

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

WŁASNOŚCI TRÓJKĄTA KULISTEGO: ZROWNANIA I WZORY NA IEGO ROZWIAZANIE.

*Wiadomość trójkąta prostokreślnego i kuli,
prowadząca do pojęcia boków i kątów
w trójkącie kulistym.*

§ 1. W trójkącie prostokreślnym, którego kąty są A, B, C , boki na przeciw tym kątom leżące a, b, c , podług Prop. XIII, księgi 2. *Euklidesa* mamy:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; \text{ skąd } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{a zatem, } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ = \frac{\sqrt{(4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2)}}{2bc} = \frac{d}{2bc}$$

nazwawszy d funkcją pod znakiem pierwiastkowym; która będąc różnicą dwóch kwadratów, może się rozobrać na mnożniki: na jeden $2bc - (b^2 + c^2 - a^2) = a^2 - (b - c)^2$, i na drugi $2bc + (b^2 + c^2 - a^2) = (b + c)^2 - a^2$; każdy znowu z tych mnożników będąc także różnicą kwadratów, ma dwa mnożniki: pierwszy $a - b + c$, $a + b - c$; drugi $b + c - a$, $b + c + a$; a zatem

$$d = \sqrt{[(a + c - b)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)]}.$$

Drugi znak pierwiastkowy — nie należy do trójkąta; bo w nim żaden kąt nie może być większy od 180° ,

a zatem nie ma wstawy odmiennéy. Geometrya nas uczy, że $\frac{1}{2}bc \cdot \text{wst} A$ jest powierzchnią trójkąta; więc $d = 2bc \cdot \text{wst} A$ jest powierzchnią trójkąta cztery razy wziętą: co nam daie sposób wyrażenia powierzchni trójkąta przez wszystkie jego boki.

Kula przecięta płaszczyzną przez ięý środek przechodzącą, wydaie koło wielkie, którego promień równy promieniowi kuli. Średnica tego koła pionowa na ięgo płaszczyznę, nazywa się ięgo *osią* (axis), a ięý punkta ostateczné na powierzchni kuli wychodzące zowią się *biegunami* koła (poli). Skąd się wnośi, że biegun iest zawsze o 90° od swego koła odległy. Iestto *środek* (centrum), z którego się cerklem zakrzywionym rysuie koło wielkie na powierzchni kuli. Ieżeli kulę przetniemy drugą płaszczyzną przez środek przechodzącą; powstanie drugie koło wielkie, które się przetnie z pierwszym kołem w odległości 180° , i obadwa zamkną plac na powierzchni kuli. Punkta przecięcia się płaszczyzn zrobią na powierzchni kuli dwa kąty równe, o 180° od siebie odległe, które są razem kątami pochyłości płaszczyzn do siebie. Nie może więc na powierzchni kuli bydź plac zamknięty od dwóch kół wielkich, chyba że każdy łuk koła iest 180° . Ieżeli chcemy mniejszemi łukami zamknąć plac na powierzchni kuli, trzeba ią przeciąć trzecią płaszczyzną przez środek przechodzącą poprzecznie do pierwszych płaszczyzn: to iest, żeby ta trzecia płaszczyzna przecinała linią, w którą się przecinaiały dwie pierwsze. Natenczas przetną się na powierzchni kuli trzy łuki kół wielkich, od trzech płaszczyzn zrodzone.

Wystawmy sobie, że trójkąta prostokreślnego trzy boki a , b , c , są cięciwami tych łuków, a zatem

trójkąt ABC wpisany w powierzchnię kuli; kąty A, B, C , uważane na płaszczyźnie trójkąta prostokreślnego, będą kątami cięciw; uważane zaś na powierzchni kuli, będą kątami łuków. Od wierzchołków tych kątów poprowadzone linie proste do środka kuli będą jej promieniami, i wystawią piramidę trójkątną, mającą swój wierzchołek w środku kuli, trójkąt prostokreślny abc za podstawę, a część powierzchni kuli między płaszczyznami przecinałymi albo między łukami od płaszczyzn zrysowanemi zawartą, za miarę kąta bryłowego. Ta część powierzchni kuli zamyka trójkąt kulisty, mający za boki, łuki kół wielkich mierzące kąty między promieniami kuli w jej środku zawarte: kąty zaś trójkąta kulistego są kątami stycznych, któreby się z wierzchołka poprowadziły do boków trójkąta. Ponieważ te stycznne są pionowe na promień kuli, a każdy promień jest przecięciem się dwóch płaszczyzn; więc kąty trójkąta kulistego, będąc każdy z nich kątem dwóch linii pionowych na wspólne przecięcie, wyrażają pochyłości płaszczyzn przecinających kulę.

