

$$x = A' + C - 90; \quad y = A'' + B - 90^\circ:$$

$$x + y = A' + A'' + B + C - 180^\circ = A + B + C - 180^\circ.$$

Przyszedłszy do zrównań *Delambra*, i do drugiego sposobu na wynalezienie przepełnienia. Ale zastanowmy się nad tém; że kąty przepełnienia są bardzo małe w wymiarach praktycznych; że tablice linii trygonometrycznych są tylko przybliżenia do wartości prawdziwych, i że w siedmiu dziesiętnych notach, iak są zwyczajnie znane i używane, nie mogą nam dać małych różnic kątów ze znacznie przybliżoną dokładnością. Z czego się pokazuje, że zrównania (L), (L') nie na wiele nam się w wymiarach praktycznych przydadzą, jeżeli linii trygonometrycznych nie wyrazimy przez łuki w szeregach bardzo malejących, którychby początkowe terminy dały wartość znacznie do prawdziwej zbliżoną. Skąd wypada takie zadanie: mając daną linię trygonometryczną przez funkcją drugiej lub drugiej linii trygonometrycznych; wyrazić ię łuk przez szereg malejący: n. p. mając sty  $x = m \cdot \text{wsty}$ , wyrazić  $x$  przez funkcją  $m$  i kąta  $y$ .

*Wyrażenie łuku przez funkcją linii trygonometrycznych.*

§ 18. *De la Grange* rozwiązał dopiero wymienione zadanie w aktach akademii Berlińskiej na rok 1776. k. 214. *Solutions de quelques problèmes d'astronomie sphérique par le moyen des series*. Rozwiązał ie za pomocą funkcyi z wykładnikami uroionemi: bo wiemy z § 55 *Algebry*, że linie trygonometryczne wyrazić się mogą przez funkcye, których wykładnikiem iest łuk pod postacią uroioną. Z cze-

go się uczymy, że funkcyje urojone są charakterystycznym języką analitycznego wyrazem, ile razy od ilości algebraicznych przechodzić chcemy do przestępnych. A zatem jako w tym języku  $\pm$  nie zawsze znaczy dodawanie i odciąganie; tak  $a\sqrt{-1}$  nie zawsze znaczy niedorzeczność.

Dowiedliśmy naprzykład w Algebrze k. 256 kiedy  $k=1$ , że

$$l.(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{5}z^5 - \text{i t. d.}$$

Położmy  $z = \frac{1}{z}$ ;

$$l.(1 + \frac{1}{z}) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{4z^4} + \frac{1}{5z^5} - \text{i t. d.}$$

$$l.(1+z) - l.(1 + \frac{1}{z}) = l.\frac{z+z^2}{1+z} = l.z;$$

więc

$$l.z = z - z^{-1} - \frac{1}{2}(z^2 - z^{-2}) + \frac{1}{3}(z^3 - z^{-3}) - \text{i t. d.}$$

Niech będzie

$$z = e^{\nu\sqrt{-1}} \quad \text{więc} \quad l.z = \nu\sqrt{-1};$$

a zatem

$$\begin{aligned} \nu\sqrt{-1} = e^{\nu\sqrt{-1}} - e^{-\nu\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}\{e^{2\nu\sqrt{-1}} - e^{-2\nu\sqrt{-1}}\} \\ + \frac{1}{3}\{e^{3\nu\sqrt{-1}} - e^{-3\nu\sqrt{-1}}\} \end{aligned}$$

Rozdzielmy całe to zrównanie przez  $2\sqrt{-1}$  i za funkcyje wykładników urojonych, pokładźmy ich wartości z § 55 Algebry; będzie

$$\frac{1}{2}\nu = \text{wst } \nu - \frac{1}{2} \text{wst } 2\nu + \frac{1}{3} \text{wst } 3\nu - \frac{1}{4} \text{wst } 4\nu \text{ i t. d.}$$

ten wzór jest wielkiego w wyższych rachunkach użycia.

Tak dopiero przytoczony przykład, iak zadanie tu rozważane daia się ieszcze rozwiązać przez rachunek różnicowania i całkowania; bo różnicowanie kaźdey linii trygonometryczney składa się z różnicowania łuku, i z funkcyi drugiey linii trygonometryczney. I tą naprzód drogą wpadł *de la Grange* na iedno twierdzenie, które go przywiodło do rozwiązania rozlrzasanego tu zadania. Nie iest tu miejsce do tłumaczenia dwóch tych sposobów; bo zachodzące tu przypadki potrafimy rozwiązać przez zrównania i sposoby podane w Algebrze § 51, 53, 55.

Jak zrównanie (L), tak zrównanie (L') wyrażaia się pod tą postacią:

$$\text{sty } x = \frac{m.\text{wst } y}{1 + m.\text{dost } y}$$

położywszy w (L) za  $m = \text{sty } \frac{1}{2}b.\text{sty } \frac{1}{2}c$ , za  $y = A$ ; w (L') zaś  $m = \text{sty } \frac{1}{2}b$ ,  $y = 2C$ . Idzie więc o to, żeby  $x$  wyrazić przez funkcją  $m$ ,  $y$ . Dowiedliśmy w § 55 Algebry; że

$$x = \text{sty } x - \frac{1}{3} \text{sty}^3 x + \frac{1}{5} \text{sty}^5 x - \frac{1}{7} \text{sty}^7 x + \text{ i t. d.}$$

z ułamkiem  $\frac{m.\text{wst } y}{1 + m.\text{dost } y}$  wykonaymy dzielenie,

$$\begin{aligned} \text{sty } x &= m\text{wst } y - m^2\text{wst } y.\text{dost } y \\ &+ m^3\text{wst } y.\text{dost}^2 y - m^4\text{wst } y.\text{dost}^3 y + m^5\text{wst } y.\text{dost}^4 y - \\ - \frac{1}{3}\text{sty}^3 x &= -\frac{1}{3}m^3\text{wst}^3 y + m^4\text{wst}^3 y.\text{dost } y - m^5\text{wst}^3 y.\text{dost}^2 y + \\ \frac{1}{5}\text{sty}^5 x &= +\frac{1}{5}m^5\text{wst}^5 y - \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

