



POLITECHNIKA WARSZAWSKA

[Odb. 2:]

PRACE NAUKOWE • BUDOWNICTWO • Nr 49

Maria Ozga-Zielińska

METODY OPISU I ANALIZY SYSTEMÓW
HYDROLOGICZNYCH

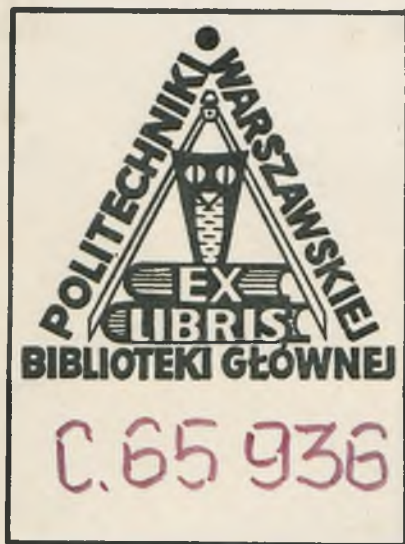
[Praca hab.]



WYDAWNICTWA POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ • WARSZAWA 1976

Spis rzeczy – Содержание – Contents

M a r i a O z g a - Z i e l i ń s k a — Metody opisu i analizy systemów hydrologicznych 3
Методы описания и анализа гидрологических систем
The methods of description and analysis of hydrological systems



556.001.07:043

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

METODY WSKAZANIA WARTOŚCI PRZEMIAN
WYDOBYWKOWYCH

PRACE NAUKOWE
BUDOWNICTWO Nr 49



WARSZAWA 1976

WYDAWNICTWA POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

REDAKTOR DZIAŁOWY

Prof. mgr inż. Władysław Danilecki

Redaktor techniczny – Halina Wilochowa



WYDAWNICTWA POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ, 00-665 WARSZAWA, UL. NOWOWIEJSKA 24
ИЗДАТЕЛЬСТВА ВАРШАВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
00-665 ВАРШАВА, ул. НОВОВЕЙСКАЯ 24
WARSAW TECHNICAL UNIVERSITY PUBLICATIONS, 00-665 WARSAW, NOWOWIEJSKA 24

Nakł. 200+30. Ark. wyd. 5,25. Ark. druku 7,75. Papier offset. kl. III 70 g. Oddano do druku
28. X. 1976 roku. Druk ukończono w grudniu 1976 r. Zamówienie № 1262. J-101. Cena zł 8.-

Wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Warszawskiej, W-wa, ul. Kosińska 12/16.

33-1-1977-D

Maria Ozga - Zielińska

Instytut Inżynierii Środowiska

METODY OPISU I ANALIZY SYSTEMÓW HYDROLOGICZNYCH

Rękopis dostarczono 14. 6. 1976

Główną ideą pracy jest, po krótkim omówieniu dotychczas stosowanych w hydrologii metod modelowania (rozdz.1.2) podanie ogólnych podstaw modelowania systemów (rozdz.1.3) oraz przedstawienie metod matematycznego opisu systemów sterowania w przestrzeni stanu (rozdz.2) i w postaci różnego rodzaju zależności typu "wejście-wyjście" (rozdz.3). Jako propozycja zastosowania do hydrologii nowej metodyki opisu systemów został opracowany integralny model zlewni w postaci równań stanu (rozdz.2.4.2) oraz transmitancji (rozdz.3.4.4). Oba zaproponowane modele pozwalają uwzględnić wpływ gospodarczej działalności człowieka na zmianę naturalnego obiegu wody w zlewni. Możliwość stosowania różnych form opisu dla tego samego systemu wymaga określenia warunków sterowalności i obserwalności systemu oraz własności i wzajemnych związków pomiędzy poszczególnymi postaciami opisu (rozdz.4). Jako uzupełnienie metod opisu systemów potraktowano rozdz.5 dotyczący problemów identyfikacji i weryfikacji systemów hydrologicznych. W rozdz.6 podano wnioski i uwagi końcowe sformułowane pod kątem głównego przedmiotu pracy, a więc analizy i możliwości matematycznego opisu systemów hydrologicznych jako naturalnych systemów przyrodniczych, na które wpływa działalność gospodarcza człowieka.

1. WPROWADZENIE

1.1. CEL I ZAKRES PRACY

W ostatnich latach opracowano, w Polsce i za granicą, wiele różnorodnych modeli hydrologicznych i wydaje się, że proces ten coraz bardziej potęguje się. Opracowano modele "deterministyczne" i stochastyczne, liniowe i nieliniowe, o parametrach skupionych i rozłożonych, modele poszczególnych procesów i

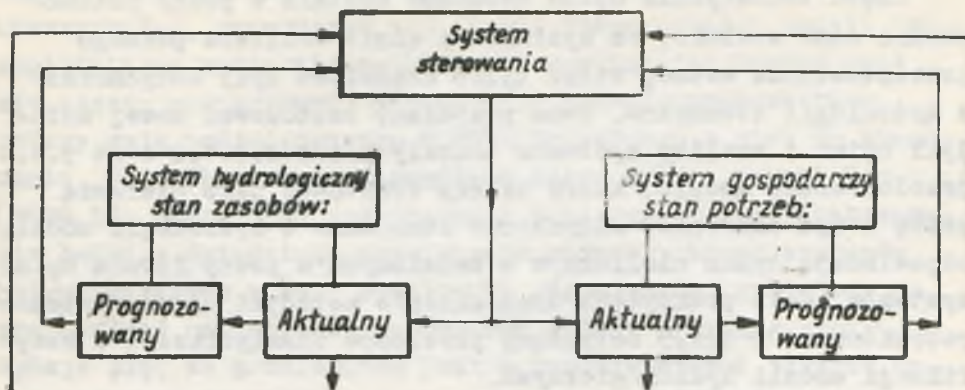
całej zlewni, modele o czasie dyskretnym i ciągłym, modele konceptualne, genetyczne itd. W tej różnorodności modeli (uwzględniając wszystkie możliwe ich kombinacje) trudno jest się często zorientować, szczególnie hydrologom-praktykom, którzy mają podjąć decyzję o wyborze jednego z nich do stosowania. Na problem ten szczególnie ostro zwraca uwagę D o o g e [1974,b], postulując jednocześnie konieczność usystematyzowania badań w dziedzinie modelowania matematycznego systemów hydrologicznych w celu stworzenia odpowiedniej podbudowy do racjonalnej metodologii zastosowań modeli hydrologicznych. Wydaje się, że problem ten jest w rzeczywistości jeszcze poważniejszy a to z uwagi na brak nie tylko metodologii zastosowań, ale również braku opracowań w zakresie metodologii tworzenia modeli matematycznych systemów hydrologicznych. Ogólna metodologia tworzenia modeli matematycznych systemów (czyli teoria systemów) istnieje, a więc należy ją stopniowo adaptować do hydrologii uwzględniając specyfikę zjawisk hydrologicznych. Pozwoli to hydrologom stosować teoretycznie uzasadnione modele, jak również stworzy możliwości wykorzystania badań i doświadczeń w zakresie modelowania systemów z innych dziedzin nauki.

Większość stosowanych dotychczas w hydrologii modeli oparta jest na zależnościach empirycznych, których postać jest najczęściej fizycznie nieuzasadniona, a zależy głównie od "gustu" projektanta modelu, a często po prostu od chęci stworzenia nowej zależności, innej niż dotychczas stosowana. Wydaje się, że taka droga tworzenia "nowych" modeli powinna być jak najszybciej zaniechana.

Wobec powyższego można przypuszczać, że podjęta w niniejszej pracy próba pewnego uporządkowania metodyki modelowania w hydrologii przyniesie pożytek zarówno pracownikom naukowym jak i hydrologom praktykom zajmującym się projektowaniem i stosowaniem modeli systemów hydrologicznych. Główną ideą pracy jest, po bardzo krótkim omówieniu stosowanych w hydrologii metod modelowania (rozdz.1.2), podanie ogólnych podstaw modelowania systemów (rozdz.1.3) oraz przedstawienie metod opisu systemów sterowania wraz z przykładowymi zastosowaniami ich do opisu systemów hydrologicznych (rozdz. 2,3 i 4).

Część teoretyczna opisu systemów została w pracy potraktowana dość szeroko, co wynikało z chęci możliwie pełnego przedstawienia metod, które tylko częściowo były dotychczas w hydrologii stosowane. Jako przykłady zastosowań nowej metodyki opisu i analizy systemów zostały w rozdz.2.4.2 oraz 3.4.4 przedstawione modele, które należy traktować jako pierwszą próbę w tym zakresie. Dotychczas stosowane w hydrologii modele odpowiadają tylko nielicznym z omówionych w pracy formom opisu systemów. Jako praktyczne uzupełnienie metodyki opisu systemów potraktowano rozdz.5 dotyczący problemów identyfikacji i weryfikacji modeli hydrologicznych.

Przedstawiona w pracy metodyka opisu systemów hydrologicznych traktuje je jako systemy sterowania. Problem ten wymaga krótkiego wyjaśnienia. Hydrologia jako nauka stosowana, stanowiąca narzędzia opisu naturalnego środowiska wodnego dla potrzeb techniki (głównie gospodarki wodnej) musi operować tym samym językiem opisu co dyscypliny ją wykorzystujące. Dotychczasowe modele systemów wodno-gospodarczych uwzględniają czynniki hydrologiczne (przepływy rzeczne, zasoby wód gruntowych itp.) jedynie jako znane wejścia o charakterze zdeterminowanym lub losowym (historyczne, prognozowane czy generowane). Natomiast zupełnie nie uwzględnia się zwrotnego wpływu sterowania w systemach wodno-gospodarczych na procesy hydrologiczne, a przecież jest oczywiste, że sterowanie to zmienia naturalny ruch i akumulację wody w systemie hydrologicznym, a więc nim częściowo steruje. Ponadto występuje wówczas sprzężenie zwrotne tzn. zmiany w systemie hydrologicznym wpływają na zmianę sterowania w systemie wodno-gospodarczym (rys.1.1). Nie uwzględnianie tych faktów i ciągle przyjmowanie danych hydrologicznych jako elementów kształtujących się i określanych poza systemem wodno-gospodarczym może doprowadzić, szczególnie na obszarach małych lub deficytowych w wodę, do jaskrawej niezgodności pomiędzy wielkościami hydrologicznymi spodziewanymi (wyliczonymi w oparciu o materiał historyczny), a rzeczywistymi, kształtującymi się pod wpływem aktualnego sterowania obiektami gospodarki wodnej. Wprowadzenie więc dla modeli zjawisk hydrologicznych opisów stosowanych przy modelowaniu systemów sterowania staje się oczywistą koniecznością. Należy



Rys.1.1. Schemat blokowy sterowania w systemie wodno-gospodarczym

zaznaczyć, że systemy hydrologiczne z natury swojej są systemami sterowania, z tym że sterowanie to [W. F i n d e i - s e n , 1974] wynikające z działania innych systemów (np. systemów meteorologicznych, czy hydrologicznych przy dopływie wody z sąsiadujących obszarów) ma charakter sterowania naturalnego, niezależnego od człowieka i można by go nazwać sterowaniem biernym w porównaniu ze sterowaniem czynnym realizowanym przez człowieka. Tak więc potraktowanie systemów hydrologicznych jako systemów sterowania jest w pełni merytorycznie uzasadnione. Ponadto pozwoli to na stosowanie jednolitego opisu zarówno dla systemów hydrologicznych już obecnie sterowanych czynnie jak i dla tych, które na razie są sterowane biernie, ale w razie potrzeby sterowanie czynne będzie mogło być do nich wprowadzone. Pozwoli to ponadto na zbudowanie, tak potrzebnych szczególnie dla gospodarki wodnej obszarów rolniczych, modeli hydrologiczno-gospodarczych. Problem sterowalności systemów został szerzej omówiony w rozdz.4.3.