A jeżeli od wierzchołka kąta łukowego A (fig. a Tab. I.) przeciągniemy każde jego ramie AB, AC , aż do 90° , i zarysujemy z tegoż wierzchołka łuk MN między temi ramionami; punkt wierzchołka A będzie biegunem tego ostatniego łuku. Promienie SM, SN w środku kuli S przecinające się, i obeymujące ten łuk są równoległe stycznym, kąt łukowy A zawierającym; bo są także pionowe na linią AS wspólnego płaszczyzn przecięcia: więc kąt między temi promieniami jest równy kątowi między stycznymi, czyli kątowi łukowemu A . Przeto w trójkącie kulistym każdy kąt, jest równy łukowi koła wielkiego między ramionami zawartemu, i zarysowanemu z wierzchołka iako z bieguna, w odległości 90° .

Ma więc każdy kąt w trójkącie kulistym równy sobie łuk na powierzchni kuli. Dla poznania lepszego tych łuków i kątów wystawmy sobie na *fig. 2. Tab. 1.* trójkąt kulisty ABC , poprzeciagamy jego boki, każdy do 90° ; z wierzchołka każdego kąta w odległości 90° zarysujemy łuki, póki się nawzajem nie przetną; powstanie stąd inny trójkąt kulisty $A'B'C'$, który się nazywa biegunowy trójkąta ABC . W tym nowym trójkącie łuk $DE =$ kątowi A ; $ML = B$; $NO = C$.

Ponieważ punkt A' leży na łuku $C'A'$ odrysowanym z B , i razem na łuku $B'A'$ odrysowanym z punktu C , więc A' jest biegunem boku BC . Podobnie się dowodzi że B' jest biegunem boku AC ; C' biegunem boku AB : więc trójkąt ABC jest znowu biegunowym trójkąta $A'B'C'$.

Z odległości łuku od swego bieguna wypada: że $C'L = 90^\circ$; $MA' = 90^\circ$; więc ML czyli kąt B jest dopełnieniem boku $A'C'$ do 180° . Podobnie się dowodzi, że łuk DE czyli kąt A jest dopełnieniem łuku $B'C'$ do 180° : i łuk NO czyli kąt C jest dopełnieniem łuku $A'B'$ do 180° . Znacząc więc kąty trójkąta kulistego wielkimi literami alfabetu, a temiż samymi literami małymi boki im przeciwległe; mamy następujące zrównania:

$$A + a' = 180^\circ; B + b' = 180^\circ; C + c' = 180^\circ.$$

Z tego samego początku wypada: że $BM = 90^\circ$; $CN = 90^\circ$, więc BC jest dopełnieniem łuku NM czyli kąta A' do 180° : podobnie się dowodzi, że AC jest dopełnieniem kąta B' do 180° , i AB dopełnieniem do 180° kąta C' : co się tak wyraża:

$$A' + a = 180^\circ; B' + b = 180^\circ; C' + c = 180^\circ.$$

Więc w dwóch trójkątach, z których jeden jest biegunowym drugiego, każdy kąt w jednym którym-

kolwiek jest dopełnieniem do 180° boku sobie odpowiadającego w drugim trójkącie.

Trojkąt biegunowy wypadający z własności kuli, był nasamprzód upatrzony i opisany przez *Caswell* w dziełach *Wallis* Tom II, k. 896. Jest on prawdą zasadową, iak go sprawiedliwie uważa *Euler*, nie zaś prawdą wypadkową rachunku.

Zrównanie fundamentalne całej Trygonometrii.

§ 2. Weźmy już pod uwagę trójkąt kulisty *ABC* na fig. 1. złożony z trzech kątów, i z trzech łuków kół wielkich. Każdy kąt między łukami przecina-
Fig. 1.
jącymi się zawarty wyrażać będziemy wielką literą alfabetu, iak się dopiero powiedziało: tąż zaś samą literą małą znaczyć będziemy łuk czyli bok naprzeciwko tego kąta leżący: n.p. *A* znaczy kąt, *a* bok mu przeciwległy. Przez takie znaczenie łatwo będzie czytać zrównania bez pomocy figury. Można się w całej tej nauce obejść bez figur. Z wierzchołka kąta *A* poprowadźmy styczną *AK* do łuku *c*; styczną *AL* do łuku *b*. Przez punkta ostateczne tych łuków *B, C*, poprowadźmy ze środka kuli *O* linie proste aż do przecięcia stycznych, to jest *OK* która jest sieczną łuku *c*, i *OL* sieczną łuku *b*: kąt *KOL* w środku kuli mierzy się łukiem *a*. Złączmy punkta *K, L*, linią prostą *KL*, która iak widzimy jest spólna dwóm trójkątom prostokreślnym *KAL, KOL*; więc