Ponieważ  $m$  jest ułamkiem albo liczbą bardzo małą,  $\text{wst } y$  koniecznie ułamkiem; więc ten szereg w czterech początkowych terminach da wartość bardzo bliską prawdy, i nad  $m^4$  tego szeregu posuwać nie należy. Aże według § 51, 53 Algebry  $\text{wst } y \cdot \text{dost } y = \frac{1}{2} \text{wst } 2y$ ;  $3 \text{wst } y \cdot \text{dost }^2 y - \text{wst }^3 y = 3 \text{wst } y - 4 \text{wst }^3 y = \text{wst } 3y$ ,  $\text{wst }^3 y \cdot \text{dost } y - \text{wst } y \cdot \text{dost }^3 y = \text{wst } y \cdot \text{dost } y (\text{wst }^2 y - \text{dost }^2 y) = - \text{wst } y \cdot \text{dost } y (\text{dost }^2 y - \text{wst }^2 y) = - \frac{1}{2} \text{wst } 2y \cdot \text{dost } 2y = - \frac{1}{4} \text{wst } 4y$  i t. d. więc

$$x = m \text{wst } y - \frac{1}{2} m^2 \text{wst } 2y + \frac{1}{3} m^3 \text{wst } 3y - \frac{1}{4} m^4 \text{wst } 4y + \text{etc.}$$

wszystkie te terminy szeregu należy rozdzielić przez  $\text{wst } 1''$ , żebyśmy  $x$  otrzymali w sekundach łuku: to jest

$$x = \frac{m \cdot \text{wst } y}{\text{wst } 1''} - \frac{m^2 \text{wst } 2y}{\text{wst } 2''} + \frac{m^3 \text{wst } 3y}{\text{wst } 3''} - \frac{m^4 \text{wst } 4y}{\text{wst } 4''} + \text{i t. d.}$$

Z tego równania, wyrazić jeszcze potrafimy  $x$ , kiedy

$$\text{będzie sty } x = \frac{m \text{dost } u}{1 + m \text{wst } u}; \text{ bo położywszy } y = 90^\circ - u,$$

$$\text{wst } y = \text{dost } u; 2y = 180^\circ - 2u; \text{ a zatem } \text{wst } 2y = \text{wst } 2u;$$

$$3y = 270^\circ - 3u; \text{ wst } 3y = - \text{dost } 3u; 4y = 360^\circ - 4u,$$

$$\text{wst } 4y = - \text{wst } 4u; \text{ § 52 Algebry: przeto na}$$

$$\text{sty } x = \frac{m \text{dost } u}{1 + \text{wst } u}; \text{ będzie}$$

$$x = \frac{m \text{dost } u}{\text{wst } 1''} - \frac{m^2 \text{wst } 2u}{\text{wst } 2''} - \frac{m^3 \text{dost } 3u}{\text{wst } 3''} + \frac{m^4 \text{wst } 4u}{\text{wst } 4''} \text{ i t. d.}$$

gdzie odmiana znaków zaczawszy się w drugim terminie, co dwa terminy szeregu następować będzie.

Gdyby zaś dane było równanie  $\text{sty } x = \frac{m \text{wst } y}{1 - m \text{dost } y}$ , wykonawszy dzielenie sposobem wyżej skazanym, i

stąd pozbierawszy wartości na  $\frac{1}{3}\text{sty}^3x$ ;  $\frac{1}{5}\text{sty}^5x$ ; i t. d. otrzymamy

$$x = \frac{m \text{wst } y}{\text{wst } 1''} + \frac{m^2 \text{wst } 2y}{\text{wst } 2''} + \frac{m^3 \text{wst } 3y}{\text{wst } 3''} + \frac{m^4 \text{wst } 4y}{\text{wst } 4''} + \text{i t. d.}$$

z czego dałaby się jeszcze wyciągnąć wartość na łuk  $x$ , gdyby podane było zrównanie  $\text{sty } x = \frac{m \text{dost } u}{1 - m \text{wst } u}$ ; kładąc  $y = 90^\circ - u$ ;  $\text{wst } y = \text{dost } u$ ;  $2y = 180^\circ - 2u$ ;  $\text{wst } 2y = \text{wst } 2u$ ;  $3y = 270^\circ - 3u$ ;  $\text{wst } 3y = -\text{dost } 3u$ ;  $4y = 360^\circ - 4u$ ;  $\text{wst } 4y = -\text{wst } 4u$  i t. d.

$$x = \frac{m \text{dost } u}{\text{wst } 1''} + \frac{m^2 \text{wst } 2u}{\text{wst } 2''} - \frac{m^3 \text{dost } 3u}{\text{wst } 3''} - \frac{m^4 \text{wst } 4u}{\text{wst } 4''} + \text{etc.}$$