1.2. MODELOWANIE ZJAWISK HYDROLOGICZNYCH

Wydaje się, że dla pełniejszego określenia roli, zadań i możliwości wykorzystania modeli będących przedmiotem niniej-

szej pracy, celowe będzie przedstawienie, chociażby szkicowe, całej problematyki modelowania zjawisk hydrologicznych.

W hydrologii stosowane są zarówno modele fizyczne jak i matematyczne, jednak z wyraźną przewagą tych ostatnich. Ograniczoność stosowania modeli fizycznych wynika głównie z trudności zbudowania w warunkach laboratoryjnych modelu zlewni, którego "podobieństwo" z oryginałem byłoby na tyle adekwatne aby wyniki badań przeprowadzonych na modelu mogły być odniesione do zlewni rzeczywistej. Istnieje jednak pewna, chociaż niewielka, liczba modeli fizycznych zarówno całej zlewni jak i modeli poszczególnych jej komponentów dla badania wybranych procesów, szczególnie spływu powierzchniowego [np. R.A. Grace, P.S. Eagleson, 1967; V.T. Chow, 1971; J. Muzik, 1974].

Istotnym problemem modelowania fizycznego w hydrologii jest właściwa interpretacja uzyskiwanych wyników oraz określenie możliwości ich wykorzystywania. Można chyba przyjąć stwierdzenie, że są to przede wszystkim modele do badań teoretycznych, do sprawdzania pewnych hipotez teoretycznych odnoszących się do wyidealizowanych warunków tzn. do warunków dla jakich wyprowadzone są wszystkie zależności w hydrodynamice. Natomiast nie są to modele, z których uzyskiwane wyniki byłyby bezpośrednio przydatne dla praktyki, gdyż jest niemożliwe zbudowanie modelu będącego modelem w zmniejszonej skali zlewni hydrologicznej, z całą złożonością jej budowy i warunków przebiegu poszczególnych procesów. Nie znaczy to jednak, że są to modele mało przydatne, przeciwnie modele fizyczne, szczególnie modele komponentów zlewni za pomocą których można badać pojedyncze procesy lub ich grupy, są istotnymi i niezastąpionymi narzędziami badań z punktu widzenia tworzenia modeli matematycznych w skali "mikro" tzn. modeli zjawisk opisywanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Wydaje się, że w oparciu o niektóre modele fizyczne można by również określać pewne parametry, które za pomocą odpowiednich transformacji byłyby następnie przenoszone z modelu na oryginał.

Za pewien rodzaj modeli fizycznych można uważać poletka i małe zlewnie eksperymentalne, tzn. obszary na których poza obserwowaniem (pomiarom) naturalnego przebiegu procesów

hydrologicznych prowadzony jest eksperyment czynny [Representative..., 1970; U. S o c z y ń s k a , 1973; K.J. G r e g o r y , D.E. W a l l i n g , 1973]. Właśnie ta możliwość prowadzenia eksperymentu czynnego jest jedną z głównych zalet modeli fizykalnych. Naturalnie charakter i zakres eksperymentu czynnego będzie inny dla modeli laboratoryjnych niż dla poletek doświadczalnych, czy dla zlewni eksperymentalnych. Eksperyment czynny w laboratorium pozwala na prowadzenie badań przy kontrolowanych warunkach początkowych i brzegowych (włączając czasowo - przestrzenną zmienność opadów) oraz pozwala na wielokrotne powtarzanie eksperymentu przy tych samych warunkach. Ograniczoność tak szeroko pojętego eksperymentu czynnego w odniesieniu do zlewni eksperymentalnych, jest w istotny sposób rekompensowana poprzez fakt prowadzenia badań na obiekcie będącym oryginałem.

Powyższe uwagi odnośnie modeli fizykalnych, zamieszczone w pracy dotyczącej modelowania matematycznego, wynikają głównie z możliwości, a nawet konieczności korzystania z wyników badań na modelach fizykalnych dla sprawdzenia i wstępnej identyfikacji modeli matematycznych, a szczególnie modeli matematycznych w skali mikro. W tym też chyba zawiera się istotna i praktyczna celowość prowadzenia trudnych i kosztownych badań na fizykalnych modelach laboratoryjnych i polowych.

Odnośnie modeli matematycznych to istnieją dwa ich rodzaje różniące się stosowanymi technikami rozwiązania. Posiadając model w postaci opisu matematycznego należy go rozwiązać względem interesujących nas zmiennych. Rozwiązanie to drogą analityczną jest często bardzo trudne, lub wręcz niemożliwe. Stosuje się wówczas bądź przybliżone metody numeryczne wykorzystując maszyny cyfrowe, bądź też buduje się model analogowy tzn. dobiera się inny pod względem fizycznym, lecz łatwiejszy do badania (pomiaru) obiekt, którego matematyczny opis działania w zakresie interesujących nas charakterystyk jest identyczny z opisem działania oryginału. Najczęściej analogami są modele elektryczne lub hydrauliczne, które są łatwe w budowie i pomiarze. Modele analogowe opierają się więc na analogii opisu matematycznego działania (zachowania się) różnych obiektów [R.H. C a n n o n , 1973; J. P u ł a c z e w -

s k i , K. S z a c k a , A. M a n i t i u s , 1974]. Tak więc, jeden ze sposobów rozwiązania to rozwiązanie analityczne lub numeryczne, natomiast drugi, oparty na analogii matematycznej jaka występuje w równaniach ruchu dla różnych środowisk fizycznych i wynikających z niej analogiach fizycznych, prowadzi do rozwiązań przy wykorzystaniu modeli analogowych. W hydrologii oba te podejścia są reprezentowane, chociaż dominuje podejście pierwsze.

Modele analogowe są w hydrologii najczęściej stosowane przy modelowaniu ruchu wody w gruncie, głównie w strefie saturacji [np. N.I. D r u ż i n i n , 1956; W.C. W a l t o n , 1969; Z. Ś m i e t a ń s k i , 1969], chociaż są próby wykorzystania ich przy modelowaniu systemu całej zlewni hydrologicznej [np. T. I s h i h a r a , Y. I s h i h a r a , 1961; M.H. D i s k i n 1967]. Zastosowanie modelu analogowego jest bardzo korzystne w przypadku systemów skomplikowanych, gdy ich opis matematyczny jest trudny do analitycznego rozwiązania (np. nieliniowe równania różniczkowe), wówczas możemy w sposób doświadczalny zbadać działanie modelu analogowego i odnieść wyniki do działania oryginału. Przy stosowaniu modeli analogowych należy badany oryginał i model bardzo dokładnie przestudiować w kategoriach ich środowisk fizycznych [R.H. C a n n o n , 1973], gdyż model jest uproszczeniem oryginału i może wykazywać analogię tylko do niektórych jego cech. Modelowanie analogowe wymaga specjalnych, zupełnie innych niż modelowanie cyfrowe, technik i w niniejszej pracy nie będzie rozpatrywane.

Liczba hydrologicznych modeli matematycznych rozwiązywanych analitycznie lub numerycznie przy użyciu maszyn cyfrowych jest pokaźna i trudno byłoby wymienić nawet przykładowo te najbardziej interesujące. Pewne porównania i analizy dla poszczególnych grup modeli zostały przedstawione w kilku artykułach przeglądowych, których wykaz znaleźć można w pracy [D o o g e ' a 1974, b].

Poza omówionymi powyżej rodzajami modeli, których wyróżnienie wynikało z bardzo ogólnych kryteriów, można wyodrębnić wiele innych rodzajów (klas) modeli stosując różnorodne szczegółowe kryteria. W każdej dziedzinie nauki są na ogół stosowane

nieco odmienne klasyfikacje modeli. Wynika to z jednej strony ze specyfiki danej dyscypliny zaś z drugiej strony ze stosowania różnych kryteriów klasyfikacji w zależności od chęci uwypuklenia tych czy innych cech i różnic. W pracy [M. Ozga - Zielińska, 1975] podano propozycję klasyfikacji modeli matematycznych stosowanych w hydrologii. Wydaje się, że przyjęte kryteria klasyfikacji (tablica 1.1) można uznać, z punktu widzenia specyfiki i różnorodności modelowania zjawisk hydrologicznych, za właściwe i rzeczywiście istotne.

T a b l i c a 1.1

Klasyfikacja modeli matematycznych zjawisk hydrologicznych

Lp.	Kryterium klasyfikacji	Rodzaj (klasa) modelu			
1.	Struktura modelu i przedmiot modelowania	modele pojedynczych procesów	modele komponentów	modele integralne	modele globalne
2.	Rola czynnika czasu	modele statyczne		modele dynamiczne	
3.	Wartości poznawcze modelu	modele genetyczne	modele symptomatyczne	modele tendencyjne	
4.	Jednoznaczność uzyskiwanych wyników	modele deterministyczne	modele probabilistyczne		
5.	Stosowane podejście oraz metody opisu i rozwiązań	modele białej skrzynki	- modele czarnej skrzynki		
		modele przyczynowo-opisowe	- modele statystyczne (stochastyczne)		
6.	Własności funkcji operatora	modele liniowe		- modele nieliniowe	
		modele stacjonarne	- modele niestacjonarne		
		modele o parametrach skupionych	- modele o parametrach rozłożonych		

Klasyfikacja ta ma na celu usystematyzowanie całości metod matematycznego modelowania zjawisk hydrologicznych i nie ogranicza się do modeli omówionych w niniejszej pracy, które rozpatrywane są głównie z punktu widzenia posiadanej informacji apriorycznej (początkowej) o własnościach, strukturze i możliwości identyfikacji systemu oraz wynikających stąd metod opisu i rozwiązań. Tak więc, rozpatrywane tu modele stanowią klasę modeli przyczynowo-opisowych, które w zależności od ilości posiadanej i wykorzystanej informacji apriorycznej są zaliczane począwszy od modeli białej skrzynki (równania stanu), aż poprzez modele "szarej skrzynki", do modeli czarnej skrzynki (postać operatorowa "wejście-wyjście").

1.3. OGÓLNE PODSTAWY MODELOWANIA SYSTEMÓW

Model matematyczny systemu (obiektu) może być w zasadzie uzyskany dwiema drogami. Jedną z nich, nazywaną drogą (metodą) analityczną, polega na analizie struktury systemu i jego właściwości w oparciu o podstawowe prawa fizyczne (lub chemiczne). Druga, nazywana metodą doświadczalną (eksperymentalną, empiryczną) polega na uzyskaniu opisu matematycznego w wyniku przeprowadzonego eksperymentu na badanym obiekcie. W niniejszej pracy rozpatrywana jest metoda analityczna, która pozwala wnikać do wnętrza systemu i prowadzi do opisu wygodnego dla potrzeb sterowania. Natomiast metoda doświadczalna, poza pewnymi uwagami podanymi w rozdz.5, nie będzie tutaj omawiana. Metodykę oraz praktyczne przykłady określania modelu systemu drogą doświadczalną można znaleźć w wielu pracach poświęconych metodom identyfikacji [np. A. P l a s k o w s k i , 1965; W.M. O r d y n c e w , 1968; K. M a ń c z a k , 1971; Z. B u b n i c k i , 1974; R. H a g e l , 1975].

Głównym zadaniem modelu matematycznego systemu jest opisanie działania systemu. Wobec tego powinien to być model dynamiczny, pozwalający odzwierciedlać (określać) zmiany systemu w czasie, a więc powinien symulować zachowanie się systemu czyli być modelem symulacyjnym. Symulacja wymaga aby model był systemem izomorficznym względem oryginału. Jednak izomorfizm

między systemami może dotyczyć tylko niektórych, wybranych cech. W cybernetyce najistotniejszy jest izomorfizm pod względem zachowania się systemów [A.J. L e r n e r , 1971]. Wobec tego za systemy izomorficzne uważa się takie systemy, które jednakowo reagują na czynniki zewnętrzne, a więc jeżeli sygnały wejściowe tych systemów będą jednakowe, to również jednakowe będą sygnały wyjściowe.