$$\begin{aligned} KL^2 &= KA^2 + AL^2 - 2KA.AL.\text{dost } A \\ &= KO^2 + LO^2 - 2KO.LO.\text{dost } a: \end{aligned}$$

przetłumaczmy te linie na ich znaczenia trygonometryczne, i wypadnie

$$\begin{aligned} \text{sty}^2 c + \text{sty}^2 b - 2 \text{sty } c.\text{sty } b.\text{dost } A &= \\ = \text{sie}^2 c + \text{sie}^2 b - 2 \text{sie } c.\text{sie } b.\text{dost } a. \end{aligned}$$

aże wzięwszy promień kuli za jedność
 $\text{sie}^2 c - \text{sty}^2 c = 1$, $\text{sie}^2 b - \text{sty}^2 b = 1$. Wiemy z Roz-
 działu IV Algebry że $\text{sie } c = \frac{1}{\text{dost } c}$; $\text{sie } b = \frac{1}{\text{dost } b}$
 $\text{sty } c = \frac{\text{wst } c}{\text{dost } c}$, $\text{sty } b = \frac{\text{wst } b}{\text{dost } b}$. Te wartości wpro-
 wadziwszy w ostatnie zrównanie, rozdzieliwszy je
 przez 2, i zniósłszy ułamki; otrzymamy

$$\begin{aligned}\text{dost } A &= \frac{\text{dost } a - \text{dost } b \cdot \text{dost } c}{\text{wst } b \cdot \text{wst } c} \\ \text{dost } B &= \frac{\text{dost } b - \text{dost } a \cdot \text{dost } c}{\text{wst } a \cdot \text{wst } c} \\ \text{dost } C &= \frac{\text{dost } c - \text{dost } a \cdot \text{dost } b}{\text{wst } a \cdot \text{wst } b}\end{aligned}\tag{1}$$

zrównania na $\text{dost } B$, $\text{dost } C$ wypadną nam, kiedy to
 samo zrobimy z kątami B, C , cośmy zrobili z kątem A .
 Każde z nich ten sam związek wyraża, ale przenie-
 siony do innego kąta. Każde z tych zrównań nazy-
 wa się zrównaniem *fundamentalnym*; bo z niego *De*
la Grange całą trygonometrią wyciągnął. Zrobimy
 i my toż samo w sposób jeszcze iak nam się zdaie pro-
 ściejszy, przydając inne wielkiey wagi zrównania, o
 których ten wielki Geometra nawet nie wspomniał.
 Nim daley postąpimy, nadamy wprzód zrównaniom
 (1) inną wygodniejszą do rachunku postać. Ponieważ
 § 51. Algebry uczy nas, że $1 - \text{dost } A = 2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} A$, więc

$$\begin{aligned}2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} A &= \frac{\text{wst } b \cdot \text{wst } c + \text{dost } b \cdot \text{dost } c - \text{dost } a}{\text{wst } b \cdot \text{wst } c} \\ &= \frac{\text{dost } (b - c) - \text{dost } a}{\text{wst } b \cdot \text{wst } c} \\ &= \frac{2 \text{wst}^{\frac{1}{2}} (a + b - c) \cdot \text{wst}^{\frac{1}{2}} (a + c - b)}{\text{wst } b \cdot \text{wst } c} \quad \S 54. \text{ Algeb.}\end{aligned}$$

pierwsza strona tego ostatniego zrównania jest koniecz-
nie dodatnia; więc i druga taką być musi: skąd wy-
pada $a+b>c$, $a+c>b$: bo gdyby mogło być $a+b<c$,
 $a+c<b$; byłoby razem $a<c-b$, $a<b-c$, a zatem
 $2a<0$, co jest niedorzecznością. Więc w każdym tróy-
kacie kulistym *summa dwóch boków jest większa od*
trzeciego. A jeżeli $a+b>c$, musi być $a>c-b$, to
jest: *każdy bok trójkąta jest większy od różnicy dwóch*
innych.