Przystósujemy to teraz do naszych zrównań (L), (L'): to jest położmy w (L)  $m = \text{sty}^{\frac{1}{2}}b \cdot \text{sty}^{\frac{1}{2}}c$ ;  $y = A$ , będzie:

$$\frac{1}{2}P = \frac{\text{sty}^{\frac{1}{2}}b \cdot \text{sty}^{\frac{1}{2}}c}{\text{wst } 1''} \text{wst } A - \frac{\text{sty}^{2\frac{1}{2}}b \cdot \text{sty}^{2\frac{1}{2}}c}{\text{wst } 2''} \text{wst } 2A +$$

$$\frac{\text{sty}^{3\frac{1}{2}}b \cdot \text{sty}^{3\frac{1}{2}}c}{\text{wst } 3''} \text{wst } 3A - \text{i t. d.}$$

a podwoiwszy potem wartość tego szeregu, otrzymamy przepełnienie  $P$  w sekundach. Co do zrównań (L'),  $m = \text{sty}^{2\frac{1}{2}}b$   $y = 2C$ : w drugim zrównaniu  $y$ ,  $m = \text{sty}^{2\frac{1}{2}}c$ ,  $y = 2B$ .

$$x = \frac{\text{sty}^{2\frac{1}{2}}b}{\text{wst } 1''} \text{wst } 2C - \frac{\text{sty}^{4\frac{1}{2}}b}{\text{wst } 2''} \text{wst } 4C + \frac{\text{sty}^{6\frac{1}{2}}b}{\text{wst } 3''} \text{wst } 6C - \text{etc.}$$

$$y = \frac{\text{sty}^{2\frac{1}{2}}c}{\text{wst } 1''} \text{wst } 2B - \frac{\text{sty}^{4\frac{1}{2}}c}{\text{wst } 2''} \text{wst } 4B + \frac{\text{sty}^{6\frac{1}{2}}c}{\text{wst } 3''} \text{wst } 6B - \text{etc.}$$

Obadwa te ostatnie szeregi do siebie dodane, daią przepełnienie trójkąta, gdyż

$$x = A' + C - 90^\circ; \quad y = A'' + B - 90^\circ;$$

$$x + y = A + B + C - 180^\circ.$$

*Delambre* z tych dwóch szeregów wyrachował tablicę, za pomocą której mając dwa boki i dwa kąty im przyległe w trójkącie, wynaydziemy zaraz przepelnienie bez żadnego rachunku. Ta tablica służy na Francją, gdzie stopień południkowy = 57020 prętów francuzkich. To zaś iest do uważania w rachunku *Delambra*: *Base du Système métrique tome I. p. 147.* że oni wyrażając współczynniki wst<sub>2</sub>*B*, wst<sub>2</sub>*C* przez liczby, a chcąc zmniejszyć szereg liczb w tak małym ułamku, mnoży go przez 10.000: wypadki potem rachunku dzieli przez 10.000: czyli od cechy logarytmu odciąga 4, i wypadają mu sekundy na tablicę. Nie używa do swej tablicy tylko pierwszego terminu szeregu  $\frac{\text{sty } 2\frac{1}{2}b}{\text{wst } 1''}$  wst<sub>2</sub>*C*, i  $\frac{\text{sty } 2\frac{1}{2}c}{\text{wst } 1''}$  wst<sub>2</sub>*B* iako barzo dostatecznego. Weźmy tu przykład *Delambra* i rachujemy go naszym sposobem. Ponieważ wst<sub>1</sub>'' = sty<sub>1</sub>'' można wziąć iedno za drugie.

$$\frac{\text{sty } 2\frac{1}{2}b}{\text{wst } 1''} = \left\{ \frac{3600\frac{1}{2}b}{57020} \right\}^2 \text{wst } 1'' = \left\{ \frac{9.b}{285,1} \right\}^2 \text{wst } 1''$$

$$\frac{\text{sty } 2\frac{1}{2}c}{\text{wst } 1''} = \left\{ \frac{9.c}{285,1} \right\}^2 \text{wst } 1'';$$

więc

$$\begin{aligned} A + B + C - 180^\circ &= \left\{ \frac{9.b}{285,1} \right\}^2 \text{wst } 1'' \cdot \text{wst } 2C \\ &+ \left\{ \frac{9.c}{285,1} \right\}^2 \text{wst } 1'' \cdot \text{wst } 2B: \end{aligned}$$

u *Delambra* te zrównania są:

$$A+B+C-180^{\circ}=0'',00004831.b^2\text{wst } 2C \\ + 0'',00004831.c^2\text{wst } 2B.$$

Niech będzie  $b=18.000$  prętów francuzkich, kąt  $C=30^{\circ}$ . Niech  $c=20.000$  p. f.  $B=40^{\circ}$ .

$\begin{array}{r} 1.g = 0,9542425 \\ c.l. 285,1 = 7,5450028 \\ 1.b = 4,2552725 \\ \hline 2,7545178 \\ 2 \\ \hline 5,5090356 \\ 1.\text{wst } 1'' = 4,6855749 \\ 1.\text{wst } 2C = 9,9375306 \\ \hline 0,1321411 \quad 1'',355 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0,9542425 \\ 7,5450028 \\ 1.c = 4,3010300 \\ \hline 2,8002753 \\ 2 \\ \hline 5,6005506 \\ 1.\text{wst } 1'' = 4,6855749 \\ 1.\text{wst } 2B = 9,9933515 \\ \hline 0,2794770 \quad 1'',903 \end{array}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

dodane do siebie dają przepełnienie  $3'',25$ : co się zupełnie zgadza z tablicą. Rachujemy teraz podług *Delambra*.