Dwa systemy A i B są izomorficzne pod względem działania, jeżeli dla

$$x_{A,1}(t) = x_{B,1}(t); x_{A,2}(t) = x_{B,2}(t); \dots; x_{A,m}(t) = x_{B,m}(t)$$

spełnione są warunki (1.1)

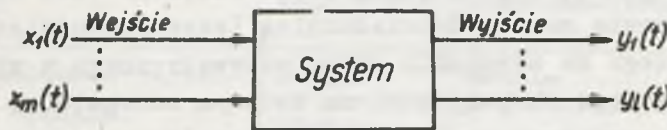
$$y_{A,1}(t) = y_{B,1}(t); y_{A,2}(t) = y_{B,2}(t); \dots; y_{A,l}(t) = y_{B,l}(t)$$

dla dowolnej chwili t .

Gdzie:

$x_1(t), \dots, x_m(t)$ - elementy wektora wejścia;

$y_1(t), \dots, y_l(t)$ - elementy wektora wyjścia (rys.1.2).



Rys.1.2. Schemat blokowy systemu

Łatwo zauważyć, że systemy takie mogą różnić się między sobą strukturą i własnościami poszczególnych elementów wewnętrznych, natomiast "podobieństwo" dotyczy wyłącznie zachowania się systemu jako całości. Izomorfizm pod względem działania jest podstawą i warunkiem wystarczającym przy ustalaniu modelu na drodze doświadczalnej. W wielu jednak przypadkach jest to warunek niewystarczający z punktu widzenia celu dla którego model jest tworzony. Np. wymaga się aby model uwzględniał również strukturę wewnętrzną oryginału i własności poszczególnych jego elementów, a więc żeby był izomorficznym pod względem struktury oraz działania poszczególnych elementów. Taki model można uzyskać wyłącznie na drodze analitycznej.

Systemy naturalne charakteryzują się praktycznie nieograniczonym stopniem złożoności i zbudowanie w pełni izomorficznego modelu [P. K o w a l i k , 1967] takiego systemu jest równie nierealne co niecelowe. Modele stanowią zawsze systemy uproszczone (zredukowane) w stosunku do oryginału. Uproszczenie systemu może być realizowane w różny sposób. Najczęściej polega ono bądź na zredukowaniu liczby współrzędnych określających stan systemu, bądź na zredukowaniu liczby zmiennych wejściowych czy też na agregacji obiektów, stanów lub zmiennych. Zagadnienie upraszczania systemów szerzej omówiono w pracy [M. O z g a - Z i e l i ń s k a , 1975]. Z powyższego wynika, że pierwszym etapem ustalania modelu jest uproszczenie oryginału. Model nie stanowi więc systemu izomorficznego względem oryginału lecz jest izomorficznym systemem uproszczonego oryginału (nazywanego nieraz prototypem). Fakt ten ma istotne znaczenie przy sprawdzaniu zgodności modelu z systemem rzeczywistym czyli przy weryfikacji modelu (rozdz. 5.2) oraz powinien być zawsze brany pod uwagę przy interpretacji i praktycznym wykorzystywaniu wyników uzyskiwanych z modelu.

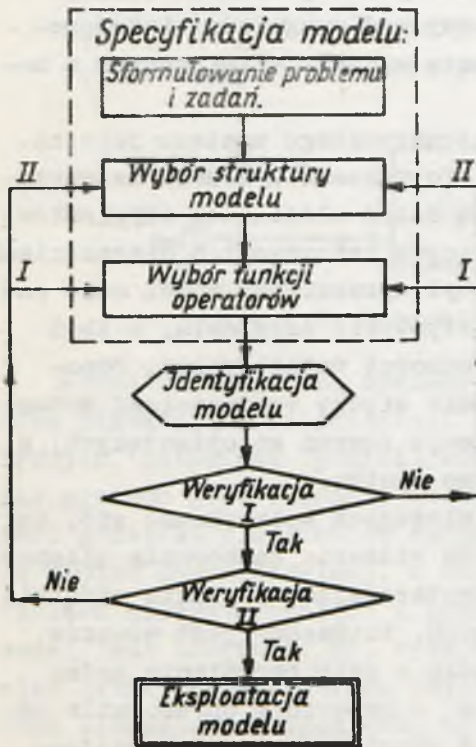
Ustalenie trafnego modelu matematycznego systemu jest zagadnieniem trudnym. Trudności w sformułowaniu modelu matematycznego wynikają z jednej strony z dużej złożoności oryginałów, z drugiej zaś z braku wystarczających informacji o własnościach oryginału. Należy zauważyć, że zbyt uproszczony model może pomijać istotne własności (charakterystyki) oryginału, a zbyt skomplikowany będzie stwarzał trudności matematyczne. Odpowiedni model stanowi więc kompromis między trudnościami matematycznymi, jakie powoduje komplikacja równań go opisujących, a wymaganą dokładnością ostatecznego wyniku.

W przypadku systemów bardzo złożonych może okazać się, że dopuszczalne uproszczenia z punktu widzenia zachowania własności fizycznych oryginału, są niewystarczające z punktu widzenia możliwości rozwiązań matematycznych. Potrzebny jest wówczas podział tzn. dekompozycja oryginału w celu określenia zadań dla poszczególnych jego elementów, a następnie opracowanie oddzielnych modeli tych elementów z uwzględnieniem ich wzajem-

nych sprzężeń oraz celu nadrzędnego, którym jest poprawny model całego systemu.

Budowa wszystkich modeli matematycznych systemów fizycznych opiera się na prawach zachowania (masy, energii, pędu) i wobec tego, pomimo dużej różnorodności postaci fizycznych poszczególnych systemów, ich modele matematyczne są podobne. Systemy dynamiczne opisywane są przez dynamiczne prawa zachowania odnoszące się do stanu nieustalonego, który charakteryzuje się zmiennym w czasie stopniem akumulacji wielkości podlegającej zachowaniu. Równania zachowania mają charakter równań bilansowych i wyróżnia się dwa sposoby podejścia przy ich określaniu dla układów (systemów) dynamicznych [J.C. F r i e d l y , 1975]. Jeden odnosi się do bilansów w skali makro, a drugi w skali mikro. W zależności od tego system jest nazywany systemem w skali makroskopowej lub mikroskopowej.

Równania bilansowe w skali makro są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, przy czym są to zawsze równania pierwszego



Rys.1.3. Schemat procedury opracowywania modelu

rzędu. Naturalnymi i niezbędnymi elementami równań zachowania są tylko pierwsze pochodne względem czasu. Jeżeli w danym układzie rozpatruje się kilka wielkości, wówczas jego model będzie zawierał zbiór równań różniczkowych pierwszego rzędu względem czasu. Wyższe pochodne względem czasu mogą pojawiać się jedynie w wyniku tworzenia się kombinacji przy przekształcaniu tego zbioru. Układy (systemy) dynamiczne opisane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi noszą nazwę układów o parametrach skupionych.

Równania zachowania w skali mikro są równaniami

różniczkowymi cząstkowymi o pochodnych pierwszego rzędu względem czasu. W równaniach tych mogą występować drugie pochodne (lub wyższe) względem położenia. Systemy dynamiczne opisywane równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych są nazywane systemami o parametrach rozłożonych.

Postępowanie według którego odbywa się opracowywanie dowolnego modelu można przedstawić w postaci algorytmu, w którym wyodrębnia się kilka głównych etapów [J.C. D o o g e , 1974; M. O z g a - Z i e l i ń s k a , 1974]. Najogólniej wyróżnić można trzy kolejne etapy (rys.1.3):

- specyfikację,
- identyfikację,
- weryfikację.

Specyfikacja jest to proces wyboru modelu, określenia jego generalnej i szczegółowej koncepcji i struktury oraz przyjęcia ogólnych postaci funkcji transformujących. Przystępując do tego najistotniejszego w opracowywaniu modelu etapu, należy przede wszystkim wyraźnie określić przeznaczenie modelu, a następnie uzyskać dokładne rozeznanie odnośnie rzeczywistej struktury badanego systemu oraz możliwości określenia parametrów modelu. Przeznaczenie modelu, czyli praktyczny cel, dla którego model jest opracowywany, w największym stopniu będzie decydował o wyborze ogólnej koncepcji modelu. Należy wybrać taki model, aby za jego pomocą uzyskać możliwie największą informację użyteczną. Z drugiej jednak strony wybór modelu jest ściśle uzależniony od posiadanej informacji apriorycznej (początkowej) o strukturze badanego systemu, tzn. informacji o wewnętrznej budowie i własnościach fizycznych systemu, o procesach w nim zachodzących i ich wzajemnych współzależnościach. Trzeci czynnik decydujący o wyborze modelu, to możliwości określenia parametrów funkcji transformujących. Możliwości te zależą przede wszystkim od rodzaju i dokładności prowadzonych badań eksperymentalnych (pomiarów czynników hydrometeorologicznych i fizjograficznych). Problem ten wiąże się bezpośrednio z następnym etapem opracowywania modelu, a mianowicie z jego identyfikacją.

Identyfikacja modelu jest to proces określenia ostatecznej, szczególnej dla badanego systemu, postaci modelu, tzn. dopasowanie

wania przyjętej ogólnej struktury i funkcji operatorów do warunków badanego systemu (konkretnej zlewni). Tak więc identyfikacja to głównie proces określania liczbowych wartości parametrów, chociaż nieraz również postaci funkcji operatora (rozdz.5.1). Przystępując do identyfikacji modelu, należy mieć rozeznanie odnośnie charakteru i ewentualnego znaczenia poszczególnych parametrów. W przypadku występowania parametrów mających znaczenie fizyczne ich liczbowe wartości powinny być określone w wyniku bezpośrednich pomiarów. Również inne parametry, których zależność od mierzonych charakterystyk systemu jest znana, powinny być chociażby wstępnie (np. poprzez podanie ograniczeń) oszacowane w oparciu o bezpośredni pomiar tych charakterystyk, a następnie, o ile zachodzi potrzeba, uściślone w dalszym procesie identyfikacji. W wielu jednak przypadkach spotykanych w hydrologii nie dysponujemy pomiarami pozwalającymi na bezpośrednie oszacowanie parametrów i dlatego modele hydrologiczne najczęściej muszą być traktowane jako systemy o niemierzonych parametrach. Parametry są wówczas integralną częścią modelu i nie mają żadnego znaczenia poza modelem. Są one abstrakcjami, które nieraz mogą być co najwyżej uważane za aproksymacje niektórych parametrów o znaczeniu fizycznym. Szacowanie parametrów w systemach o niemierzonych parametrach dokonywane jest najczęściej na drodze osiągnięcia maksymalnie możliwej zgodności pomiędzy sygnałem wyjściowym z modelu $y(t)$, dla danego sygnału wejściowego $x(t)$, a obserwowanym w rzeczywistości wyjściem z systemu $y_{rz}(t)$.