Tenże § 51. Alg. dowodzi, że $1 + \text{dost} A = 2 \text{dost}^2 \frac{1}{2} A$,
dodamy do iedności pierwsze (1), będzie

$$\begin{aligned} 2 \text{dost}^2 \frac{1}{2} A &= \frac{\text{wst} b. \text{wst} c. - \text{dost} b. \text{dost} c. + \text{dost} a}{\text{wst} b. \text{wst} c} \\ &= \frac{\text{dost} a - \text{dost}(b+c)}{\text{wst} b. \text{wst} c} \\ &= \frac{2 \text{wst} \frac{1}{2}(a+b+c). \text{wst} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{wst} b. \text{wst} c} \end{aligned}$$

a rozdzieliwszy wstawę przez dostawę

$$\text{sty}^2 \frac{1}{2} A = \frac{\text{wst} \frac{1}{2}(a+b-c). \text{wst} \frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst} \frac{1}{2}(a+b+c). \text{wst} \frac{1}{2}(b+c-a)} \quad (1')$$

podobnie robiąc z dwoma drugimi zrównaniami na
 $\text{dost} B$, $\text{dost} C$, przyjdziemy do

$$\text{sty}^2 \frac{1}{2} B = \frac{\text{wst} \frac{1}{2}(b+c-a). \text{wst} \frac{1}{2}(b+a-c)}{\text{wst} \frac{1}{2}(a+b+c). \text{wst} \frac{1}{2}(a+c-b)} \quad (1'')$$

$$\text{sty}^2 \frac{1}{2} C = \frac{\text{wst} \frac{1}{2}(a+c-b). \text{wst} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{wst} \frac{1}{2}(a+b+c). \text{wst} \frac{1}{2}(a+b-c)} \quad (1''').$$

Jeżeli te trzy zrównania (1'), (1''), (1''') rozdzielimy
przez siebie, wypadną nam trzy inne, następujące:

$$\frac{\text{sty}\frac{1}{2}A}{\text{sty}\frac{1}{2}B} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{wst}\frac{1}{2}(b+c-a)} \quad (1.)$$

$$\frac{\text{sty}\frac{1}{2}A}{\text{sty}\frac{1}{2}C} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{wst}\frac{1}{2}(b+c-a)} \quad (1'')$$

$$\frac{\text{sty}\frac{1}{2}B}{\text{sty}\frac{1}{2}C} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{wst}\frac{1}{2}(a+c-b)} \quad (1''')$$

te trzy ostatnie równania częstokroć przydatne, i używane w rachunku analitycznym; pokażą się nawet w trygonometrii potrzebne.

Pierwsze równanie główne.

§ 3. Ze równań (1) wyciągnęliśmy wstawę, dostawę, i wreszcie styczną i połowy każdego kąta: szukamy teraz wstawy kąta całego. Ponieważ $\text{wst}A = \sqrt{1 - \text{dost}^2 A}$, więc (1) dadzą

$$\text{wst}A = \frac{\sqrt{[\text{wst}^2 b \cdot \text{wst}^2 c - (\text{dost}a - \text{dost}b \cdot \text{dost}c)^2]}}{\text{wst}b \cdot \text{wst}c}$$

$$\text{wst}B = \frac{\sqrt{[\text{wst}^2 a \cdot \text{wst}^2 c - (\text{dost}b - \text{dost}a \cdot \text{dost}c)^2]}}{\text{wst}a \cdot \text{wst}c}$$

$$\text{wst}C = \frac{\sqrt{[\text{wst}^2 a \cdot \text{wst}^2 b - (\text{dost}c - \text{dost}a \cdot \text{dost}b)^2]}}{\text{wst}a \cdot \text{wst}b}$$

znak drugi — przed znakiem pierwiastkowym opuszczamy, iako nie należący do trójkąta, dla tej samej przyczyny, którąśmy dali na trójkąt prostokreślny w § 1. Niech będzie

$$f = \sqrt{[\text{wst}^2 b \cdot \text{wst}^2 c - (\text{dost}a - \text{dost}b \cdot \text{dost}c)^2]}$$

choć f stanowiąc licznika ułamku, zdaie się mieć na każdy kąt A, B, C inną wartość; ieżeli jednak wyrazimy wstawy przez dostawy; to jest $\text{wst}^2 a = 1 - \text{dost}^2 a$;