$\begin{array}{r} 1.0'',00004831 = 5,6840370 \\ 1.b^2 = 8,5105450 \\ 1.\text{wst } 2C = 9,9375306 \\ \hline 4,1321126 - 4 \quad 1'',35. \end{array}$	$\begin{array}{r} 5,6840370 \\ 1.c^2 = 8,6020600 \\ 1.\text{wst } 2B = 9,9933515 \\ \hline 4,2794485 - 4 \quad 1'',90. \end{array}$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Stosując ten sam przykład do Litwy, trzeba wziąć stopień południka  $57104,5$  p. f., więc

$$A+B+C-180^{\circ} = \left\{ \frac{3600 \frac{1}{2} b}{57104,5} \right\}^2 \text{wst } 1''.\text{wst } 2C \\ + \left\{ \frac{3600 \frac{1}{2} c}{57104,5} \right\}^2 \text{wst } 1''.\text{wst } 2B:$$

wykonawszy działanie w liczbach, znajdziemy na ieden termin  $1'',352$ ; na drugi  $1'',897$ : a zatem przepeł-

nienie 3",249. Skąd widzimy, że tablica rachowana na Francją, mogłaby nam bez znaczney omyłki służyć do wymiarów w Litwie. Trzymając się zaś ścisłości, będzie na Litwę logarytm stateczny  $\frac{1800}{57104,5} = 8,4986022$ ; ale przy jego użyciu trzeba brać boki całe trójkąta.

W tym rachunku to jeszcze iest do uważania, że § 16. sty  $v = v + \frac{1}{3}v^3$  i t. d. z tego szeregu bierze się tylko pierwszy wyraz, iako dostateczny; bo wyższe jego potęgi stają się ułamkami tak małemi; że przez żadne praktyczne wymiary nie iesteśmy zdolni ich wartości ocenić.

### *Wynalezienie położenia geograficznego miejsc ziemskich przez wymiary trygonometryczne.*

§ 19. W rozmiarze trygonometrycznym ziemi zachodzi to nayważniejsze zadanie: *znając położenie geograficzne, to iest długość i szerokość pewnego punktu ziemi, tudzież jego odległość od punktu drugiego; wynaleźć tego ostatniego długość i szerokość.*

Na fig. a Tab. I. niech  $A$  wyraża biegun świata,  $ABM$  południk miejsca  $B$ ;  $ACN$  południk miejsca  $C$ : iest więc  $AB$  dopełnieniem szerokości geograficznej punktu  $B$ ;  $AC$  takimże dopełnieniem w punkcie  $C$ : Znając długość i szerokość punktu  $B$ , iego odległość  $BC$  od punktu  $C$ , i kąt  $ABC$  który czyni też odległość z południkiem  $B$ , czyli *poziomoluk* (azimuth)  $C$ , mierzony na poziomie  $B$ ; trzeba wynaleźć  $AC$ , kąt  $BAC$ , i jeszcze kąt  $ACB$  czyli *poziomoluk*  $B$  widziany na poziomie  $C$ .

Ponieważ bok  $BC$  z wymiarów trygonometrycznych iest dany w prętach n. p. francuzkich albo



w łokciach litewskich, potrzeba go zamienić na łuk: do czego potrzeba znać figurę ziemi i promień koła przystającego w miejscu  $B$ . Powiedzieliśmy wyżej § 15. że wzięwszy  $\frac{1}{316}$  za figurę ziemi, długość stopnia południkowego jest na Litwę 57104,5 prętów francuzkich; a zatem na Litwę łuk  $1' = 951,742$  pr. fr.  $1'' = 15,8623$  p. f. rozdzieliwszy  $BC$  przez tę ostatnią liczbę, otrzymamy na Litwę  $BC$  w sekundach. Nie wiele zaś oddalamy się od prawdy, kiedy część powierzchni ziemskiej w okolicy  $B$ , nie tylko w kierunku południka; ale i w jakimkolwiek, bierzemy za kulę tego samego promienia. Od  $C$  spuściwszy łuk koła wielkiego  $CD$  pionowy na południk  $ABM$ ; w trójkącie prostokątnym  $BCD$  mamy

$$\text{wst } BC. \text{wst } CBD = \text{wst } CD; \quad \text{sty } BC. \text{dost } CBD = \text{sty } BD.$$

$AB + BD$  jest dopełnieniem szerokości punktu  $C$ ; kąt  $CAB$  jest różnicą długości między punktami  $B, C$  i  $\text{wst } CAB = \frac{\text{wst } BC. \text{wst } ABC}{\text{wst}(AB + BD)}$ . A jeżeli szerokość miejsca  $B$  nazwiemy  $H$ ,  $BD = dH$ ; będzie  $AB = 90^\circ - H$ ;  $AB + BD = 90^\circ - (H + dH)$ .

*Przykład.* Niech będzie  $BC = 3640$  prętów fran.  $H = 54^\circ 41'$ ;  $ABC = 120^\circ 30'$ : a zatem

$$CBD = 59^\circ 30'; \quad \frac{3640}{15,8623} = 229'',47 = 3' 49'',5 = \delta:$$

$$\begin{aligned} & \text{l. wst } \delta = 7,0463564 + & \text{l. sty } \delta = 7,0463567 + \\ & \text{l. wst } CBD = 9,9353204 + & \text{l. dost } CBD = 9,7054689 + \\ & \text{l. wst } CD = 6,9816768; 3' 17'': & \text{l. sty } BD = 6,7818256; 1' 56'' = \delta H: \end{aligned}$$

więc

$$AC = 35^\circ 20' 56''; \text{ a zatem szerokość } C, 54^\circ 39' 4''$$

$$1. \text{ wst } \delta = 7,0463564 +$$

$$1. \text{ wst } ABC = 9,9353204 +$$

$$c. 1. \text{ wst } AC = 0,2376563 +$$

1. wst  $A = 7,2193331$ ; kąt  $A \ 5' 42''$  na różnicę długości.

