

ROZDZIAŁ DRUGI.

WYMIAR TROYKATA KULISTEGO: IEGO UŻYCIE W ROZMIERZANIU ZIEMI; PORÓWNANIE TEGO TROYKATA Z PROSTOKRESLNYM.

Powierzchnia Trójkąta kulistego.

§ 15. Jeżeli promień koła $= 1$, a przez π wyrazić chcemy stosunek połowy obwodu koła do tego promienia, $\pi = 3,141592653589\dots$

1. $\pi = 0,497149872694$: więc połowa obwodu koła, którego r promień, jest $r\pi$: a cały obwód $= 2r\pi$.

Powierzchnia koła wielkiego promienia r , jest $2r\pi \cdot \frac{1}{2}r = r^2\pi$.

Powierzchnia kuli jest cztery razy wziętą powierzchnią koła $= 4r^2\pi$.

Ponieważ znamy wymiar powierzchni kuli: trójkąt kulisty jest częścią tej powierzchni; więc gdybyśmy znali jego stosunek do powierzchni kuli; za pomocą proporcji znaleźlibyśmy powierzchnią tego trójkąta. Idzie więc iedynie o to, aby poznać, iak się ma powierzchnia iakiegokolwiek trójkąta kulistego złożonego z łuków koł wielkich, do powierzchni kuli.

Powiedzieliśmy w § 10 że trójkąt kulisty mający trzy kąty proste, jest równokątnym i równobocznym; że z ośmiu takich trójkątów składa się cała powierzchnia kuli; więc powierzchnia takiego trójkąta jest osmą częścią powierzchni kuli, czyli $\frac{r^2\pi}{2}$. Przedłużmy ramiona tego trójkąta póki się nie przetną; zrobi się taśma spiczasta z dwóch takich trójkątów przy zasadzie spoionych, i powierzchnia tej taśmy $= r^2\pi$: to jest, równa powierzchni koła wielkiego, a zatem czwartey części powierzchni kuli. Taśma ta w każdej swojej kończystości zamyka kąt prosty, który iak widzimy jest przepelnieniem dwóch kątów prostych w trójkącie. Nazywać ją odtąd będziemy *taśmą kąta prostego* albo 90° . Podzielimy tę taśmę na mniejsze taśmy spiczaste: ramiona tych mniejszych taśm będą zawsze pionowe na zasadę; bo spiczastość taśmy jest tej zasady biegunem § 10: więc każda ta mniejsza taśma z dwóch trójkątów równych przy zasadzie spoionych złożona, w każdej swojej spiczastości zawierać będzie kąt, równy przepelnieniu dwóch kątów prostych swojego trójkąta. Będzie się więc miała iey powierzchnia do powierzchni taśmy kąta prostego, iako kąt iey w spiczastości, do 90° : albo inaczey, iako kąt iey przepelnienia do 90 . Nazwawszy kąt spiczastości téy małej taśmy P , iey powierzchnią x , powierzchnią taśmy kąta prostego S , mamy

$$90^\circ: P = S:x, \quad x = \frac{P.S}{90^\circ} = \frac{r^2\pi P}{90^\circ}:$$

połowa tej taśmy czyli trójkąt kulisty prostokątny i równoramienny $\frac{r^2\pi.P}{2.90^\circ}$

Weźmy połowę taśmy kąta prostego za iedność,

to jest trójkąt równoboczny i równokątny, i z nim porównywaymy co do powierzchni insze trójkąty: będzie

$$\frac{r^2\pi}{2} : \frac{r^2\pi \cdot P}{2 \cdot 90} = 90^\circ : P.$$

Aże w każdym trójkącie kulistym, summa wszystkich kątów, jest większa od dwóch kątów prostych § 4; więc możemy każdy trójkąt kulisty ABC wystawić sobie, iako złożony z dwóch kątów prostych, i z przepełnienia: to przepełnienie równe $A+B+C-180^\circ$; a co to samo znaczy: możemy go sobie wystawić iako przerobiony na połowę taśmy spiczastej, mającey w wierzchołku kąt $A+B+C-180^\circ$.