$\text{wst}^2 b = 1 - \text{dost}^2 b$, $\text{wst}^2 c = 1 - \text{dost}^2 c$, po wykonaném mnożeniu, i po rozwinieniu w drugim terminie potęgi drugiej; wartość na f we wszystkich trzech zrównaniach, to jest na wszystkie trzy kąty A, B, C , pokaże się ta sama, i to następująca:

$$f = \sqrt{(1 - \text{dost}^2 a - \text{dost}^2 b - \text{dost}^2 c + 2 \text{dost} a \cdot \text{dost} b \cdot \text{dost} c)}$$

dowodzi się w Geometrii; że wartość na f wyraża stosunek równoległoscianu ukośnokątnego, do prostokątnego: to jest: kiedy kąty między krawędziami kąta bryłowy zamykającymi, są: a, b, c ukośne, albo proste. *Legendre Géométrie Note V. p. 297.* Przeto:

$$\text{wst} A = \frac{f}{\text{wst} b \cdot \text{wst} c},$$

$$\text{wst} B = \frac{f}{\text{wst} c \cdot \text{wst} a},$$

$$\text{wst} C = \frac{f}{\text{wst} a \cdot \text{wst} b}.$$

więc

$$\frac{\text{wst} A}{\text{wst} a} = \frac{\text{wst} B}{\text{wst} b} = \frac{\text{wst} C}{\text{wst} c} \quad (2)$$

to jest: w każdym trójkącie kulistym *wstawy kątów tak się mają do siebie, jak wstawy boków tym kątom przeciwległych.* Zrównanie (2) jest pierwszém zrównaniem główném rozróżniającém trójkąt kulisty od prostokreślnego.

Jeżeli $\text{wst} a = \text{wst} b$; wypada z (2) $\text{wst} A = \text{wst} B$, i na odwrót: więc w trójkącie równoramiennym, kąty przeciwległe bokom równym są równe: i znowu gdy dwa kąty w trójkącie są równe, trójkąt jest równoramienny.

Ze równań (2) wypada, $\text{wst} A \cdot \text{wst} b = \text{wst} a \cdot \text{wst} B$,
 $\text{wst} A \cdot \text{wst} c = \text{wst} a \cdot \text{wst} C$,

jeżeli te dwa równania raz dodamy, drugi raz odciąg-
 niemy od siebie; otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{wst} A (\text{wst} b + \text{wst} c) &= \text{wst} a (\text{wst} B + \text{wst} C) \\ \text{wst} A (\text{wst} b - \text{wst} c) &= \text{wst} a (\text{wst} B - \text{wst} C) \end{aligned} \quad (\alpha)$$

a położywszy z § 51. Alg. za $\text{wst} A = 2\text{wst} \frac{1}{2} A \cdot \text{dost} \frac{1}{2} A$,
 za $\text{wst} a = 2\text{wst} \frac{1}{2} a \cdot \text{dost} \frac{1}{2} a$; i potem za summę i różnicę
 wstaw, ich wartość w mnożnościach z § 54. k. 284 Al-
 gebry, łatwo przyjdziemy do następujących równań.

$$\begin{aligned} (\alpha_1) \quad \frac{\text{wst} \frac{1}{2} a}{\text{wst} \frac{1}{2} (b+c)} \cdot \frac{\text{dost} \frac{1}{2} a}{\text{dost} \frac{1}{2} (b-c)} &= \frac{\text{wst} \frac{1}{2} A}{\text{dost} \frac{1}{2} (B-C)} \cdot \frac{\text{dost} \frac{1}{2} A}{\text{wst} \frac{1}{2} (B+C)} \\ \frac{\text{wst} \frac{1}{2} a}{\text{wst} \frac{1}{2} (b-c)} \cdot \frac{\text{dost} \frac{1}{2} a}{\text{dost} \frac{1}{2} (b+c)} &= \frac{\text{dost} \frac{1}{2} A}{\text{wst} \frac{1}{2} (B-C)} \cdot \frac{\text{wst} \frac{1}{2} A}{\text{dost} \frac{1}{2} (B+C)} \end{aligned}$$

każde z tych równań nie jest-li złożone z dwóch
 równań prostych? dowiemy się niżej.

Drugie równanie główne.