Że zaś w tym rachunku zachodzą łuki bardzo małe; bezpieczniej byłoby zamiast ich linii trygonometrycznych, wynajdować same łuki, kładąc n. p. za wst  $\delta = \delta - \frac{1}{6}\delta^3$  § 16.

W trójkącie  $ABC$  mamy

dost  $AC = \text{dost } AB \cdot \text{dost } BC + \text{wst } AB \cdot \text{wst } BC \cdot \text{dost } B$ ,  
czyli

$$\text{wst}(H + dH) = \text{wst } H \cdot \text{dost } \delta + \text{dost } H \cdot \text{wst } \delta \cdot \text{dost } B.$$

Jeżeli rozwiniemy ostatnie zrównanie  $\text{wst}(H + dH) = \text{wst } H \cdot \text{dost } dH + \text{dost } H \cdot \text{wst } dH$ : i za  $\text{dost } dH = 1 - 2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} dH$ ; za  $\text{wst } dH = 2 \text{wst} \frac{1}{2} dH \cdot \text{dost} \frac{1}{2} dH$ ; za  $\text{dost } \delta = 1 - 2 \text{wst}^2 \frac{1}{2} \delta$ , włożymy ich wartości; przyjdziemy do zrównania

$$\text{wst} \frac{1}{2} dH \cdot \text{dost} \frac{1}{2} dH - \text{wst}^2 \frac{1}{2} dH \cdot \text{sty } H = \frac{1}{2} \text{wst } \delta \cdot \text{dost } B - \text{wst}^2 \frac{1}{2} \delta \cdot \text{sty } H$$

nazwiemy —  $\text{sty } H = a$ ;  $\frac{1}{2} \text{wst } \delta \cdot \text{dost } B - \text{wst}^2 \frac{1}{2} \delta \cdot \text{sty } H = b$ ;

i rozdzielimy całe zrównanie przez  $\text{dost}^2 \frac{1}{2} dH$ ; pa-

miętając, że  $\frac{1}{\text{dost}^2 \frac{1}{2} dH} = \text{sie}^2 \frac{1}{2} dH = 1 + \text{sty}^2 \frac{1}{2} dH$ ; a

wypadnie nam dosyć często zechodzące w Astronomii zrównanie

$$(a - b) \text{sty}^2 \frac{1}{2} dH + \text{sty} \frac{1}{2} dH = b:$$

które rozwiązawszy, otrzymamy

$$\text{sty} \frac{1}{2} dH = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4b(a - b)}}{2(a - b)}.$$

Trzeba rozwinąć na szereg nieskończony funkcją pod  
znakiem pierwiastkowym, żeby przyyść do zrównania

$$\text{sty}^{\frac{1}{2}}dH = b - b^2(a-b) + 2b^3(a-b)^2 - 5b^4(a-b)^3 + 2 \cdot 7 \cdot b^5(a-b)^4 - \text{i t. d.}$$

albo téż, żeby się pozbydź znaku pierwiastkowego,  
połóżmy  $2\sqrt{(a-b)b} = \text{sty } y$ ;  $4(a-b)b = \text{sty}^2 y$ ;  
 $1 + \text{sty}^2 y = \text{sie}^2 y = \frac{1}{\text{dost}^2 y}$ ; a wypadnie nam

$$\text{sty}^{\frac{1}{2}}dH = -\frac{1}{2(a-b)} = \frac{1}{2(a-b)\text{dost} y} = \frac{\text{wst}^{\frac{1}{2}} y}{(a-b)\text{dost} y}:$$

maiąc styczną; otrzymamy łuk za pomocą znanego  
§ 55 Algebry, wzoru

$$\frac{1}{2}dH = \frac{\text{sty}^{\frac{1}{2}}dH}{\text{wst } 1''} - \frac{\text{sty}^{\frac{3}{2}}dH}{\text{wst } 3''} + \frac{\text{sty}^{\frac{5}{2}}dH}{\text{wst } 5''} - \text{i t. d.}$$

Weźmy za przykład wyżej położone liczby  
 $B = 120^\circ 30'$ ,  $\delta = 3' 49'' \cdot 5$ ,  $\frac{1}{2}\delta = 1' 55''$ ,  $a = -1,4114$ ;  
szukamy  $b, y$ , i wartości na  $\text{sty}^{\frac{1}{2}}dH$ .