Trzeba teraz dowieśdź: że każdy trójkąt kulisty jest równy co do powierzchni trójkątowi równoramiennemu złożonemu z boków będących ćwiartkami koła, i mającemu kąt w spiczastości, równy przepełnieniu dwóch kątów prostych.

fig. 3 Dwie płaszczyzny przecinające kulę przez środek przetną się nawzajem, i wydadzą na fig. 3 dwie taśmy spiczaste $ABCA'$, $ADEA'$, zupełnie sobie równe. Powierzchnia każdej taśmy podług tego cośmy wyżej powiedzieli $= 2A$, ieżeli A jest kątem $BAC = B'A'C$. Przetniemy kulę w poprzek trzecią płaszczyzną $BCDE$ przez środek przechodzącą; przetną się i taśmy: każdej część iedna leżeć będzie nad płaszczyzną czyli na półkuli wierzchniem; druga pod płaszczyzną, czyli na półkuli spodniem. Jedney taśmy dwie części wyrażmy przez k', k ; drugiey przez h', h : więc $2A = k + k' = h + h'$. Aże dwa koła wielkie przecinaiają się w odległości 180° , więc

$$\begin{aligned} AB + B'A' &= 180^\circ, & AB + AD &= 180^\circ; \\ AC + CA' &= 180^\circ, & AC + AE &= 180^\circ; \end{aligned}$$

a zatem

$$AD = BA', \quad AE = CA';$$

więc

$$ADE = B'A'C, \quad \text{czyli } h = k'.$$

$$AD + DA' = 180^\circ, \quad AD + AB = 180^\circ,$$

$$AE + EA' = 180^\circ, \quad AE + AC = 180^\circ;$$

zatem

$$AB = DA', \quad AC = EA';$$

więc

$$ABC = A'DE, \quad \text{czyli } k = h'; \quad \text{a zatem } k + h = 2A:$$

to jest: części dwóch taśm z kąta A wychodzące i rozciągnięte na półkuli; są równe taśmie całej, albo dwa razy wziętemu kątowi.

Na półkuli $FGHIE$, fig. 4, niech będzie iakikol- fig. 4
wiek trójkąt ABC ; przedłużmy z obu stron jego boki aż do 180° : w wierzchołku każdego kąta powstaną dwie części taśm, których summa równa dwa razy wziętemu kątowi, to jest $2A = FAG + KAJ$; $2C = H CJ + FCE$; $2B = EBK + GBH$. Te taśmy ogarną połowę powierzchni kuli, i dwa razy powierzchnią trójkąta ABC ; gdyż ten wchodzi w każdą summę taśm cząstkowych: więc będzie

$$2A + 2B + 2C = \frac{1}{2} \text{ Powierz. kuli } + 2 \text{ trójkąt } ABC.$$

Aż powierzchnia połowy kuli $= 4.90^\circ = 2.180^\circ$; więc powierzchnia

$$\text{trójkąta } ABC = A + B + C - 180^\circ.$$

Będzie się więc miał każdy trójkąt kulisty co do powierzchni, do trójkąta wziętego za iedność; iak kąt jego przepełnienia, do 90° : to jest będzie

$$\frac{r^2 \pi P}{2.90} = \frac{r^2 \pi}{2.90} (A + B + C - 180^\circ).$$

Mając drugi iakikolwiek trójkąt kulisty $A'B'C'$, iego przepełnienie P' ; będzie iego powierzchnia $\frac{r^2 \pi P'}{2.90}$; więc będą się miały powierzchnie tych dwóch trójkątów do siebie iak P do P' ; i ogólnie: *Powierzchnie trójkątów kulistych mają się do siebie, iak ich przepełnienia.* I stąd to powstało to krótkie ale dla poczynających trudne do gruntownego zrozumienia twierdzenie: *że powierzchnia trójkąta kulistego jest równa iego przepełnieniu dwóch kątów prostych;* gdzie powierzchnia trójkąta równokątnego i równobocznego wzięta za iedność.