§ 4. Mając trójkąt kulisty, którego kąty A, B, C :
 boki tym kątom przeciwległe a, b, c ; wystawmy sobie
 drugi trójkąt z kątami A', B', C' i z bokami im prze-
 ciwległymi a', b', c' tak, żeby jeden był biegunowy
 drugiego. Według tego, cośmy powiedzieli na koń-
 cu § 1. mieć będziemy następujące równania:

$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - a', \quad B = 180^\circ - b', \quad C = 180^\circ - c', \\ A' &= 180^\circ - a, \quad B' = 180^\circ - b, \quad C' = 180^\circ - c, \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} A + B + C + a' + b' + c' &= 3 \cdot 180^\circ, \\ A' + B' + C' + a + b + c &= 3 \cdot 180^\circ. \end{aligned}$$

A jeżeli $A=180^\circ-a'$, $\text{wst } A=\text{wst } a'$, $\text{dost } A=-\text{dost } a'$; podobnie $\text{wst } B=\text{wst } b'$, $\text{dost } B=-\text{dost } b'$; $\text{wst } C=\text{wst } c'$, $\text{dost } C=-\text{dost } c'$; $\text{wst } A'=\text{wst } a$, $\text{dost } A'=-\text{dost } a$; $\text{wst } B'=\text{wst } b$, $\text{dost } B'=-\text{dost } b$; $\text{wst } C'=\text{wst } c$, $\text{dost } C'=-\text{dost } c$. Wprowadźmy te wartości w równania (1) § 1; otrzymamy

$$\text{dost } a' = \frac{\text{dost } A' + \text{dost } B' \cdot \text{dost } C'}{\text{wst } B' \cdot \text{wst } C'}$$

więc i

$$\text{dost } a = \frac{\text{dost } A + \text{dost } B \cdot \text{dost } C}{\text{wst } B \cdot \text{wst } C}$$

$$\text{dost } b = \frac{\text{dost } B + \text{dost } A \cdot \text{dost } C}{\text{wst } A \cdot \text{wst } C} \quad (3)$$

$$\text{dost } c = \frac{\text{dost } C + \text{dost } B \cdot \text{dost } A}{\text{wst } B \cdot \text{wst } A}$$

Jak równania (1) wyrażają każdy kąt przez trzy boki; tak równania (3) wyrażają każdy bok przez trzy kąty. Każde ze równań (3) wyraża ten sam związek, do innego boku przeniesiony. Nazywać je będziemy drugim *zrównaniem głównem*. Przerobimy je na postać do rachunku wygodniejszą. Ponieważ $1 - \text{dost } a = 2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} a$: równanie pierwsze (3) odejści od iedności, wyda

$$\begin{aligned} 2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} a &= \frac{\text{wst } B \cdot \text{wst } C - \text{dost } B \cdot \text{dost } C - \text{dost } A}{\text{wst } B \cdot \text{wst } C} \\ &= - \frac{\text{dost}(B+C) + \text{dost } A}{\text{wst } B \cdot \text{wst } C}, \quad \S 54. \text{ Algeb.} \\ &= - \frac{2 \text{dost} \frac{1}{2}(A+B+C) \cdot \text{dost} \frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{wst } B \cdot \text{wst } C} \end{aligned}$$

Pierwsza strona równania iest koniecznie dodatna;

więc w drugiej stronie jedna z dostaw byź musi odjemna, a zatem kąt iey rozwarty. Skąd wypada, że $(A+B+C) > 180^\circ$; a zatem w trójkącie kulistym summa wszystkich trzech kątów iest większa od dwóch kątów prostych.

Ażesmy wyżej dowiedli że $A+B+C+a'+b'+c' = 3.180^\circ = 6.90^\circ$; więc ieżeli $(A+B+C) > 2.90^\circ$, musi byź $(a'+b'+c') < 4.90^\circ$. to iest: w każdym trójkącie kulistym summa wszystkich trzech boków iest mniejsza od czterech kątów prostych.

Z przedostatniego twierdzenia wnosi się ieszcze to; że przeciągnąwszy którykolwiek bok trójkąta kulistego, ponieważ kąty przyległe są równe dwom prostym, kąt zewnętrzny w trójkącie kulistym, iest mniejszy od summy dwóch kątów wewnętrznych.