Weryfikacja modelu jest to proces sprawdzenia rzeczywistej jakości modelu, tzn. porównania modelu z rzeczywistym systemem i określenia stopnia zgodności, a następnie sprawdzenia, czy uzyskany stopień zgodności jest dostateczny i kwalifikuje model do praktycznego stosowania. Sprawdzenie zgodności modelu z rzeczywistym systemem powinno być przeprowadzone dwukrotnie. Pierwsze powinno dotyczyć zgodności modelu z materiałem obserwacyjnym, w oparciu o który model był identyfikowany (weryfikacja I), natomiast drugie zgodności z niezależnym materiałem obserwacyjnym (weryfikacja II). Przedstawiona propozycja odnośnie powtórnego sprawdzenia modelu na materiale niezależnym może wydawać się nierealna, a nawet niesłuszna, gdyż wychodząc

z założenia uzyskania jak najlepszego oszacowania parametrów powinno się do tego celu wykorzystać cały posiadany materiał obserwacyjny, który i tak dla wielu zlewni jest stosunkowo mało obszerny. Taki sposób postępowania jest rzeczywiście w pełni uzasadniony przy szacowaniu parametrów modeli stochastycznych (statystycznych), dla których z jednej strony mamy znacznie mniejsze możliwości zmiany ogólnej postaci modelu, z drugiej zaś sprawdzenie zgodności na materiale niezależnym wymaga wieloletnich ciągów obserwacyjnych i to równych lub nawet dłuższych od wykorzystywanych dla szacowania parametrów, a przecież wiadomo, że prawidłowe oszacowanie parametrów modeli statystycznych wymaga co najmniej kilkudziesięciu lat obserwacji. Dlatego też kryteria weryfikacji modeli statystycznych (w postaci testów zgodności, sprawdzania istotności współczynników korelacji, błędów prognozy itp.) określają jakość modelu tylko w odniesieniu do materiału użytego do szacowania jego parametrów. Inaczej przedstawia się zagadnienie identyfikacji i weryfikacji przyczynowo-opisowych modeli symulacyjnych. Dla identyfikacji modelu wystarcza na ogół okres od 3 do 5 lat obserwacji dobowych (czy godzinnych). Podobnej długości materiał niezależny wystarczy do drugiego zweryfikowania modelu. W tej sytuacji propozycja dwukrotnego weryfikowania modelu jest, dla większości zlewni, w zupełności realna.

Problemy identyfikacji i weryfikacji modeli hydrologicznych zostały szerzej omówione w rozdz.5.

2. OPIS SYSTEMU ZA POMOCĄ RÓWNAŃ STANU

2.1. WSPÓŁRZĘDNE I PRZESTRZEŃ STANU

Wielkości charakteryzujące zachowanie się systemu nazywamy współrzędnymi stanu systemu lub krócej współrzędnymi stanu. Najmniejszy liczebnie zespół współrzędnych wystarczający do opisu zachowania się systemu nazywa się stanem systemu. Mówiąc ściślej, stan systemu jest to najmniej liczny zbiór wartości (liczb), które należy określić dla czasu $t = t_0$, aby



móc jednoznacznie przewidzieć zachowanie się systemu dla każdej chwili czasu $t \geq t_0$, dla każdego sygnału wejściowego należącego do zbioru sygnałów wejściowych, przy założeniu, że wszystkie elementy zbioru wejść są znane dla $t \geq t_0$ [O g a t a , 1974].

Założmy, że dla pełnego opisu zachowania się danego systemu potrzeba co najmniej k współrzędnych $z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)$. Zbiór k współrzędnych można traktować jako k -elementowy wektor $\underline{z}(t)$

$$\underline{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ z_k(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

zwany wektorem stanu, zaś k -wymiarowa przestrzeń o współrzędnych $z_1(t), z_2(t), \dots, z_k(t)$ określa przestrzeń stanów.

Liczba wymiarów przestrzeni stanów jest więc równą liczbie wielkości określających stan systemu tzn. liczbie współrzędnych systemu i nazywa się rzędem systemu (obiektu).

W przestrzeni stanów każdy stan systemu można przedstawić jako punkt, który nazywamy punktem stanu. Punkt w przestrzeni stanów w chwili t nazywa się punktem bieżącym. Punkt ten przemieszczając się w przestrzeni stanów kreśli pewną krzywą zwaną trajektorią stanu systemu. Droga punktu bieżącego dla określonego przedziału czasowego $\langle t_0, t_1 \rangle$ stanowi trajektorię stanu systemu dla tego przedziału czasu.

W systemach rzeczywistych nie wszystkie współrzędne mogą zmieniać się w sposób nieograniczony tzn. od $-\infty$ do $+\infty$. Często niektóre współrzędne mogą przyjmować jedynie wartości leżące w ściśle określonym, skończonym przedziale czyli $z_i^l \leq z_i \leq z_i^u$, gdzie z_i^l i z_i^u ograniczają przedział wartości dozwolonych współrzędnej z_i . Z powyższego wynika, że punkt stanu może poruszać się tylko w pewnej ograniczonej przestrzeni stanów. Przestrzeń tę nazywamy obszarem stanów dozwolonych. Mówiąc więc o przestrzeni stanów danego systemu należy rozumieć obszar jego stanów dozwolonych.

stosowanie postaci wektorowej i macierzowej (rys.2.2). Równania od (2.2) do (2.4) w zapisie wektorowo-macierzowym mają postać

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{f} [\underline{z}(t), \underline{x}(t), t] \quad \underline{z}(t_0) = \underline{z}_0. \quad (2.5)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\varphi} [\underline{z}(t), \underline{x}(t), t] \quad (2.6)$$

Dla systemów stacjonarnych równania powyższe upraszczają się, gdyż nie występuje zależność własności systemu (funkcji f i φ) od czasu i wówczas

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{f} [\underline{z}(t), \underline{x}(t)] \quad \underline{z}(t_0) = \underline{z}_0. \quad (2.7)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\varphi} [\underline{z}(t), \underline{x}(t)] \quad (2.8)$$

Wektory $\underline{z}(t)$, $\underline{x}(t)$, $\underline{y}(t)$, \underline{f} , $\underline{\varphi}$, są postaci

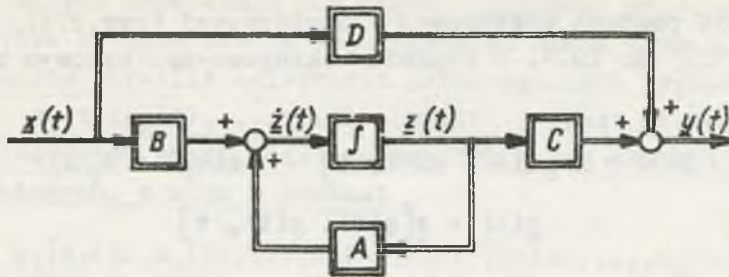
$$\underline{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_k(t) \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_l(t) \end{bmatrix} \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k \end{bmatrix} \quad \underline{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_l \end{bmatrix}$$

Należy pamiętać, że dla równań stanu (2.5) czy (2.7) należy podać warunki początkowe tzn. stan początkowy wektora $\underline{z}(t_0) = [z_1(t_0), z_2(t_0), \dots, z_k(t_0)]^T$. Ponadto dla równań stanu i równań wyjść należy podać ewentualne ograniczenia na wektor sygnałów wejściowych $\underline{x}(t)$ i współrzędnych stanu $\underline{z}(t)$.

Dla stacjonarnego systemu liniowego względem $\underline{z}(t)$ i $\underline{x}(t)$ równania stanu stanowiące układ k równań różniczkowych rzędu pierwszego oraz l równań wyjść można, w zapisie wektorowo-macierzowym (rys.2.3), przedstawić w postaci

$$\dot{\underline{z}}(t) = A \underline{z}(t) + B \underline{x}(t) \quad \underline{z}(t_0) = \underline{z}_0 \quad (2.9)$$

$$\underline{y}(t) = C \underline{z}(t) + D \underline{x}(t) \quad (2.10)$$



Rys.2.3. Schemat blokowy systemu liniowego opisanego wektorowym równaniem stanu i równaniem wyjść

przy czym

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{km} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{lk} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{l1} & d_{l2} & \dots & d_{lm} \end{bmatrix}$$

Dla systemu niestacjonarnego niektóre współczynniki w macierzach A, B, C i D są w funkcji czasu, a więc zależności odpowiadające równaniom (2.9) i (2.10) przyjmą postać

$$\dot{\underline{z}}(t) = A(t) \underline{z}(t) + B(t) \underline{x}(t) \quad \underline{z}(t_0) = \underline{z}_0 \quad (2.11)$$

$$\underline{y}(t) = C(t) \underline{z}(t) + D(t) \underline{x}(t) \quad (2.12)$$

Elementy macierzy A zależą od parametrów systemu i całkowicie opisują własności systemu bez uwzględniania oddziaływania wektora wejść; elementy macierzy B pokazują oddziaływanie wektora wejść na stan systemu; elementy macierzy C pokazują jak sygnały wyjściowe są powiązane ze współrzędnymi stanu; zaś elementy macierzy D pokazują bezpośredni wpływ sygnałów wejściowych na wyjściowe.

Należy zaznaczyć, że dowolny system opisany równaniem różniczkowym zwyczajnym k -tego rzędu można zawsze zastąpić układem k równań różniczkowych rzędu pierwszego [K. O g a t a, 1974], a więc sprowadzić do opisu w postaci równań stanu. Zagadnienia przejścia od opisu w postaci równania różniczkowego zwyczajnego dowolnego rzędu do opisu w postaci równań stanu i odwrotnie zostały omówione w rozdz.4.

Wszystkie powyższe zależności odnoszą się do systemów bez opóźnień tzn. wszystkie zmienne określane są dla tej samej chwili t . W rzeczywistości obserwujemy często systemy z opóźnieniami wejścia i stanu [H. G ó r e c k i, 1971]. W systemach, w których występują procesy transportowe (masy, ciepła i inne) należy uwzględnić opóźnienia wpływu wektora wejść na stan i wyjście. Równania stanu przybierają wówczas postać

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = f[\mathbf{z}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau_1), \dots, \mathbf{x}(t-\tau_r), t], \quad (2.13)$$

gdzie

τ_1 - są czasami opóźnień, przy czym $\tau_r > \tau_{r-1} \dots \tau_1 > 0$

Tak więc, dla określenia stanu systemu w chwili $t > t_0$ nie wystarczy już znajomość stanu początkowego $\mathbf{z}(t_0)$ oraz wektora wejść w przedziale czasu $\langle t_0, t \rangle$, lecz niezbędna jest również znajomość wektora wejść w przedziale $\langle t_0 - \tau_r, t_0 \rangle$. Jednak fakt ten, z uwagi, że wektor wejść jest znaną funkcją czasu, nie komplikuje rozwiązania równania (2.13), które pozostaje nadal równaniem różniczkowym zwyczajnym. Natomiast, jeżeli w badanym systemie pojawiają się opóźnienia stanu (system ze sprzężeniem zwrotnym) wówczas zależność (2.13) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) = f[\mathbf{z}(t), \mathbf{z}(t - \tau_1), \dots, \mathbf{z}(t - \tau_r), \\ \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - \tau_1), \dots, \mathbf{x}(t - \tau_r), t] \end{aligned} \quad (2.14)$$

przy czym

$$\tau_r > \tau_{r-1} > \dots > \tau_1 > 0$$

i nosi nazwę równania różnicowo-różniczkowego.