To zwięzłe ale ciemne tłumaczenie się w Geometrii ma wielką nieprzyzwoitość: bo albo poczynających wprowadza w fałszywe pojęcie rzeczy, albo ich wprawia w trudności ciężkie do pokonania: któż to bowiem zrozumie, że kąt jest równy powierzchni, albo że powierzchnia równa kątowi? A przecież w wymiarach brył, płaszczyzn, i powierzchni przyjęto ten sposób mówienia, zwięzły prawda, ale ciemny i niebezpieczny. Pamiętać więc należy, że w tych skrótowych twierdzeniach, zawsze mowa jest o stosunku dwóch liczb ogólnych, z których iedna wypada z porównania powierzchni z powierzchnią, druga z porównania kąta z kątem. Dopiero tu wyłożone twierdzenie najpierwszy obiawił *Albert Girard* w dziele *Invention nouvelle en Algèbre*, ogłoszoném w Amsterdamie roku 1629, które ściśle dowiódł *Cavalleri* w książce *Directorium generale uranometricum*, drukowaney w Bononii roku 1632. Przypominał ie wszystkim naprzód *Jan Broski* Professor matematyki w akademii krakowskiej w § 24. k. 79. dzieła swego: *Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum*. *Dantisci* 1652. Po

nim *Jan Wallis* Geometra oxfordzki w dzieł swoich tomie II. k. 875. wydanych, w Oxfordzie roku 1693. Dowodzenie tego twierdzenia wyjęte z *Wallis* grunto-ownie i iasnie wyłożył sposobem syntetycznym *Le Gendre* w swojej Geometrii. Jeszcze ie lepiej wy-iaśnił *Delambre Abregé d'astronomie* p. 118. Tu wyłożone iest sposobem zdaie mi się prostym i ia-
snym.

Jest więc powierzchnia iakiegokolwiek tróykąta kulistego *ABC*

$$\frac{r^2 \pi}{180^\circ} (A + B + C - 180^\circ) = \frac{r^2 \cdot 3,14159265}{180^\circ} (A + B + C - 180^\circ)$$

W użyciu tey formuły to trzeba uważać; iż ieżeli prze-
pełnienie zamyka stopnie kołowe, minuty i sekundy;
trzeba minuty i sekundy wyrazić przez stopień, to
iest zamienić na ułamki dziesiętne stopnia: n. p. prze-
pełnienie $1^\circ 23' 30'' = 1,3833 = A + B + C - 180^\circ$, i

przez tę liczbę rozmnożyć $\frac{r^2 \pi}{180}$. Jeżeli zaś przepeł-

nienie zamyka tylko minuty i sekundy, trzeba se-
kundy zamienić na ułamki dziesiętne minut, tak
otrzymaną liczbę minut rozmnożyć przez $0,01666 = \frac{1}{60}$

i dopiero przez otrzymaną mnogość rozmnożyć $\frac{r^2 \pi}{180}$:

n. p. iest przepełnienie $= 6' 25'' = 6,4016$: więc

$6,4016 \times 0,01666 \frac{r^2 \pi}{180}$, iest powierzchnią tróykąta. Al-

bo inaczej: zamienić 180° na minuty $60 \cdot 180^\circ = 10800'$;

więc $\frac{r^2 \pi}{10800} 6,4016$ iest powierzchnią tróykąta.