Jeżeli każde ze zrównań (3), przydamy do iedności, $1 + \text{dosta} = 2 \text{dost}^2 \frac{1}{2}a$, wypadnie

$$\begin{aligned} 2 \text{dost}^2 \frac{1}{2}a &= \frac{\text{wst } B. \text{wst } C + \text{dost } B. \text{dost } C + \text{dost } A}{\text{wst } B. \text{wst } C} \\ &= \frac{\text{dost}(B-C) + \text{dost } A}{\text{wst } B. \text{wst } C} \\ &= \frac{2 \text{dost}^{\frac{1}{2}}(A+B-C). \text{dost}^{\frac{1}{2}}(A+C-B)}{\text{wst } B. \text{wst } C} \end{aligned}$$

rozdzielnmy wstawę przez dostawę; a otrzymamy

$$\text{sty}^2 \frac{1}{2}a = - \frac{\text{dost}^{\frac{1}{2}}(A+B+C). \text{dost}^{\frac{1}{2}}(B+C-A)}{\text{dost}^{\frac{1}{2}}(A+B-C). \text{dost}^{\frac{1}{2}}(A+C-B)} \quad (3')$$

Podobnie postąpiwszy z dwoma pozostałemi zrównaniami (3) na $\text{dost } b$, $\text{dost } c$, mieć będziemy

$$\text{sty}^2 \frac{1}{2} b = - \frac{\text{dost} \frac{1}{2} (A+B+C) \cdot \text{dost} \frac{1}{2} (A+C-B)}{\text{dost} \frac{1}{2} (A+B-C) \cdot \text{dost} \frac{1}{2} (B+C-A)} \quad (3'')$$

$$\text{sty}^2 \frac{1}{2} c = - \frac{\text{dost} \frac{1}{2} (A+B+C) \cdot \text{dost} \frac{1}{2} (A+B-C)}{\text{dost} \frac{1}{2} (A+C-B) \cdot \text{dost} \frac{1}{2} (B+C-A)} \quad (3''')$$

kiedy iedno z tych zrównań rozdzielimy przez drugie, wypadną trzy następujące

$$\frac{\text{sty} \frac{1}{2} a}{\text{sty} \frac{1}{2} b} = \frac{\text{dost} \frac{1}{2} (B+C-A)}{\text{dost} \frac{1}{2} (A+C-B)} \quad (3.)$$

$$\frac{\text{sty} \frac{1}{2} a}{\text{sty} \frac{1}{2} c} = \frac{\text{dost} \frac{1}{2} (B+C-A)}{\text{dost} \frac{1}{2} (A+B-C)} \quad (3_{..})$$

$$\frac{\text{sty} \frac{1}{2} b}{\text{sty} \frac{1}{2} c} = \frac{\text{dost} \frac{1}{2} (A+C-B)}{\text{dost} \frac{1}{2} (A+B-C)} \quad (3_{..})$$

które wyrażają stosunek boków przez kąty, tak iak (1_.) (1_{..}) (1_{...}) w § 2, okazują stosunek kątów przez boki: i iak pierwsze tak drugie wielkie mieć mogą użycie w rachunku analitycznym,

Trzecie zrównanie główne.

§ 5. Weźmy ieszcze do uwagi zrównanie fundamentalne (1) § 2; wyciągniemy z niego

$$\text{dosta} = \text{dost} b \cdot \text{dost} c + \text{wst} b \cdot \text{wst} c \cdot \text{dost} A,$$

$$\text{dost} b = \text{dosta} \cdot \text{dost} c + \text{wst} a \cdot \text{wst} c \cdot \text{dost} B,$$

$$\text{dost} c = \text{dosta} \cdot \text{dost} b + \text{wst} a \cdot \text{wst} b \cdot \text{wst} C,$$

ieżeli za $\text{dost} b$ w pierwszym zrównaniu, weźmiemy wartość z drugiego: otrzymamy

$$\begin{aligned} \text{dosta} = & \text{dosta} \cdot \text{dost}^2 c + \text{wst} a \cdot \text{wst} c \cdot \text{dost} c \cdot \text{dost} B \\ & + \text{wst} b \cdot \text{wst} c \cdot \text{dost} A: \end{aligned}$$

przeniósłszy pierwszy wyraz z drugiey strony zró-

wnania na pierwszą: i za $1 - \text{dost}^2 c = \text{wst}^2 c$, w ostatnim zaś terminie za $\text{wst} b = \frac{\text{wsta} \cdot \text{wst} B}{\text{wst} A}$ włożywszy te wartości, i całe potem zrównanie rozdzieliwszy przez $\text{wst} c \cdot \text{wsta}$, otrzymamy

$$\text{dost} y a \cdot \text{wst} c = \text{dost} c \cdot \text{dost} B + \text{wst} B \cdot \text{dost} y A \quad (4).$$