Dla określenia stanu systemu, opisanego równaniem (2.14), w chwili $t \geq t_0$ nie wystarczy znajomość wektora $\underline{z}(t_0)$ i wektora wejść w przedziale $\langle t_0, t \rangle$, ale jest wymagana ponadto znajomość wektorów wejścia i stanu w przedziale $\langle t_0 - \tau_i, t_0 \rangle$, które wraz z wektorem stanu początkowego $\underline{z}(t_0)$ stanowią "stan początkowy zupełny" (stan uogólniony układu). Dla systemów liniowych zależność (2.14) przyjmuje postać

$$\dot{\underline{z}}(t) = \sum_{i=0}^r [A_i(t) \underline{z}(t - \tau_i) + B_i(t) \underline{x}(t - \tau_i)];$$

$$\tau_0 = 0. \quad (2.15)$$

Jeżeli zmiany w systemie nie zależą tylko od czasu, ale również od innych zmiennych niezależnych, np. od współrzędnych przestrzennych, to systemy takie zwane systemami o parametrach rozłożonych, są opisywane równaniami różniczkowymi cząstkowymi [H. G ó r e c k i , 1971; J.C. F r i e d l y , 1975; W. F i n d e i s e n , 1972] typu

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} = f_i(z_1, z_2, \dots, z_k, \frac{\partial z_1}{\partial u}, \frac{\partial z_2}{\partial u}, \dots, \frac{\partial z_k}{\partial u}, x_1, x_2, \dots, x_m, t)$$

$$(i = 1, 2, \dots, k) \quad (2.16)$$

dla poszczególnych współrzędnych stanu z_i , gdzie u jest zmienną niezależną (np. zmienną położenia w przestrzeni), zaś \underline{x} sygnałem wejściowym przestrzennie rozłożonym czyli $\underline{x}(t, u)$. Równania stanu są naturalnie równaniami rzędu pierwszego względem t , natomiast mogą w nich występować pochodne cząstkowe wyższych rzędów (dla procesów fizycznych najczęściej rzędu drugiego) względem innych zmiennych [H. G ó r e c k i , 1971]. Dla systemów o większej liczbie zmiennych niezależnych oraz o dużej liczbie współrzędnych stanu równanie (2.16) bardzo się komplikuje, gdyż występują w nim pochodne cząstkowe (pierwszego i ewentualnie drugiego rzędu) każdej współrzędnej stanu względem każdej zmiennej niezależnej.

Większość procesów fizycznych niejednorodnych może być opisana liniowymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi rzędu drugiego o następującej postaci ogólnej dla p zmiennych niezależnych

$$\sum_{i,j=1}^p a_{ij}(u_1, u_2, \dots, u_p) \frac{\partial^2 y}{\partial u_i \partial u_j} + \sum_{i=1}^p b_i(u_1, u_2, \dots, u_p) \frac{\partial y}{\partial u_i} + c(u_1, u_2, \dots, u_p) y = x(u_1, u_2, \dots, u_p), \quad (2.17)$$

gdzie:

$a_{ij}(u_1, u_2, \dots, u_p)$, $b_i(u_1, u_2, \dots, u_p)$, $c(u_1, u_2, \dots, u_p)$ - są parametrami modelu w funkcji p zmiennych niezależnych, zaś $x(u_1, u_2, \dots, u_p)$ jest funkcją wymuszającą, czyli sygnałem wejściowym przestrzennie rozłożonym.

Jedną ze zmiennych niezależnych jest na ogół czas $u_1 = t$, zaś pozostałe są bądź współrzędnymi położenia, bądź współrzędnymi dowolnej wielowymiarowej przestrzeni.

Pojedyncze procesy hydrologiczne są nieraz rozpatrywane w skali mikro i wobec tego do ich opisu mogą być wykorzystywane zarówno równania różniczkowe zwyczajne jak i cząstkowe. Postępowanie takie jest zresztą od dawna stosowane przy modelowaniu różnych procesów hydrologicznych. Modele te z uwagi, że opisują ruch wody w oparciu o prawa i równania hydrodynamiki są nieraz nazywane modelami hydrodynamicznymi [B. K o r d a s, 1974]. Przykłady tego rodzaju modeli nie będą tutaj podane, gdyż w niniejszej pracy nie są rozpatrywane modele hydrologiczne o parametrach rozłożonych. Opis procesów hydrologicznych równaniami różniczkowymi cząstkowymi można znaleźć w wielu publikacjach [np. P. S. E a g l e s o n, 1970; Z. K a c z m a r e k, 1970; B. K o r d a s, 1971; P. K o w a l i k, H. Z a r a d n y, 1970; H. Z a r a d n y, P. K o w a l i k, 1971 a, b].

2.3. USTALANIE OPISU SYSTEMU ZA POMOCĄ RÓWNAŃ STANU

Postępowanie zmierzające do ustalenia opisu systemu w postaci zależności (2.5) i (2.6) obejmuje kilka etapów [W. F i n d e i s e n, 1972]:

I. Określenie współrzędnych stanu (oraz ewentualnych ograniczeń na te wielkości).

II. Ułożenie równań stanu.

III. Określenie wielkości wejściowych (oraz ewentualnych ograniczeń na te wielkości).

IV. Określenie wielkości wyjściowych.

V. Ułożenie równań wyjścia.

Trzy pierwsze etapy doprowadzają do wyczerpującego opisu systemu dynamicznego, gdyż ułożone równania stanu wyczerpują opis dynamiki systemu i tym samym stanowią pełen jego model matematyczny (stanowią pełen opis matematyczny zachowania się systemu). Natomiast etapy IV i V wynikają z celu i sposobu wykorzystania modelu. Polegają one na określeniu tych charakterystycznych wielkości systemu, które interesują nas z punktu widzenia wykorzystania modelu oraz na powiązaniu tych wielkości ze stanem i sygnałami wejściowymi.

Należy zauważyć, że istotną charakterystyczną cechą równań stanu jest fakt nie występowania po ich prawych stronach: pochodnych współrzędnych stanu względem czasu, pochodnych wielkości wejściowych względem czasu i wielkości wyjściowych. W prawych stronach równań stanu, poza współrzędnymi stanu występują tylko dwa rodzaje wielkości, a mianowicie parametry systemu i wielkości wejściowe. Niektóre z tych dwóch rodzajów wielkości mogą być przyjęte bądź jako parametry bądź jako wielkości wejściowe, w zależności od zdefiniowania systemu (podziału na system i otoczenie) oraz od ustalonej struktury i zadań modelu. Np. jeżeli w modelu procesu parowania, w postaci równania różniczkowego dyfuzji pary wodnej, ciśnienie powietrza uznamy za stałe (często właśnie tak postępujemy, przyjmując $p = \text{const.} = 1000 \text{ mb}$) wówczas staje się ono parametrem o przyjętej przez nas stałej wartości, natomiast w przypadku uwzględniania jego zmienności w czasie - staje się wielkością wejściową. Wobec powyższego wynika pytanie jaka jest różnica pomiędzy sygnałami wejściowymi a parametrami, szczególnie parametrami zmiennymi w czasie. Wydaje się, że można wyróżnić dwa istotne czynniki (kryteria) pozwalające zakwalifikować daną wielkość do sygnałów wejściowych czy parametrów. Jednym, jest wspomniane wyżej zdefiniowanie systemu tzn. wydzielenie

tych obiektów, które z punktu rozwiązywanego problemu będziemy uważali za system, a więc za przedmiot naszego modelowania. Charakterystyki własności systemu określone są przez cechy własne wydzielonych obiektów. Cechy te stanowią właśnie parametry systemu lub są ich funkcjami. Jeżeli charakterystyki systemu będą ulegały zmianom w czasie wówczas stan systemu będzie podlegał innym ilościowym zmianom pod wpływem tych samych wartości bodźców zewnętrznych (wejść), gdyż uległy zmianie jego własności. Mechanizm zmian parametrów stanowi jednak niezależny, oddzielny podsystem, którego model (mogą to być nawet bardzo proste reguły zmiany parametrów) musi być włączony (wbudowany) do modelu rozpatrywanego systemu - jest to właśnie ten drugi czynnik pozwalający rozróżnić parametry zmienne w czasie od sygnałów wejściowych. Np. Zmienność czasu parametrów modelu ewapotranspiracji uzależniona jest od przebiegu cyklu vegetacyjnego roślin i jest wprowadzona do modelu ewapotranspiracji jako znana jednoznacznie określona funkcja czasu, również zmienność parametrów modelu spływu powierzchniowego jest związana z cyklem vegetacyjnym roślin chociaż w zupełnie inny sposób (zmiana szorstkości powierzchni i oporów ruchu) i jako zupełnie inna, lecz także znana funkcja czasu jest wprowadzana do modelu spływu powierzchniowego. Tak więc z punktu rozpatrywanego systemu jego zmienne parametry są znanymi zdeterminowanymi funkcjami czasu wbudowanymi w model. Natomiast potraktowanie stałego sygnału wejściowego jako stałego parametru jest chyba oczywiste, gdyż niezależnie od nazwy "stałe wejście" czy "parametr", wielkość ta i tak będzie stałą modelu.

Z kolei, należy zwrócić uwagę, że nie wszystkie wielkości, które zostały określone jako wejściowe będą mogły być w modelu uwzględnione. Niektóre z nich są pomijane i traktowane bądź jako zakłócenia dopuszczalne, gdyż wpływ ich na stan systemu jest mały (mało istotny), bądź jako zakłócenia przymusowe (nieuniknione), gdy z pewnych obiektywnych względów (np. pomiarowych) nie mogą być uwzględnione jako kontrolowane sygnały wejściowe.

Wyróżnienie pięciu powyższych etapów ustalania opisu systemu za pomocą równań stanu ma na celu pewne uporządkowanie

postępowania, chociaż w zasadzie wszystkie te etapy są ze sobą bardzo ściśle powiązane i w praktyce realizowane prawie jednocześnie (szczególnie trzy pierwsze). Jednak zasadniczym jest niewątpliwie etap drugi, w którym w oparciu o przyjętą koncepcję układane są równania stanu opisujące całą dynamikę systemu.

2.4. MODELE SYSTEMÓW HYDROLOGICZNYCH OPISANE RÓWNIANAMI STANU

2.4.1. Uwagi ogólne

Do chwili obecnej metody opisu systemów w przestrzeni stanu, stanowiące najnowocześniejszą formę opisu systemów sterowania wprowadzoną w latach sześćdziesiątych, nie znalazły szerszego zastosowania w hydrologii i gospodarce wodnej. Za ledwie w kilku pracach podjęto próbę wykorzystania ich do opisu systemów hydrologicznych, a głównie systemów wodno-gospodarczych [L. Duckstein, C.C. Kisiel, 1972; A. Szöllösi-Nagy, 1974].

Poniżej zaproponowano model zlewni hydrologicznej potraktowanej jako złożony system opisany w wielowymiarowej przestrzeni stanu.

2.4.2. Proponowany model zlewni

Przy układaniu równań stanu mogą być stosowane dwie koncepcje. Jedna polega na wyprowadzeniu tych równań ze znanych, wynikających z praw fizyki, równań różniczkowych opisujących procesy zachodzące w badanym systemie, zaś druga oparta jest na analizie struktury systemu i prawach zachowania. Druga koncepcja jest na ogół stosowana w przypadku niemożności zastosowania koncepcji pierwszej. W przedstawionym poniżej przykładzie modelu zlewni hydrologicznej przyjęto koncepcję drugą, a

to ze względu na niejednakowy stopień rozpoznania i szczególności opisu poszczególnych procesów hydrologicznych zachodzących w zlewni. Niektóre z nich są opisywane równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, inne równaniami różniczkowymi cząstkowymi, a niektóre w ogóle nie posiadają opisu matematycznego wynikającego z praw fizyki.

K o n c e p c j a m o d e l u . Przyjęta koncepcja zakłada, że zlewnię hydrologiczną można potraktować jako system:

- 1 - w skali makro, a więc o parametrach skupionych,
- 2 - liniowy,
- 3 - składający się z kilku podsystemów (elementów) stanowiących oddzielne akumulatory wody,
- 4 - powiązania (sprzężenia) pomiędzy poszczególnymi podsystemami są przyczynowo-skutkowe tzn. wynikają z praw ruchu wody w zlewni.

Wobec powyższego poszczególne elementy akumulujące wodę w zlewni mogą być opisane liniowymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi o postaci (2.9) i równaniami wyjść o postaci (2.10). Określenie liczby współrzędnych stanu wynikało z analizy struktury zlewni tzn. wydzielenia głównych elementów akumulujących wodę. W rezultacie wyodrębniono siedem następujących elementów wraz z odpowiadającymi im współrzędnymi stanu z_i charakteryzującymi stopień nasycenia wodą danego elementu:

- obszar nieprzepuszczalnej powierzchni zlewni (z_1),
- intercepcję (z_2),
- obszar przepuszczalnej powierzchni zlewni (z_3),
- górną warstwę gruntu powierzchni przepuszczalnej (z_4),
- strefę aeracji (z_5),
- strefę saturacji (z_6),
- koryto rzeczne jako cztery szeregowo połączone elementy (z_7, z_8, z_9, z_{10}).