Jeżeli nakoniec przepełnienie zamyka same sekun-

dy, trzeba tę liczbę sekund rozmnożyć przez $0,0002777 = \frac{1}{3600} = \frac{1}{60 \cdot 60}$, i dopiero przez otrzymaną stąd mnogość, rozmnożyć $\frac{r^2 \pi}{180}$. Albo krócej, trzeba 180° zamienić na sekundy $10800 \cdot 60 = 648000$, i przez liczbę sekund rozmnożyć $\frac{r^2 \pi}{648000}$, a otrzymamy powierzchnię trójkąta. Ponieważ użycie tej formuły zachodzi w rozmiarach ziemi i różnych krajów; gdzie przepełnienie otrzymujemy w samych sekundach; dla tego: że powierzchnia największych wymierzanych trójkątów jest nieznaczna w porównaniu powierzchni ziemskiej; więc formułę naszą wystawimy w następującym wyrazie

$$\frac{r^2 \cdot 3,14159265}{648000} (A + B + C - 180^\circ).$$

$$1. \pi = 0,49714987.$$

$$1. 648000 = 5,81157500.$$

$$\frac{4,68557487}{1} = 1. \text{wst } 1''.$$

Więc gdy przepełnienie zachodzi w sekundach, albo zamieniwszy je na sekundy, powierzchnia trójkąta kulistego wyraża się

$$r^2 \text{wst } 1'' (A + B + C - 180^\circ).$$

Jeżelibyśmy użyli tego wyrazu do wymiarów ziemskich, r wyrażać będzie promień ziemi: a ponieważ z wymiarów francuzkich ćwierć koła ziemskiego $= 10.000000$ metrów; więc $\frac{\pi r}{2} = 10.000000$
 $r = \frac{20.000000}{\pi}$, $1. r = 6,8038802$ w metrach: doda-

wszy logarytm stósunku metru do pręta francuzkiego (*toise*) 9,7101800 *Geogr. k. 192.* będzie w prętach francuzkich $1.r = 6,5140602$. Pręt francuzki równa się zupełnie trzem łokciom litewskim $1.r^2 \text{ wst } 1'' = 7,7136952$. Do tego logarytmu dodawszy logarytm przdpełnienia, otrzymamy logarytm powierzchni trójkąta kulistego na kuli promienia r , w prętach kwadratowych francuzkich. Przypuśćmy n. p. że przepełnienie w trójkącie ziemskim pokaże się $3''$: więc logarytm powierzchni trójkąta $= 8,1908164$. to jest: ten trójkąt kulisty byłby równy co do powierzchni trójkątowi prostokreślnemu, którego zasada jest 26000, a wysokość 11936,4 prętów francuzkich.

W tym przykładzie widzimy, iak wielkie bydź muszą na ziemi trójkąty, żeby się pokazało w nich przepełnienie w sekundach łuku. Przy wprawie i dokładnie zrobionych instrumentach, można w mierzeniu kątów popełnić omyłkę kilku sekund, która znaczny ma wpływ na powierzchnią trójkąta. Z drugiej strony bardzo ważną jest rzeczą znać to przepełnienie; bo placu wielkiego na ziemi nie godzi się brać za płaszczyznę. A chcąc z trójkątami kulistymi tak się obchodzić iak z prostokreślnymi za pomocą twierdzenia P. *Le Gendre*, o którym będzie niżej; trzeba nam z dokładnością znać trójkąta kulistego przepełnienie: więc znajomość przepełnienia w każdym przypadku jest potrzebna i ważna dla dokładnego wymiaru ziemi, i iakiegokolwiek na niej kraju. Tu wypada barzo ważne zapytanie: ze znanych dwóch boków i kąta między niemi zawartego w trójkącie kulistym, wynaleść jego przepełnienie.

*Wyrażenie linii trygonometrycznych przez łuki:
i dwoiakię tych łuków wartości.*

§ 16. Nim przystąpimy do rozwiązania tego zadania, należy nam sobie przypomnieć, że § 54 Alg

$$\text{wst } \nu = \nu - \frac{\nu^3}{2 \cdot 3} + \frac{\nu^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\nu^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{\nu^9}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \text{ i t. d.}$$

$$\text{dost } \nu = 1 - \frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\nu^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{\nu^8}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \text{ i t. d.}$$