1. wst $\delta = 7,0463564 +$	1. wst $\frac{1}{2}\delta = 6,7462727 +$
1. dost $B = 9,7054689 -$	1. wst $\frac{1}{2}\delta = 3,4925454 +$
c. l. 2 = <u>9,6989700 +</u>	1. sty $H = 0,1496747 +$
1. (1) <u>6,4507953 -</u>	1. (2) <u>3,6422201 +</u>

$$(1) 0,000282455 -; (2) 0,000000438 +; (1) - (2) = 0,000282893 -$$

więc blisko

$$b = -0,0003; \quad a - b = -1,4111$$

1. $(a-b) = 10,1495578 -$	półowa 1. $(a-b)b = 8,3005953 +$
1. $b = 6,4516329 -$	1. 2 = <u>0,3010300 +</u>
1. $(a-b)b = 16,6011907 +$	1. sty $y = 8,6016253 +$

$$y = 2^{\circ} 17' 18''$$

$$\frac{1}{2}y = 1^{\circ} 8' 39''$$

$$1. (a-b) = 0,1495578 -$$

$$1. \text{wst}^2 \frac{1}{2}y = 6,6006656 +$$

$$1. \text{dost} y = 9,9996518 +$$

$$c. l. (3) = 9,8507904 -$$

$$1. (3) \quad 0,1492096 -$$

$$1. \text{sty} \frac{1}{2} dH = 6,4514560 -$$

—  $\frac{1}{2} dH = 58''$ ; —  $dH = 1' 56''$  iak wyżey. Wypadło  $dH$  odjemne; bo punkt  $C$  ma szerokość mniejszą iak  $B$ : szerokość więc  $C = 54^{\circ} 39' 4''$ .

Wynaleźliśmy wyżey kąt  $A$ , czyli różnicę długości, przez pierwsze zrównanie główne: kąt  $BCA$  czyli poziomoluk  $B$  mierzony na poziomie  $C$  wynaleśdź się może wraz z kątem  $A$  przez analogie *Nepera. Delambre* w swojej *Astronomii* Tom III k. 550. 551. przez ten sposób wyciągnięone podaje na to wzory. Ale ponieważ w trójkącie  $ABC$  (fig. a T. I.) mamy już znane wszystkie boki, i kąt  $ABC$ ; więc przez nowe podane tu w § 2 zrównania  $(1), (1''), (1''')$ , gdzie nie zachodzą tylko stycznne i wstawy, możemy wygodnie to zadanie rozwiązać.

$$\text{sty} \frac{1}{2} A = \text{sty} \frac{1}{2} B \frac{\text{wst} \frac{1}{2} (a + c - b)}{\text{wst} \frac{1}{2} (b + c - a)},$$

$$\text{sty} \frac{1}{2} C = \text{sty} \frac{1}{2} B \frac{\text{wst} \frac{1}{2} (a + c - b)}{\text{wst} \frac{1}{2} (a + b - c)}.$$

W naszym przykładzie

$$a = 3' 49'',5 \quad b = 35^{\circ} 20' 56'' \quad c = 35^{\circ} 19' 0''$$

a zatem

$$\frac{1}{2} (a + c - b) = 56'',75; \quad \frac{1}{2} (b + c - a) = 35^{\circ} 18' 3'',25$$

$$\frac{1}{2} B = 60^{\circ} 15' \quad \frac{1}{2} (a + b - c) = 2' 52'',75.$$

$$1. \text{wst} 56'',75 = 6,4395280$$

$$1. \text{wst} 56'',75 = 6,4395280$$

$$1. \text{sty} \frac{1}{2} B = 0,2429480$$

$$1. \text{sty} \frac{1}{2} B = 0,2429480$$

$$c. l. \text{wst}(35^{\circ} 18' 3'',25) = 0,2381695$$

$$1. \text{wst}(2' 52'',75) = 3,0770085$$

$$1. \text{sty} \frac{1}{2} A = 6,9200455$$

$$1. \text{sty} \frac{1}{2} C = 9,7594845$$

skąd wypada

$$\frac{1}{2}A = 2' 51'', \quad A = 5' 42''. \quad \frac{1}{2}C = 29^\circ 53' 18'', \\ C = 59^\circ 46' 36''.$$

Wytknięty tu nowy sposób ma jeszcze to za sobą, że gdybyśmy dla większej ścisłości chcieli szukać łuków samych mając ich stycznice; łatwo tego dokażemy

za pomocą wyżej skazanego wzoru  $\frac{1}{2}dH = \frac{\text{sty} \frac{1}{2}dH}{\text{wst } 1''}$

i t. d. Mamy więc bardzo ważne w *Geodezyi* wyższej zadanie, prostym dosyć sposobem przez trygonometrią kulistą rozwiązane. Gdybyśmy mieli do czynienia z podobnym rachunkiem pod jakąkolwiek inną szerokością, i przyszło nam zamieniać łuk  $BC$  dany w prętach francuzkich, na sekundy kóła; na to znajdują się wygodne tablice w *Tomie III Base du Système métrique* wyrachowane przez *Delambra*.

*Porównanie trójkąta kulistego z prostokreślnym.*

§ 20. Nie będzie tu od rzeczy rozważyć jeszcze twierdzenie *Euklidesa* przywiedzione w § 1, gdzie się dowiodło; że

$$\text{wst } A = \frac{d}{2bc}; \text{ znajdziemy podobnie, że } \text{wst } B = \frac{d}{2ac};$$