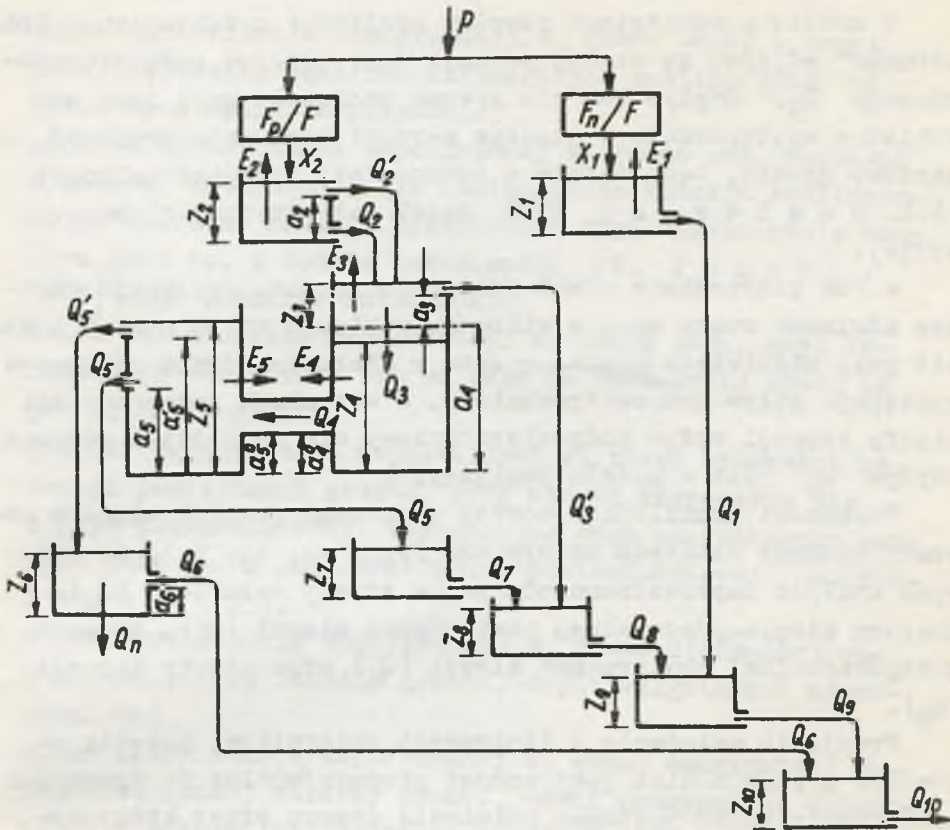
każdy z wydzielonych elementów akumuluje dopływającą do niego wodę i odprowadza we właściwy (charakterystyczny) dla siebie sposób, wynikający z własności fizycznych środowiska które reprezentuje. Tak więc każdy element stanowi pewnego rodzaju zbiornik retencyjny, a wobec założenia liniowości systemu zlewni - liniowy zbiornik retencyjny, natomiast napęł-

nienia tych zbiorników określają współrzędne stanu. Własności fizyczne środowisk, reprezentowanych przez poszczególne zbiorniki, mogą być odzwierciedlone poprzez współczynniki wypływu k_1 , ograniczenia napełnień czyli ograniczenia dolne i górne nałożone na współrzędne stanu oraz poprzez tzw. ograniczenia progowe współrzędnych stanu, czyli wartości po przekroczeniu których rozpoczyna się lub zanika odpływ wody z danego środowiska (zbiornika). Na progową strukturę zlewni zwracają uwagę J.C. D o o g e [1974,b] oraz R.P. I b b i t , T. O' D o n n e l l [1971] i L.S. K u c z m e n t [1974] podkreślając jednocześnie trudności występujące przy identyfikacji parametrów ze względu na powstawanie "plateau" i przerw w ciągłości kryterium zgodności (funkcji celu).

Schemat zastępczy (poglądowy) działania systemu zlewni jako systemu zbiorników retencyjnych podano, wraz z objaśnieniami przyjętych oznaczeń, na rys.2.4. Wejściem do systemu jest parowanie E oraz opad deszczu P , który jest rozdzielany na opad x_1 , spadły na powierzchnię nieprzepuszczalną zlewni i na opad x_2 , spadły na powierzchnię przepuszczalną, proporcjonalnie do pól (F_n i F_p) tych powierzchni w stosunku do pola całej powierzchni zlewni (F).

Wyodrębnienie w schemacie systemu zlewni obszarów o powierzchni nieprzepuszczalnej, które bezpośrednio sąsiadują z rzeką (łącznie z powierzchnią samej rzeki), ma istotne znaczenie w przypadku zlewni na której np. występują silnie zabudowane, lub nieprzepuszczalne obszary przyrzeczne. Natomiast w przypadku gdy na obszarach przyrzecznych występują grunty przepuszczalne współrzędną z_1 można pominąć.

Trudnym do modelowania elementem zlewni jest intercepcja. Jak wiadomo rozkład szaty roślinnej na obszarze zlewni jest bardzo nierównomierny i niejednorodny, tak więc wyodrębnienie obszarów, na których nie występuje zjawisko intercepcji jest praktycznie niemożliwe. Wobec tego w modelu przyjęto, że cały opad na powierzchnię przepuszczalną spada na szatę roślinną z tym, że część jego (w zależności od wartości współczynnika k_2) może od razu dotrzeć do powierzchni gruntu (otwór na poziomie dna zbiornika intercepcji).



- Oznaczenia: Q_1 – odpływ z obszaru zlewni nieprzepuszczalnej
 Q_2 – opad bezpośredni
 Q_2' – opad z intercepcji po jej wypełnieniu
 Q_3 – infiltracja
 Q_3' – odpływ powierzchniowy
 Q_4 – przepływ w strefie aeracji
 Q_5 – odpływ podpowierzchniowy
 Q_5' – filtracja do strefy saturacji
 Q_6 – odpływ gruntowy (ze strefy saturacji)
 Q_n – stały odpływ do niższych horyzontów
 Q_7 – odpływ rzeczny z zasilania podpowierzchniowego
 Q_8 – odpływ rzeczny z zasilania podpowierzchniowego i obszaru powierzchni przepuszczalnej
 Q_9 – odpływ rzeczny z zasilania podpowierzchniowego, obszaru powierzchni przepuszczalnej i nieprzepuszczalnej
 Q_{10} – odpływ rzeczny całkowity
 Pozostałe oznaczenia podano w tekście

Rys.2.4. Poglądowy schemat działania systemu zlewni

W modelu przewidziano również możliwość uwzględnienia "poziomego" odpływu ze strefy aeracji tzn. odpływu podpowierzchniowego Q_5 . Odpływ ten nie zawsze zachodzi, gdyż jest on wynikiem występowania w strefie aeracji bądź anizotropowej warstwy gruntu, bądź warstw o różnorodnej przepuszczalności [F.S. E a g l e s o n , 1970; Model matematyczny zlewni..., 1975e].

w obu przypadkach efekt jest podobny tzn. występuje większa zdolność ruchu wody w kierunku poziomym niż pionowym i nawet przy niewielkim spadku warstw w kierunku koryta rzecznego występuje spływ podpowierzchniowy. W warunkach jednorodności strefy aeracji spływ podpowierzchniowy nie zachodzi i wówczas odpływ Q_5 jest w modelu pomijany.

Własności akumulujące koryta rzecznego przedstawiono w postaci kaskady czterech zbiorników (z_{10}, z_9, z_8, z_7), do których kolejno doprowadzono odpływ ze strefy saturacji (Q_6), obszaru nieprzepuszczalnej powierzchni zlewni (Q_1), obszaru przepuszczalnej powierzchni zlewni (Q_3) oraz strefy aeracji (Q_5).

Przyjęcie założenia o liniowości zbiorników, pozwala określać wypływ z nich jako wprost proporcjonalny do wysokości napełnienia ponad poziomem położenia otworu przez który wypływ ten zachodzi, czyli

$$Q_i = k_i(z_i - a_i), \quad (2.18)$$

gdzie

k_i - współczynnik wypływu, określany w wyniku identyfikacji metodą optymalizacji,

z_i - odpowiednia współrzędna stanu,

a_i - ograniczenie progowe odpowiedniej współrzędnej stanu.

Wszystkie ograniczenia współrzędnych stanu traktowane są jako stałe modelu określone z warunków fizycznych poszczególnych środowisk hydrologicznych, które współrzędne te reprezentują. Przyjęto następujące ograniczenia dla poszczególnych współrzędnych:

a_1^0 - dolne ograniczenie współrzędnej z_1 równe zeru, gdyż odpływ wody z powierzchni nieprzepuszczalnej rozpoczyna się w zasadzie jednocześnie z wystąpieniem opadu,

- a_2^0 - dolne ograniczenie współrzędnej z_2 równe zeru, z uwagi na występowanie obszarów niepokrytych roślinnością, na które opad spada bezpośrednio,
- a_2 - progowe ograniczenie współrzędnej z_2 równe max. wartości wysokości intercepcji dla dominującego rodzaju roślinności na obszarze zlewni. Wyznaczenie tego ograniczenia możliwe jest np. z modelu intercepcji [W. F e l u c h , 1975] lub pomiarów intercepcji,
- a_3^0 - dolne ograniczenie współrzędnej z_3 równe zeru, gdyż infiltracja rozpoczyna się od razu po spadnięciu opadu na powierzchnię gruntu,
- a_3 - progowe ograniczenie współrzędnej z_3 równe wysokości retencji powierzchni gruntu, przy której rozpoczyna się odpływ powierzchniowy. Wyznaczenie tego ograniczenia możliwe jest np. z modelu retencji powierzchniowej [W. F e l u c h , 1975],
- a_4^0 - dolne ograniczenie współrzędnej z_4 równe minimalnej pojemności górnej warstwy gruntu, czyli wilgotności higroskopijnej,
- a_4 - górne ograniczenie współrzędnej z_4 równe maksymalnej pojemności górnej warstwy gruntu, czyli maksymalnej wilgotności - maksymalnej pojemności wodnej [P. K o w a l i k , 1973],
- a_5^0 - dolne ograniczenie współrzędnej z_5 równe minimalnej pojemności strefy aeracji czyli wilgotności higroskopijnej,
- a_5 - pierwsze progowe ograniczenie współrzędnej z_5 określone w wyniku badania anizotropowości i uwarstwienia strefy aeracji,
- a_5' - drugie progowe ograniczenie współrzędnej z_5 równe wilgotności, przy której rozpoczyna się ruch wody grawitacyjnej, a więc równe kapilarnej pojemności wodnej [P. K o w a l i k , 1973] w całej, a szczególnie dolnej, strefie aeracji,
- a_6 - progowe ograniczenie współrzędnej z_6 równe minimalnemu położeniu zwierciadła wody gruntowej, przy którym występuje odpływ ze strefy saturacji do rzeki,
- a_7^0 - dolne ograniczenie współrzędnej z_7 równe zeru, gdy odpływ podpowierzchniowy (Q_5) równy jest zeru,

- a_8^0 - dolne ograniczenie współrzędnej z_8 równe zeru, gdy odpływ podpowierzchniowy (Q_5) oraz odpływ z przepuszczalnej powierzchni zlewni (Q_3) są równe zeru,
- a_9^0 - dolne ograniczenie współrzędnej z_9 równe zeru, gdy korytem płynie wyłącznie odpływ ze strefy saturacji (Q_6),
- a_{10}^0 - dolne ograniczenie współrzędnej z_{10} równe zeru, przy zerowym przepływie w korycie rzecznym.