Jeżeli pierwsze zrównanie rozdzielimy przez drugie, i wykonamy w tych szeregach zwyczajne dzielenie algebracyjne, pilnie bacząc na znaki, i na ułamki różnych mianowników, otrzymamy

$$\text{sty } \nu = \nu + \frac{\nu^3}{3} + \frac{2\nu^5}{3 \cdot 5} + \frac{17 \cdot \nu^7}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{62 \nu^9}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1382 \nu^{11}}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \text{i t. d.}$$

a rozdzieliwszy tym samym sposobem drugie przez pierwsze; otrzymamy

$$\text{dosty } \nu = \frac{1}{\nu} - \frac{\nu}{3} - \frac{\nu^3}{3 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{2\nu^5}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{\nu^7}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} - \text{i t. d.}$$

W wymiarze ziemi przez trójkąty, widzieć możemy wielką tych zrównań potrzebę; mamy bowiem do czynienia z łukami mierzącemi bardzo małe kąty w środku ziemi. Wymiary praktyczne dają nam wyprostowanie (*rectificatio*) tych łuków, czyli ich miarę w linii prostej; to jest w częściach promienia ziemskiego. Tu zachodzą dwoiakię wartości tych łuków: albo w częściach obwodu koła przez stopnie, minuty, i sekundy; albo w częściach promienia kuli n. p. prętach francuskich. Wypada nam co moment od iednych wartości przechodzić do drugich przez

sposób, którego nam się trzeba dobrze nauczyć. Sposób ten zależy na dwójakiej wartości, którą nadadź możemy promieniowi kuli: można go uważać albo jako linią prostą, albo jako wygięty na łuk swego koła. W tym drugim przypadku, wiemy że promień $= 57^{\circ}17'44'',8 = 206264'',8; 1.206264'',8 = 5,3144251 = l.(r)$ Przez r wyrażać zawsze będziemy promień jako linią prostą; przez (r) zaś promień wygięty na łuk, czyli wyrażony przez sekundy koła. Wszystkie linie trygonometryczne są linie proste wyrażone w częściach promienia wziętego za linią prostą: więc jeżeli je chcemy wykrzywić, czyli wyrazić przez części obwodu koła, to jest sekundy; trzeba je rozmnożyć przez (r) : i tak wst $b.(r) =$ łukowi koła w sekundach.

Jeżeli zaś linie trygonometryczne są wyrażone przez łuki, jak w poprzedzających zrównaniach wst ν ; sty ν , etc. trzeba te łuki wyprostować, żeby je mieć takiej samej miary, jak linia trygonometryczna, to jest w częściach promienia wziętego za linią prostą: więc potrzeba te łuki rozdzielić przez (r) ; bo jeżeli wst $b.(r) = \nu$, wst $b = \frac{\nu}{(r)}$.

Aże tablice linii trygonometrycznych uczą nas; że $1.206264,8 = l.(r) = l. \frac{1}{\text{wst } 1''}$, i że $l. \frac{1}{(r)} = l.\text{wst } 1''$; więc jeżeli chcemy linie proste wykrzywić na łuk, to jest wyrazić je w częściach obwodu koła n. p. w sekundach; trzeba je mnożyć przez $\frac{1}{\text{wst } 1''}$, będzie więc $\frac{\text{wst } b}{\text{wst } 1''} = \nu$. Jeżeli zaś chcemy łuki wyprostować, czyli wyrazić je w miarach linii prostej, trzeba je mnożyć przez $\text{wst } 1''$: i tak $\nu.\text{wst } 1'' = \text{wst } b$. Że zaś

$1.2 + 1.\text{wst } 1'' = 1.2 \text{ wst } 1'' = 1.\text{wst } 2''$; $1.3 + 1.\text{wst } 1'' = 1.3 \text{ wst } 1'' = 1.\text{wst } 3''$; i t. d. Stąd każdy zrozumie, że za $2 \text{ wst } 1''$, $3 \text{ wst } 1''$, $4 \text{ wst } 1''$ i t. d. można pisać $\text{wst } 2''$, $\text{wst } 3''$, $\text{wst } 4''$, i t. d.