$\text{wst } C = \frac{d}{2bc}$ , gdzie wartość na  $d$  pokaże się ta sama we wszystkich kątach  $A, B, C$ , skąd wypada

$$a : b = \text{wst } A : \text{wst } B \quad (\text{I}) \text{ twierdzenie.}$$

$$a + b : a - b = \text{wst } A + \text{wst } B : \text{wst } A - \text{wst } B :$$

przeło

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{wst} \frac{1}{2}(A+B) \text{dost} \frac{1}{2}(A-B)}{\text{dost} \frac{1}{2}(A+B) \text{wst} \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{\text{sty} \frac{1}{2}(A+B)}{\text{sty} \frac{1}{2}(A-B)} \quad (\text{II})$$

jeszcze to samo twierdzenie *Euklidesa* § 1 daie

$$2bc \text{ dost } A = b^2 + c^2 - a^2,$$

$$2ac \text{ dost } B = a^2 + c^2 - b^2;$$

więc odciągawszy pierwsze od drugiego, otrzymamy

$$c(a.\text{dost } B - b.\text{dost } A) = a^2 - b^2.$$

$a.\text{dost } B$ ;  $b.\text{dost } A$ ; są dwa odcinki boku  $c$ , zrobione przez pionową spuszczoną z kąta  $C$ , temuż bokuwi przeciwległego: a zatem

$$c : a + b = a - b : a.\text{dost } B - b.\text{dost } A \quad (\text{III}).$$

Wszystkie więc trzy twierdzenia trygonometrii płaskiej (I), (II), (III) daia się z tego samego początku wyciągnąć, z którego wypadło zrównanie fundamentalne trygonometrii kulistej.

Jeszcze to samo twierdzenie § 1 nas uczy: że

$$\text{dost } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$1 - \text{dost } A = 2\text{wst}^2 \frac{1}{2} A = \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$$

$$1 + \text{dost } A = 2\text{dost}^2 \frac{1}{2} A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc}$$

rozebrawszy różnicę kwadratów na swoje mnożniki, i iedno zrównanie przez drugie rozdzieliwszy, otrzymamy

$$\text{sty}^2 \frac{1}{2} A = \frac{(a + b - c)(a + c - b)}{(a + b + c)(b + c - a)};$$

podobnie

$$\begin{aligned} \operatorname{sty}^{2\frac{1}{2}} B &= \frac{(a+b-c)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+c-b)} \\ \operatorname{sty}^{2\frac{1}{2}} C &= \frac{(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+b-c)} \end{aligned} \quad (\text{IV}).$$

To piękne twierdzenie (IV) trygonometrii płaskiej mało tam znane, dowiódł *syntetycznie* Robert Simson w swojej trygonometrii do początków *Euklidesa* przydanej (*Patrz początki Euklidesa przełożone od Czecha wydanie 2gie k. 469*). Wyciągnąłem tu jego dowód analityczny ze zrównania przytłoczonego w § 1, a przez to okazałem; iż obiedwie trygonometrye dają się przez *analizę* wyprowadzić z tej samej własności trójkąta prostokreślnego, którego dowiódł *Euklides* w podaniu XII, i XIII, Xięgi II.

Zrównanie (IV) wprost rozwiązuje zadanie trygonometrii płaskiej: mając trzy boki trójkąta, wynaleśdź jego kąty. Jeżeli jedno z tych zrównań rozdzielimy przez drugie, i za kwadraty weźmiemy ich pierwiastki; mieć będziemy

$$\frac{\operatorname{sty}^{\frac{1}{2}} A}{\operatorname{sty}^{\frac{1}{2}} B} = \frac{a+c-b}{b+c-a}, \quad \frac{\operatorname{sty}^{\frac{1}{2}} A}{\operatorname{sty}^{\frac{1}{2}} C} = \frac{a+b-c}{b+c-a}, \quad \frac{\operatorname{sty}^{\frac{1}{2}} B}{\operatorname{sty}^{\frac{1}{2}} C} = \frac{a+b-c}{a+c-b};$$

zrównania podobne do tych, któreśmy w § 2 podali (I), (I<sub>II</sub>), (I<sub>III</sub>); z tą różnicą, że w trójkącie prostokreślnym boki, zamieniają się w kulistym na wstawy boków: co już wiemy skądinąd.

fig. 5 W trójkącie prostokreślnym *ABC* fig. 5; jeżeli z któregośkolwiek kąta spuścimy pionową na bok mu przeciwny, będzie powierzchnia tego trójkąta  $\frac{1}{2}ac \operatorname{wst} B = \frac{1}{2}bc \operatorname{wst} A = \frac{1}{2}ab \operatorname{wst} C$ . Uważamy n. p. pionową z kąta *C*, spuszczoną na bok *c*; będą odcinki

boku  $c$ ,  $b \text{ dost } A$ ,  $a \text{ dost } B$ : ich różnica  $a \text{ dost } B - b \text{ dost } A$ .  
Wiemy już, że:

$$a^2 - b^2 = c(a \text{ dost } B - b \text{ dost } A);$$

jest zaś

$$b = \frac{a \cdot \text{wst } B}{\text{wst } A}; \text{ więc } a^2 - b^2 = ca \frac{\text{wst}(A - B)}{\text{wst } A};$$

$$\frac{(a^2 - b^2) \text{wst } A}{\text{wst}(A - B)} = ca, \quad c = \frac{b \cdot \text{wst } C}{\text{wst } B};$$

a zatem

$$\frac{1}{2} ba \text{wst } C = \frac{1}{2} \frac{(a^2 - b^2) \text{wst } A \cdot \text{wst } B}{\text{wst}(A - B)} = \text{powierz. trójkąta.}$$

W trójkącie prostokreślnym

$$a : b = \text{wst } A : \text{wst } B;$$

w kulistym zaś

$$\text{wst } a : \text{wst } b = \text{wst } A : \text{wst } B;$$

aż biorąc tylko dwa wyrazy szeregu § 16

$$\text{wst } a = a - \frac{1}{6} a^3, \quad \text{wst } b = b - \frac{1}{6} b^3;$$

więc blisko w kulistym

$$\text{wst } A : \text{wst } B = a(1 - \frac{1}{6} a^2) : b(1 - \frac{1}{6} b^2):$$

skąd wypada

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{wst } A(1 - \frac{1}{6} b^2)}{\text{wst } B(1 - \frac{1}{6} a^2)} \quad (M).$$