W proponowanym modelu istnieje możliwość uwzględnienia parowania traktowanego jako ujemne wejście, określane poza modelem. Jak wiadomo, proces parowania nie przebiega jednocześnie i jednakowo z każdego środowiska zlewni, a wobec tego sposób uwzględniania parowania w modelu powinien zależeć od stopnia nasycenia wodą w poszczególnych środowiskach, czyli od stanu systemu wyrażonego wartościami poszczególnych współrzędnych. Proponuje się następującą koncepcję:

1. - Gdy $P > 0$ wówczas $E = 0$
tzn. zakłada się, że w czasie trwania opadu parowanie nie zachodzi.
2. - Gdy $P = 0$ oraz $z_1 > 0$, $z_2 > 0$
wówczas parowanie odbywa się z retencji powierzchni nieprzepuszczalnej i intercepcji

$$E_1 = \frac{E F \alpha}{F}, \quad E_2 = \frac{E F P}{F P},$$

aż do ich wyczerpania.

3. - Gdy $P = 0$ oraz $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 > a_3$
wówczas parowanie odbywa się z retencji powierzchni przepuszczalnej aż do jej wyczerpania

$$E_3 = E.$$

4. - Gdy $P = 0$ oraz $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$, $z_4 > z_4^0$
wówczas parowanie odbywa się kosztem retencji górnej warstwy gruntu, aż do osiągnięcia przez współrzędną z_4 jej dolnego ograniczenia a_4^0

$$E_4 = E.$$

5. - Gdy $P = 0$ oraz $z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0, z_4 = a_4^0,$
 $z_5 > a_5^0$

wówczas parowanie jako ewapotranspiracja odbywa się kosztem retencji strefy aeracji, aż do osiągnięcia przez współrzędną z_5 jej dolnego ograniczenia a_5^0

$$E_5 = E_t .$$

Wielkość parowania, w każdym przypadku, jest określana z modelu parowania traktowanego jako oddzielny system lub w inny dowolny sposób. Naturalnie model parowania może, ale nie musi, uwzględniać wartości jakie przyjmują poszczególne współrzędne stanu systemu zlewni. Np. można przyjąć, że w przypadku 2 i 3 parowanie określane jest z równania dyfuzji pary wodnej, gdyż istnieje wówczas pełne nasycenie wodą zlewni i parowanie przebiega jak z powierzchni wody; natomiast w przypadku 4 parowanie można określić w funkcji wilgotności górnej warstwy gruntu (z_4) i czynników meteorologicznych; zaś w przypadku 5 z zależności określającej wielkość ewapotranspiracji w funkcji wilgotności strefy aeracji (z_5), czynników meteorologicznych i rodzaju roślinności.

R ó w n a n i a s t a n u i w y j ś ć . Przy ustalaniu równań stanu wyodrębniono pięć podukładów z uprzednio wyróżnionych siedmiu elementów akumulujących wodę. Równania stanu dla współrzędnych z_3, z_4, z_5 muszą być ustalone jednocześnie z uwagi na występujące między nimi sprzężenia zwrotne (Q_3 zależy od z_4 , zaś Q_4 zależy od z_4 i z_5).

Równania stanu i wyjść zostały podane w dwóch wersjach. W pierwszej, równania te są zapisane oddzielnie dla każdego z pięciu podukładów, natomiast w drugiej są one zestawione dla całego modelu zlewni w jednym układzie. Wersja I zapisu pozwala przedstawić wszystkie równania w prostych postaciach ze współrzędnymi stanu naturalnymi (nieprzekształconymi) oraz pozwala prześledzić mechanizm układania tych równań. Natomiast wprowadzenie wersji II wynika z warunków identyfikacji modelu, gdyż nie wszystkie podukłady mogą być oddzielnie identyfikowane i wobec tego zachodzi konieczność identyfikowania niektórych z nich w oparciu o kryterium zgodności wyjścia z całego modelu.

W związku z występującymi w modelu ograniczeniami górnymi i progowymi współrzędnych stanu oraz przyjętą koncepcją uwzględniania parowania, zaistniała konieczność wprowadzenia funkcji symulującej działanie przełącznika tzn. powodującej występowanie lub znikanie pewnych wyrażeń. Rolę tę dobrze spełnia funkcja skoku jednostkowego $\eta(x)$ ¹ charakteryzująca się następującymi własnościami

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x > 0 \\ 0 & \text{gdy } x \leq 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Wobec powyższego, dla uwzględnienia, przyjętego założenia, że gdy $P > 0$ to $E = 0$ a gdy $P = 0$ to parowanie zachodzi, wprowadzono człon $[1 - \eta(P)]$, który przyjmuje wartość równą zeru gdy opad występuje, zaś równą jedności gdy opad zanika. Ponadto, parowanie zachodzi najpierw z powierzchni nieprzepuszczalnej i intercepcji, zaś gdy retencja powierzchni nieprzepuszczalnej wyczerpie się ($z_1 = 0$) wówczas parowanie odbywa się wyłącznie kosztem intercepcji co uwzględniono wprowadzając mnożnik $\eta(z_1)$ dla określania E_1 . Tak więc parowanie z obszaru powierzchni nieprzepuszczalnej i intercepcji jest określane odpowiednio

$$E_1 = E \frac{F_n}{F} \eta(z_1) [1 - \eta(P)]$$

$$E_2 = (E - E_1) [1 - \eta(P)].$$

Z kolei po wyczerpaniu się retencji intercepcji ($z_2 = 0$) parowanie zaczyna odbywać się kosztem retencji obszaru powierzchni przepuszczalnej (z_3), co uzyskuje się poprzez wprowadzenie mnożnika $[1 - \eta(z_2)]$, który przyjmuje wartość równą jedności gdy $z_2 = 0$ i wówczas $E_3 = E_2 [1 - \eta(z_2)]$ a więc całe parowanie odbywa się z retencji obszaru powierzchni przepuszczalnej gdyż $E_3 = E_2$. W identyczny sposób wprowadzo-

¹ Funkcja $\eta(x)$ oznaczona jest również symbolem $\mathbf{1}(x)$, który jednak ze względów technicznych jest mniej wygodny.

no parowanie z retencji górnej warstwy gruntu (E_4) i strefy aeracji (E_5).

Podobnie wykorzystano funkcję skoku jednostkowego przy uwzględnianiu ograniczeń współrzędnych stanu, stosując mnożnik $\eta(z_i - a_i)$. Np. odpływ powierzchniowy $Q'_3 = k'_3 \cdot (z_3 - a_3) \cdot \eta(z_3 - a_3)$ i gdy $z_3 < a_3$ wówczas $\eta(z_3 - a_3) = 0$ i również $Q'_3 = 0$, zaś dla $z_3 > a_3$, $\eta(z_3 - a_3) = 1$ i wówczas $Q'_3 = k'_3(z_3 - a_3)$.

WERSJA I zapisu równań stanu

W tej wersji zapisu współrzędne stanu występują w postaci naturalnej, natomiast wszystkie wyrazy stałe, wynikające z nałożonych na współrzędne stanu ograniczeń, zostały wyprowadzone do zmiennych wejścia i wyjścia i wobec tego w opisie występują one w postaciach przekształconych. Zmienne przekształcone (w obu wersjach) oznaczono symbolem zmiennej naturalnej ze znakiem \sim umieszczonym u góry (np. \tilde{Q}_6).

Dla każdego z pięciu, wydzielonych podukładów podano kolejno: równania ciągłości wynikające z praw zachowania masy, równania stanu i wyjść (w ramach) oraz wyrażenia na zmienne przekształcone. Przyjęto następujące oznaczenia: \underline{z} - wektor stanu, \underline{w} - wektor wejść, \underline{Q} - wektor wyjść.

P o d u k ł a d 1

$$\dot{\underline{z}} = \underline{w}_1 - \underline{Q}_1$$

gdzie

$$\underline{w}_1 = \underline{x}_1 - E_1, \quad \underline{Q}_1 = k_1 \underline{z}_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \end{bmatrix}$$

P o d u k ł a d 2

$$\dot{z}_2 = w_2 - Q_2 - Q'_2,$$

gdzie

$$w_2 = x_2 - E_2, \quad Q_2 = k_2 z_2, \quad Q'_2 = k'_2(z_2 - a_2) \cdot \eta(z_2 - a_2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ Q_2 \\ Q'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_2 - k'_2 \cdot \eta(z_2 - a_2) \\ k_2 \cdot \eta(z_2) \\ k'_2 \cdot \eta(z_2 - a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = x_2 - E_2 + k'_2 a_2 \cdot \eta(z_2 - a_2)$$

$$Q'_2 = Q'_2 + k'_2 a_2 \cdot \eta(z_2 - a_2).$$

P o d u k ł a d 3

$$\dot{z}_3 = w_3 - Q_3 - Q'_3$$

gdzie

$$w_3 = Q_2 + Q'_2 - E_3, \quad Q_3 = k_3(a_4 - z_4) \cdot \eta(z_3)$$

$$E_3 = E_2 [1 - \eta(z_2)] \quad Q'_3 = k'_3(z_3 - a_3) \cdot \eta(z_3 - a_3)$$

$$\dot{z}_4 = w_4 - Q_4$$

gdzie

$$w_4 = Q_3 - E_4, \quad Q_4 = k_4(z_4 - z_5)$$

$$E_4 = E_2 [1 - \eta(z_2)] [1 - \eta(z_3)]$$

$$\dot{z}_5 = w_5 - Q_5 - Q'_5$$

gdzie

$$w_5 = Q_4 - E_5, \quad Q_5 = k_5(z_5 - a_5) \eta(z_5 - a_5), \quad Q'_5 = k'_5(z_5 - a'_5)(z_5 - a'_5)$$

$$E_5 = E_2 [1 - \eta(z_2)] [1 - \eta(z_3)] [1 - \eta(z_4)]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k'_3 \cdot \eta(z_3 - a_3) & k_3 \cdot \eta(z_3) & 0 \\ 0 & -k_4 - k_3 \cdot \eta(z_3) & k_4 \\ 0 & k_4 & -k_4 - k_5 \cdot \eta(z_5 - a_5) - k'_5 \cdot \eta(z_5 - a'_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_3 \\ \tilde{w}_4 \\ \tilde{w}_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}'_3 \\ \tilde{Q}_5 \\ \tilde{Q}'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_3 \eta(z_3 - a'_3) & , & \begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & k'_5 \cdot \eta(z_5 - a'_5) \\ 0, & k'_5 \cdot \eta(z_5 - a'_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{w}_3 = -E_2 [1 - \eta(z_2)] + Q_2 + Q'_2 + k'_3 a_3 \cdot \eta(z_3 - a_3) - k_3 a_4 \cdot \eta(z_3)$$

$$\tilde{w}_4 = -E_2 [1 - \eta(z_2)] [1 - \eta(z_3)] + k_3 a_4 \cdot \eta(z_3)$$

$$\tilde{w}_5 = -E_2 [1 - \eta(z_2)] [1 - \eta(z_3)] [1 - \eta(z_4)] +$$

$$+ k_5 a_5 \cdot \eta(z_5 - a_5) + k'_5 a'_5 \cdot \eta(z_5 - a'_5)$$

$$\tilde{Q}'_3 = Q'_3 + k'_3 a_3 \cdot \eta(z_3 - a_3)$$

$$\tilde{Q}_5 = Q_5 + k_5 a_5 \cdot \eta(z_5 - a_5)$$

$$\tilde{Q}'_5 = Q'_5 + k'_5 a'_5 \cdot \eta(z_5 - a'_5)$$

Podukład 4

$$\dot{z}_6 = w_6 - Q_6$$

gdzie

$$w_6 = \dot{z}_5 - z_n, \quad z_6 = k_6 (z_6 - a_6) \cdot \eta(z_6 - a_6)$$

$$\begin{cases} \dot{z}_6 = [-k_6 \eta(z_6 - a_6)] [z_6] + [1] [w_6] \\ \dot{z}_6 = [k_6 \cdot \eta(z_6 - a_6)] [z_6] \end{cases}$$

$$\dot{z}_6 = z_6 - z_n + k_6 a_6 \cdot \eta(z_6 - a_6).$$

P o d u k ł a d 5

$$\dot{z}_7 = z_5 - z_7 \quad \dot{z}_9 = Q_1 + Q_8 - Q_9$$

gdzie

gdzie

$$z_7 = k_7 z_7 \quad Q_9 = k_9 z_9$$

$$\dot{z}_8 = z_3 + Q_7 - Q_8 \quad \dot{z}_{10} = z_6 + Q_9 - Q_{10}$$

gdzie

gdzie

$$Q_8 = k_8 z_8 \quad Q_{10} = k_{10} z_{10}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_7 \\ \dot{z}_8 \\ \dot{z}_9 \\ \dot{z}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_7 & 0 & 0 & 0 \\ k_7 & -k_8 & 0 & 0 \\ 0 & k_8 & -k_9 & 0 \\ 0 & 0 & k_9 & -k_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_7 \\ z_8 \\ z_9 \\ z_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_6 \\ z_1 \\ z_5 \\ z_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & k_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_7 \\ z_8 \\ z_9 \\ z_{10} \end{bmatrix}$$