Boki trójkątów na powierzchni ziemi wymierzanych są to łuki bardzo małych kątów w środku ziemi: chcąc przez nie wyrazić te kąty, należy boki rozdzielić przez promień czyli rozmnożyć przez $\text{wst } 1''$. Aże ziemia nie jest kulą tego samego wszędzie promienia; więc żeby te łuki przywieść do promienia służącego pewnemu kraiovi czyli pewney szerokości geograficznój miejsca, trzeba z figury ziemi wyciągnąć miarę iednego stopnia południka, rozdzielić przez tę miarę ieden stopień czyli $3600''$, i przez ten stosunek rozmnożyć kąt w środku ziemi przez bok trójkąta zawarty. Rozmierzając n. p. Litwę, trzeba by wziąć szerokość geograficzną średnią między Rygą i Grodnem $55^{\circ}18'45''$: figurę ziemi $\frac{1}{310}$; długość stopnia południkowego $57104,5$ prętów francuzkich. Więc kąt zawarty w środku ziemi przez bok trójkąta a , będzie $\frac{3600''}{57104,5} a.\text{wst } 1''$.

Wyrażenie przepętnienia przez boki i kąty.

§ 17. Przystąpmy teraz do zadania podanego na końcu § 15.

$A+B+C-180^{\circ}=P$, $\frac{1}{2}P=-[90^{\circ}-\frac{1}{2}(A+B+C)]$:
a zatem

$$\begin{aligned} \text{dosty } \frac{1}{2}P &= -\text{sty } \frac{1}{2}(A+B+C) \\ &= -\frac{\text{sty } \frac{1}{2}A + \text{sty } \frac{1}{2}(B+C)}{1 - \text{sty } \frac{1}{2}A \cdot \text{sty } \frac{1}{2}(B+C)} \quad \S 54 \text{ Alg.} \end{aligned}$$

włożmy w to zrównanie za $\text{sty } \frac{1}{2}(B+C)$ iey wartość z analogii *Nepera* § 7; otrzymamy

$$\text{dosty } \frac{1}{2} P = - \frac{\text{dost } \frac{1}{2}(b+c) \text{sty } \frac{1}{2} A + \text{dosty } \frac{1}{2} A \cdot \text{dost } \frac{1}{2}(b-c)}{\text{dost } \frac{1}{2}(b+c) - \text{dost } \frac{1}{2}(b-c)};$$

a odmieniwszy znaki w mianowniku, żeby drugą stronę zrobić dodatnią; położywszy za $\text{sty } \frac{1}{2} A = \frac{\text{wst } \frac{1}{2} A}{\text{dost } \frac{1}{2} A}$; za $\text{dosty } \frac{1}{2} A = \frac{\text{dost } \frac{1}{2} A}{\text{wst } \frac{1}{2} A}$; przywiódłszy ułamki do iednego mianownika; mieć będziemy

$$\text{dosty } \frac{1}{2} P = \frac{\text{dost } \frac{1}{2}(b+c) \text{wst } \frac{1}{2} A + \text{dost } \frac{1}{2}(b-c) \text{dost } \frac{1}{2} A}{\text{wst } \frac{1}{2} A \cdot \text{dost } \frac{1}{2} A [\text{dost } \frac{1}{2}(b-c) - \text{dost } \frac{1}{2}(b+c)]}.$$

