniach (4), dosty $A = 0$, wst $A = 1$; wypadnie:

$$(e) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dosty } a. \text{wst } b = \text{dost } b. \text{dost } C, \text{ czyli } \frac{\text{sty } b}{\text{sty } a} = \text{dost } C \\ \text{dosty } a. \text{wst } c = \text{dost } c. \text{dost } B, \quad \frac{\text{sty } c}{\text{sty } a} = \text{dost } B \end{array} \right.$$

$$(f) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dosty } b. \text{wst } c = \text{dosty } B, \quad \text{czyli } \text{sty } B = \frac{\text{sty } b}{\text{wst } c}; \\ \text{dosty } c. \text{wst } b = \text{dosty } C, \quad \text{sty } C = \frac{\text{sty } c}{\text{wst } b} \end{array} \right.$$

zrównania (e) rozwiązuia następujące zdania: mając przeciwprostokątną i bok, wynaleśdź kąt temu bokowi przyległy: mając bok i kąt mu przyległy, wynaleśdź przeciwprostokątną: mając przeciwprostokątną i kąt, wynaleśdź bok temu kątowi przyległy.

Zrównania (f) odpowiadaią na te zadania: mając dwa boki, wynaleśdź kąt iednemu przeciwległy: mając kąt, i bok mu przeciwległy; wynaleśdź bok drugi: mając kąt i bok mu przyległy; wynaleśdź bok przeciwległy.

Te ieszcze zrównania (f) uczą nas; że w trójkącie prostokątnym, kąt ukośny i bok mu przeciwległy są zawsze tego samego gatunku, to iest albo obadwa ostre, albo obadwa rozwarte. W zrównaniach (a), (b), (c),

(d), (e), (f), zawiera się cała nauka, i rozwiązanie wszystkich zadań o trójkącie prostokątnym kulistym.

Trójkąty o dwóch i trzech kątach prostych.

§ 10. Mówiąc w § poprzedzającym o trójkącie prostokątnym, rozumieliśmy taki trójkąt, w którym jeden tylko kąt jest prosty. Aże dowiedliśmy w § 4, że summa wszystkich kątów w trójkącie kulistym jest koniecznie większa od dwóch kątów prostych; więc trójkąt kulisty może zamykać dwa a nawet i trzy kąty proste. Jeżeli ich zamykać będzie dwa, n. p. $A=90^\circ$, $B=90^\circ$; więc wst $A=1$, dost $A=0$; wst $B=1$, dost $B=0$; wprowadziwszy te warunki w równania (3) § 4, otrzymamy dost $a=0$, dost $b=0$; a zatem $a=b=90^\circ$: przytém dost $c=\text{dost } C$, a zatem $c=C$: więc trójkąt ten będzie równoramienny, boki naprzeciw kątów prostych leżące będą ćwiartkami koła, a bok c będąc równy kątowi C , będzie jego miarą: czyli kąt C będzie biegunem łuku c . Tu widzimy, że kąty na powierzchni kuli wyrażające pochyłość płaszczyzn, równe są łukom o 90° z ich wierzchołka zarysowanym, i dla tego niemi się wymierzaia; iak się to już okazało z własności kuli. Jeżeli te łuki na c pionowe z drugiej strony przeciągniemy; przetną się w drugim biegunie, i zamkną plac na powierzchni kuli: plac ten między dwoma kołami wielkimi w dwóch punktach się przecinaiaćemi zawarty, nazywać będziemy *taśmą spiczastą* powierzchni kulistej. Francuzi nazywaią to *wrzecionem* (fuseau): bryłowatość kulista taką taśmą zakończona nazywa się u francuzow *Onglet sphérique*, u nas nazywać się będzie *klinem kulistym*: są to dwie piramidy spoione z sobą ścianą kąty proste maaćą. W praktyczném wyrażaniu globów ziemskich i niebieskich, cała powierz-

chnia kuli dzieli się na taśmy śpiczaste, które się osobno wyciskają, i niemi oblepia się kula wytoczona, lub w formie wylana.

Jeżeli trójkąt kulisty zawierać będzie wszystkie trzy kąty proste, czyli $A=B=C=90^\circ$; będzie $\text{wst} A = \text{wst} B = \text{wst} C = 1$, $\text{dost} A = \text{dost} B = \text{dost} C = 0$: co wprowadziwszy w równania (3) § 4, otrzymamy $\text{dosta} = 0$, $\text{dostb} = 0$, $\text{dostc} = 0$; a zatem $a=b=c=90^\circ$: więc taki trójkąt będzie równokątnym i równobocznym, i każdy bok równy ćwiartce koła; a przeto wierzchołek każdego kąta będzie biegunem łuku sobie przeciwległego. Cała powierzchnia kuli składa się z ośmiu takowych trójkątów.

Trójkąt kulisty ukośno-kątny.

§ 11. W trójkącie kulistym ukośno-kątnym zachodzi 15 przypadków czyli zadań; na co mamy tyleż równań (1), (2), (3), (4). Z tych atoli cztery tylko są prawdziwie od siebie różne. Dosyćby więc było wymienić te zadania, i skazać w dopiero wspomnianych równaniach te, które na każde zadanie odpowiedź w sobie zawierają. Ale tu zachodzą dwie ważne uwagi: *naprzód* wystawiwszy sobie taki tylko do rozwiązania trójkąt, gdzie każdy kąt, i każdy bok jest mniejszy od 180° : ile razy wartość boku lub kąta szukanego jest wyrażona przez wstawę, odpowiedź jest wątpliwa; bo ta sama wstawa, i z tym samym znakiem zawsze dodatnym, należy równie do boku lub kąta tak ostrego, jak rozwartego. Rozróżnia tylko te kąty dostawa, albo styczna; bo jedna i druga jest dodatna na bok lub kąt ostry; odjemna zaś na kąt lub bok rozwarty. *Powtóre* równania (1), (3), (4), są bardzo niewygodne do rachunku