W toż samo zrównanie pierwsze, wprowadziwszy wartość na $\text{dost} c$ z trzeciego, zamieniwszy $1 - \text{dost}^2 b$ na $\text{wst}^2 b$, i $\text{wst} c = \frac{\text{wsta} \cdot \text{wst} C}{\text{wst} A}$, potem całe zrównanie rozdzieliwszy przez $\text{wsta} \cdot \text{wst} b$, mieć będziemy

$$\text{dost} y a \cdot \text{wst} b = \text{dost} b \cdot \text{dost} C + \text{wst} C \cdot \text{dost} y A \quad (4').$$

Podobnie postępując z dwoma zrównaniami na $\text{dost} b$, $\text{dost} c$, każde z nich wyda nam dwa zrównania, następujące:

$$\begin{aligned} \text{dost} y b \cdot \text{wst} c &= \text{dost} c \cdot \text{dost} A + \text{wst} A \cdot \text{dost} y B, \\ \text{dost} y b \cdot \text{wsta} &= \text{dost} a \cdot \text{dost} C + \text{wst} C \cdot \text{dost} y B, \\ \text{dost} y c \cdot \text{wsta} &= \text{dost} a \cdot \text{dost} B + \text{wst} B \cdot \text{dost} y C, \\ \text{dost} y c \cdot \text{wst} b &= \text{dost} b \cdot \text{dost} A + \text{wst} A \cdot \text{dost} y C. \end{aligned} \quad (4'')$$

Te zrównania zachodzą między dwoma kątami i dwoma bokami, z których jeden jest przyległy, drugi przeciwległy jednemu z kątów: że zaś każdy kąt ma dwa boki przyległe, dla tego z każdego zrównania (1), wypadły dwa. Wszystkie te zrównania (4) są łatwe do pamiętania: wszystkie wyrażają ten sam związek do różnych boków i kątów przeniesiony, który stanowi trzecie zrównanie *główne*. Wszystkie kombinacye zachodzić mogące między dwoma kątami i dwoma bokami, iednym przyległym, a drugim przeciwległym; zawierają się w sześciu zrównaniach (4). Zrównanie fundamentalne (1), i z niego wyciągnięte trzy

główne (2), (3), (4), rozwiązuia wszystkie przypadki i pytania zachodzące w trójkacie kulistym, iako to niżej zobaczymy. Moźnaby na ich przystosowaniu skończyć trygonometrią kulistą iak zrobił *de la Grange*, z tym potrzebnym przydatkiem, żeby każdemu zrównaniu (4) nadadź wygodnieyszą do rachunku przez logarytmy postać, iakieśmy to zrobili na (1), (3). Ale tu zachodzi iedna ważna uwaga: zrównanie fundamentalne (1) wydało trzy główne: kombinacya czterech tych zrównań między sobą, czy nas nie przyprowadzi albo do nowych iakich prawd o trójkacie kulistym, albo do sposobów ułatwiaiących rachunek w rozwiązywaniu trójkąta? Rozbierzmy to zapytanie.

Zrównania między trzema bokami i trzema kątami razem.

§ 6. Poznawszy fundamentalne i główne trygonometrii zrównania, kombinujemy ie teraz z sobą, to iest: związki iedne łączmy z drugimi, przez rozmaite wartości tychże samych boków i kątów. Pierwsze zrównanie (3) daie

$$\begin{aligned} \text{dost } A &= \text{dosta.wst } B.\text{wst } C - \text{dost } B.\text{dost } C \\ \text{dosta.dost } A &= \text{dost}^2 a.\text{wst } B.\text{wst } C - \text{dosta.dost } B.\text{dost } C. \end{aligned}$$

Aże ze zrównań (1) $\text{dosta} = \text{dost } A.\text{wst } b.\text{wst } c + \text{dost } b.\text{dost } c$,

włożmy tę wartość za dosta w pierwszą stronę zrównania poprzedzaiącego, a otrzymamy

$$\begin{aligned} &\text{dost}^2 A.\text{wst } b.\text{wst } c + \text{dost } A.\text{dost } b.\text{dost } c \\ &= \text{dost}^2 a.\text{wst } B.\text{wst } C - \text{dosta.dost } B.\text{dost } C; \end{aligned}$$

zamienimy dostawy na wstawy: $\text{dost}^2 A = 1 - \text{wst}^2 A$, $\text{dost}^2 a = 1 - \text{wst}^2 a$, będzie