Aże $\text{wst } \frac{1}{2} A \cdot \text{dost } \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \text{wst } A$; $\text{dost } \frac{1}{2}(b-c) - \text{dost } \frac{1}{2}(b+c) = 2 \text{wst } \frac{1}{2} b \cdot \text{wst } \frac{1}{2} c$; więc mianownik tego ułamku $= \text{wst } \frac{1}{2} b \cdot \text{wst } \frac{1}{2} c \cdot \text{wst } A$. Licznik zaś tego samego ułamku, jeżeli wyrazimy summy i różnice łuków, przez łuki pojedyncze; zamieni się na $\text{dost } \frac{1}{2} b \cdot \text{dost } \frac{1}{2} c + \text{wst } \frac{1}{2} b \cdot \text{wst } \frac{1}{2} c (\text{dost } \frac{1}{2} A - \text{wst } \frac{1}{2} A)$: że zaś $\text{dost } \frac{1}{2} A - \text{wst } \frac{1}{2} A = \text{dost } A$; § 51 *Algebry*; więc całe zrównanie rozdzielone przez $\text{dost } \frac{1}{2} b \cdot \text{dost } \frac{1}{2} c$ stanie się

$$\text{dosty } \frac{1}{2} P = \frac{1 + \text{sty } \frac{1}{2} b \cdot \text{sty } \frac{1}{2} c \cdot \text{dost } A}{\text{sty } \frac{1}{2} b \cdot \text{sty } \frac{1}{2} c \cdot \text{wst } A};$$

albo

$$\text{sty } \frac{1}{2} P = \frac{\text{sty } \frac{1}{2} b \cdot \text{sty } \frac{1}{2} c \cdot \text{wst } A}{1 + \text{sty } \frac{1}{2} b \cdot \text{sty } \frac{1}{2} c \cdot \text{dost } A} \quad (\text{L}).$$

b, c są dwa boki trójkąta; i kąt między niemi zawarty A , przez które wyraziliśmy przepelnienie P , i rozwiązaliśmy zadanie. *Delambre* w piękném dziele swoim *Base du systeme métrique Tome 1. p. 146.*

rozwiązuje to samo zadanie innym sposobem, wyrażając przepełnienie przez dwa boki i dwa kąty im przyległe. Ze zrównań przez siebie otrzymanych wyrachował tablicę, gdzie ze znanych dwóch boków i dwóch kątów, zaraz znaleźć można przepełnienie trójkąta. Ponieważ ta tablica bardzo jest do wymiaru kraiu przydatna; nie będzie bez pożytku poznać te zrównania. Rozdzielmy trójkąt ABC na dwa trójkąty prostokątne przez spuszczenie łuku pionowego z wierzchołka kąta A , na bok mu przeciwległy a . Kąt A rozdzieli się na dwa kąty A' , A'' ; tak, że $A = A' + A''$: boki b, c będą przeciwprostokątnymi. Będą więc dwa trójkąty $A'CD$, $A''BD$, D jest punkt na a , gdzie pada łuk pionowy. Każdy trójkąt da nam jedno zrównanie. Idzie o to, aby znaleźć linią trygonometryczną na kąty A', C , i na kąty A'', B , których summa da nam przepełnienie trójkąta ABC . Z własności trójkąta prostokątnego § 9 zrównanie (c), mamy.

$$\text{dosty } A' = \text{dost } b \cdot \text{sty } C = \text{sty } (90^\circ - A'),$$

$$\text{sty } C - \text{sty } (90^\circ - A') = \text{sty } C (1 - \text{dost } b) = 2 \text{ wst}^{2\frac{1}{2}} b \cdot \text{sty } C;$$

i w drugim trójkącie

$$\text{dosty } A'' = \text{dost } c \cdot \text{sty } B = \text{sty } (90^\circ - A'');$$

$$\text{sty } B - \text{sty } (90^\circ - A'') = \text{sty } B (1 - \text{dost } c) = 2 \text{ wst}^{2\frac{1}{2}} c \cdot \text{sty } B.$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{wst } C}{\text{dost } C} - \frac{\text{dost } A'}{\text{wst } A'} &= \frac{\text{wst } A' \text{ wst } C - \text{dost } A' \text{ dost } C}{\text{wst } A' \text{ dost } C} \\ &= \frac{-\text{dost}(A' + C)}{\text{wst } A' \text{ dost } C} = \frac{\text{wst} - (90^\circ - [A' + C])}{\text{wst } A' \text{ dost } C} \\ &= \frac{\text{wst}(A' + C - 90^\circ)}{\text{wst } A' \text{ dost } C} \end{aligned}$$

skąd wypada

$$\text{wst}(A' + C - 90^\circ) = 2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} b \text{wst } C \cdot \text{wst } A',$$

podobnie

$$\text{wst}(A'' + B - 90^\circ) = 2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} c \cdot \text{wst } B \cdot \text{wst } A''.$$