Kąt między łukami, większy jest od kąta między cięciwami; więc żeby trójkąt kulisty zamienić na prostokreślny z bokami tej samej długości; kąty pierwszego być powinny zmniejszone pewną ilością nieznaną, którą nazwiemy  $x$ : będzie z (M),



$$\text{wst } A(1 - \frac{1}{6}b^2) : \text{wst } B(1 - \frac{1}{6}a^2) = \text{wst}(A-x) : \text{wst}(B-x) = a : b \\ = \text{wst } A.\text{dost } x - \text{dost } A.\text{wst } x : \text{wst } B.\text{dost } x - \text{dost } B.\text{wst } x.$$

Rozmnożywszy skrajne i średnie, i rozdzieliwszy całe zrównanie przez  $\text{dost } x$ , otrzymamy

$$\frac{1}{6}(a^2 - b^2)\text{wst } A.\text{wst } B = \text{sty } x.\text{wst}(A-B) \\ - (\frac{1}{6}b^2\text{wst } A.\text{dost } B - \frac{1}{6}a^2\text{dost } A.\text{wst } B)\text{sty } x :$$

drugi termin na drugiej stronie zrównania, iako bardzo mały, możemy opuścić, zostanie się

$$\text{sty } x = \frac{1}{6}(a^2 - b^2) \frac{\text{wst } A.\text{wst } B}{\text{wst}(A-B)} = \frac{1}{3} \text{Powierz. trójkąta.}$$

Aże zamieniwszy trójkąt kulisty na prostokreślny tej samej długości boków, powierzchnia 1go będzie blisko równa powierzchni drugiego; bośmy dowiedli w § 18, że blisko  $P = 2\text{sty } \frac{1}{2}b \text{sty } \frac{1}{2}c \text{wst } A = 2\frac{1}{2}b\frac{1}{2}c\text{wst } A = \frac{1}{2}bc\text{wst } A = \frac{1}{2}ba\text{wst } C$ . Powierzchnia zaś trójkąta kulistego jest  $P = A + B + C - 180^\circ$ , to jest przepelnieniu; więc  $x = \frac{1}{3}P$ . Skąd wypada to ważne i piękne twierdzenie: *Jeżeli w trójkącie kulistym złożonym z małych boków względem powierzchni kuli, każdy kąt zmniejszymy trzecią częścią przepelnienia; zamienimy go na trójkąt prostokreślny tej samej powierzchni: i obchodzić się z nim możemy, iak z trójkątem prostokreślnym.* Choćby nawet boki trójkąta zamykały jeden lub dwa stopnie, to jest 15 albo 30 mil; jeszcze to twierdzenie z wielkim do prawdy przybliżeniem użyte bydz może w wymiarach ziemi: i rozwiązanie trójkątów kulistych przywodzi do trygonometrii płaskiej. Winniśmy to piękne twierdzenie znakomitemu Geometrze francuzkiemu *Le Gendre*, który ie naprzód podał bez dowodu w aktach akademii nauk Paryzkiej roku 1787. Dowiódł go potem

w r. 1798 sposobem tu wyłożonym i objaśnionym. W tym samym roku *De la Grange* dał inny dowód tego twierdzenia, który przyjął *Le Gendre* w swojej geometryi wydania 5. k. 416. *Delambre Base du système métrique Tome II* p. 709 podał także inny dowód tego twierdzenia zależący na tém: że zmniejszywszy każdy kąt trójkąta kulistego trzecią częścią przepełnienia, przychodzi do zrównania:  $\text{wst } a : \text{wst } b = \text{wst } A : \text{wst } B$ ; skąd wnosi, że trójkąt prostokreślny którego summa kątów  $= 180^\circ$ , jest blisko równy trójkątowi kulistemu, mającemu boki tej samey długości z prostokreślnym.

Ta własność trójkąta prostokreślnego, że w nim summa wszystkich kątów jest zawsze stała i oznaczona; prowadzi do następujących zrównań. Ponieważ

$$A + B + C = 180^\circ, \quad C = 180^\circ - (A + B);$$

$$\text{sty } C = -\text{sty}(A + B) = -\frac{\text{sty } A + \text{sty } B}{1 - \text{sty } A \cdot \text{sty } B}$$

z czego wypada:

$$\text{sty } A + \text{sty } B + \text{sty } C = \text{sty } A \cdot \text{sty } B \cdot \text{sty } C \quad (2)$$

$$1 = \text{dosty } B \cdot \text{dosty } C + \text{dosty } A \cdot \text{dosty } C + \text{dosty } A \cdot \text{dosty } B:$$

i znowu gdy w zrównaniu (2) wyrazimy stycznne przez wstawy i dostawy, wypadnie

$$\text{wst } A \cdot \text{wst } B \cdot \text{wst } C = \text{wst } A \cdot \text{dost } B \cdot \text{dost } C$$

$$+ \text{wst } B \cdot \text{dost } A \cdot \text{dost } C + \text{wst } C \cdot \text{dost } A \cdot \text{dost } B:$$

$$\text{dost } C \cdot \text{wst}(A + B) + \text{wst } C \cdot \text{dost}(A - B) = 2 \text{wst } A \text{wst } B \text{wst } C.$$

Z tych jeszcze wyprowadzićby można inne częstokroć w rachunku analitycznym przydatne tam, gdzie zachodzą trójkąty prostokreślne: ale to już do zamiaru teraźniejszego pisma nie należy.