Druga strona zrównania jest koniecznie dodatna, więc i pierwsza taką być musi: a zatem w każdym trójkącie prostokątnym summa dwóch kątów ukośnych jest większa od 90° , i większa o łuk, którego wstawia $= 2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{wst } C \cdot \text{wst } A'$. Nazwiemy ten łuk x , więc

$$x = A' + C - 90^\circ; \quad A' = x + 90^\circ - C = 90^\circ - (C - x);$$

$$\text{wst } A' = \text{dost}(C - x)$$

$$\text{wst } x = 2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{wst } C \cdot \text{dost}(C - x)$$

$$= \text{wst}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{wst } 2C \cdot \text{dost } x + 2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{wst}^2 C \cdot \text{wst } x.$$

Rozdzieliwszy całe zrównanie przez $\text{dost } x$, i za $2 \text{wst}^2 C = 1 - \text{dost } 2C$, § 51 Algebry, włożywszy tę wartość; mieć będziemy

$$\begin{aligned} \text{sty } x &= \frac{\text{wst}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{wst } 2C}{\text{dost}^2 \frac{1}{2} b + \text{wst}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{dost } 2C} \\ &= \frac{\text{sty}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{wst } 2C}{1 + \text{sty}^2 \frac{1}{2} b \cdot \text{dost } 2C} \end{aligned} \quad (L').$$

Podobnie z drugim zrównaniem postępując, nazwawszy $y = A'' + B - 90^\circ$, wynaydziemy

$$\text{sty } y = \frac{\text{sty}^2 \frac{1}{2} c \cdot \text{wst } 2B}{1 + \text{sty}^2 \frac{1}{2} c \cdot \text{dost } 2B}.$$

Że zaś

$$x = A' + C - 90; \quad y = A'' + B - 90^\circ:$$

$$x + y = A' + A'' + B + C - 180^\circ = A + B + C - 180^\circ.$$

Przyszedliśmy do zrównań *Delambra*, i do drugiego sposobu na wynalezienie przepelnienia. Ale zastanówmy się nad tém; że kąty przepelnienia są bardzo małe w wymiarach praktycznych; że tablice linii trygonometrycznych są tylko przybliżenia do wartości prawdziwych, i że w siedmiu dziesiętnych notach, iak są zwyczajnie znane i używane, nie mogą nam dać małych różnic kątów ze znacznie przybliżoną dokładnością. Z czego się pokazuje, że zrównania (L), (L') nie na wiele nam się w wymiarach praktycznych przydadzą, jeżeli linii trygonometrycznych nie wyrazimy przez łuki w szeregach bardzo malejących, którychby początkowe terminy dały wartość znacznie do prawdziwej zbliżoną. Skąd wypada takie zadanie: mając daną linię trygonometryczną przez funkcją drugiey lub drugich linii trygonometrycznych; wyrazić ięć łuk przez szereg malejący: n. p. mając sty $x = m. \text{wsty}$, wyrazić x przez funkcją m i kąta y .

Wyrażenie łuku przez funkcją linii trygonometrycznych.

§ 18. *De la Grange* rozwiązał dopiero wymienione zadanie w aktach akademii Berlińskiej na rok 1776. k. 214. *Solutions de quelques problèmes d'astronomie sphérique par le moyen des series*. Rozwiązał ie za pomocą funkcyi z wykładnikami uroionemi: bo wiemy z § 55 *Algebry*, że linie trygonometryczne wyrazić się mogą przez funkcyę, których wykładnikiem iest łuk pod postacią uroioną. Z cze-