WERSJA II zapisu równań stanu

Jak uprzednio podano, wersja II zapisu równań stanu i wyjść w postaci jednego układu wynika z warunków identyfikacji modelu systemu zlewni. Wprowadzenie jednego układu spowodowało konieczność stosowania przekształconych współrzędnych stanu (\tilde{z}_i), natomiast wejścia P , E i Q_n oraz wyjście Q_{10} występują w postaci naturalnej.

W wyniku sprowadzenia równań stanu i wyjść, podanych w wersji I dla poszczególnych podukładów, do jednego układu otrzymano poniższy opis systemu całej zlewni

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \\ \dot{z}_7 \\ \dot{z}_8 \\ \dot{z}_9 \\ \dot{z}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{54} & A_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{65} & A_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{75} & 0 & A_{77} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{83} & 0 & 0 & 0 & A_{87} & A_{88} & 0 & 0 \\ A_{91} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{98} & A_{99} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{106} & 0 & 0 & A_{109} & A_{10,10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \\ z_9 \\ z_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & B_{32} & 0 \\ 0 & B_{42} & 0 \\ 0 & B_{52} & 0 \\ 0 & 0 & B_{63} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ E \\ Q_n \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{Q}_{10}] = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, c_{10}]$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ z_7 \\ z_8 \\ z_9 \\ z_{10} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$A_{11} = -A_{9,1} = -k_1 \cdot \eta(z_1)$$

$$A_{22} = A_{32} = k_2 \cdot \eta(z_2) + k'_2 \cdot \eta(z_2 - a_2)$$

$$A_{33} = -A_{83} = -k'_3 \cdot \eta(z_3 - a_3)$$

$$A_{34} = k_3 \cdot \eta(a_4 - z_4)$$

$$A_{44} = -k_4 - k_3 \eta(a_4 - z_5)$$

$$A_{45} = A_{54} = k_4$$

$$A_{55} = -k_5 \eta(z_5 - a_5) - k'_5 \eta(z_5 - a'_5) - k_4$$

$$A_{65} = k_5 \eta(z_5 - a'_5)$$

$$A_{66} = A_{10,6} = -k_6 \eta(z_6 - a_6)$$

$$A_{75} = k_5 \eta(z_5 - a_5)$$

$$A_{77} = -A_{87} = -k_7$$

$$A_{88} = -A_{98} = -k_8$$

$$A_{99} = -A_{10,9} = -k_9$$

$$A_{10,10} = -c_{10} = -k_{10}$$

$$B_{11} = F_n / F$$

$$B_{12} = -F_n \eta(z_1) [1 - \eta(P)] / F$$

$$B_{21} = F_p / F$$

$$B_{22} = - \left(1 - \frac{F_p}{F} \eta(z_1) \right) [1 - \eta(P)] \eta(z_2)$$

$$B_{32} = B_{22} [1 - \eta(z_2)]$$

$$B_{42} = B_{32} [1 - \eta(z_3)]$$

$$B_{52} = B_{42} [1 - \eta(z_4)]$$

$$\tilde{z}_2 = z_2 + b$$

$$\tilde{z}_6 = z_6 - a_6$$

$$\tilde{z}_3 = z_3 + c$$

$$\tilde{z}_8 = z_8 + f$$

$$\tilde{z}_4 = z_4 + d$$

$$\tilde{z}_9 = z_9 + g$$

$$\tilde{z}_5 = z_5 + e$$

$$\tilde{z}_{10} = z_{10} + h$$

gdzie

$$b = f_1(k_2, k_2)$$

$$c = f_2(k_3, k'_3, a_3, a_4)$$

$$d = f_3(k_4, k_5, k'_5, a_4, a_5, a'_5)$$

$$e = f_4(k_4, k_5, k'_5, a_4, a_5, a'_5)$$

$$f = f_5(k_3, k_8, a_3)$$

$$g = f_6(k_1, k'_3, k_9, a_3)$$

$$h = f_7(k_1, k'_3, k_{10}, a_3)$$

Funkcje f_i ($i = 1, \dots, 7$) są prostymi funkcjami wymiernymi odpowiednich parametrów.

W a r u n k i p o c z ą t k o w e. Zgodnie z zależnością (2.3) należy, obok równań stanu, podać wektor stanu początkowego tzn. należy określić wartość początkową każdej współrzędnej stanu. Z uwagi, że w proponowanym modelu niektóre współrzędne stanu są niemierzalne określenie warunków początkowych nie jest sprawą prostą, gdyż nie dla każdej chwili t_0 warunki te mogą być określone. Rozwiązaniem jest przyjęcie takich warunków początkowych, dla których współrzędne niemierzalne przyjmują z góry znane stałe wartości. Wartościami znanymi współrzędnych stanu są ich ograniczenia a_i , traktowane jako stałe modelu.

Systemy hydrologiczne charakteryzują się dużą liczbą współrzędnych niemierzalnych, gdyż zmierzona może być akumulacja wody tylko w niektórych środowiskach, a mianowicie w strefie aeracji, saturacji i korycie rzeczonym. Niemierzalnymi współrzędnymi są przede wszystkim z_1, z_2 i z_3 , dla których znane są jedynie ich dolne ograniczenia równe zeru. Tak więc, ze względu na te trzy współrzędne, warunki początkowe należy przyjmować w okresach, w których $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ oraz $z_3 = 0$. Sytuacja, w której współrzędne te na pewno przyjmują wartości zerowe zdarza się dość często, gdyż intercepcja i retencja powierzchni gruntu występują tylko w okresie trwania opadu i bezpośrednio po opadzie. Tak więc znalezienie $t = t_0$, gdy $z_1(t_0) = z_{10} = 0$, $z_2(t_0) = z_{20} = 0$ i $z_3(t_0) = z_{30} = 0$ nie nastręcza większych trudności.

Kłopotliwe jest natomiast określenie wartości początkowych współrzędnych koryta rzecznego, które są współrzędnymi trudnymi dla fizycznej interpretacji. Jedynie współrzędną z_{10} można interpretować jako całkowite napełnienie koryta w profilu zamykającym zlewnię, natomiast z_7, z_8, z_9 nie mają w zasadzie jednoznacznej interpretacji fizycznej, a wprowadzenie ich było spowodowane dążeniem do możliwie adekwatnego odzwierciedlenia własności akumulujących koryta rzecznego. Można by co prawda przyjąć następującą ich interpretację: poszczególne współrzędne określają napełnienie koryta, w różnych jego strefach, wywołane dopływem z poszczególnych komponentów (podukładów) zlewni. Tak więc odpowiednio: współrzędna z_7 - przepływem podpowierzchniowym (Q_5), współrzędna z_8 - przepływem podpowierzchniowym oraz przepływem powierzchniowym z przepuszczalnej powierzchni zlewni (Q_5 i Q'_3), współrzędna z_9 - przepływem podpowierzchniowym i przepływem powierzchniowym z przepuszczalnej oraz nieprzepuszczalnej powierzchni zlewni (Q_5, Q'_3 i Q_1), natomiast współrzędna z_{10} - napełnienie wywołane przez całkowity przepływ prowadzony korytem rzeki. Jedynie dla okresu, w którym $Q_5 = 0$, $Q'_3 = 0$ oraz $Q_1 = 0$, tzn. gdy przepływ w korycie rzeki jest pochodzenia wyłącznie gruntowego, warunki początkowe współrzędnych z_7, z_8, z_9 są dokładnie określone i wynoszą $z_7(t_0) = z_{70} = 0$, $z_8(t_0) = z_{80} = 0$, $z_9(t_0) = z_{90} = 0$. Równocześnie spełniony jest wówczas warunek ciągłości

$$k_6 [z_6(t_0) - a_6] = k_{10} z_{10}(t_0). \quad (2.20)$$

Pozostałe współrzędne z_4, z_5 oraz z_6 są mierzalne i ich wartości początkowe mogą być określone w wyniku pomiaru wilgotności gruntu (z_4 i z_5) oraz pomiaru poziomu zwierciadła wód gruntowych (z_6) w chwili t_0 . Nieraz może zaistnieć sytuacja, że na obszarze modelowanej zlewni nie są prowadzone pomiary wilgotności gruntu, a nawet brak jest pomiarów wód gruntowych. Można wówczas naturalnie określić sytuacje, w których z_4, z_5 i z_6 przyjmą znane wartości swoich ograniczeń. Np. z_4 i z_5 przyjmują dolne ograniczenia $z_4(t_0) = a_4^0$ oraz $z_5(t_0) = a_5^0$, zaś z_6 przyjmuje progowe ograniczenie czyli $z_6(t_0) = a_6$. Jednak sytuacja taka zdarza się w rzeczywistości rzadko, gdyż jedynie w końcu bardzo długiego okresu bezdeszczowego i dużego parowania może dojść do sytuacji osiągnięcia wilgotności higroskopijnej w całym profilu strefy aeracji. Jeszcze rzadziej, a dla większych rzek praktycznie nigdy, może zdarzyć się sytuacja gdy $z_6(t_0) = a_6$ tzn. brak jest dopływu do rzeki nawet ze strefy saturacji. Oznacza to, że rzeka wysycha a cały system zlewni znajduje się w zerowym stanie początkowym, a więc nie ma w zlewni zmagazynowanej wody która mogłaby się przemieszczać.

Należy jednak wyraźnie podkreślić, że jeżeli którakolwiek współrzędna, czy dowolna inna charakterystyka systemu, jest mierzalna to powinna ona być bezwzględnie mierzona, gdyż nie wolno dopuszczać do sytuacji utraty jakiejkolwiek informacji. Jedyne dla współrzędnych niemierzalnych mogą być, a właściwie muszą być, warunki początkowe określane dla wybranych sytuacji, w których przyjmują one znane wartości swoich ograniczeń.

M o ż l i w o ś c i i d e n t y f i k a c j i i w y -
k o r z y s t a n i a m o d e l u . Współczynniki k_j są parametrami modelu, które należy określić w wyniku identyfikacji metodami optymalizacji. Można zastosować jedną z dwóch koncepcji identyfikacji. Pierwsza polegałaby na estymowaniu wszystkich parametrów k_1, \dots, k_N jednocześnie (równania stanu wg II wersji zapisu), przy kryterium zgodności odpływu rzeczno-
nego. Druga natomiast polegałaby na określaniu poszczególnych

parametrów k_1 , lub ich grup, czyli przeprowadzaniu oddzielnej identyfikacji wyodrębnionych podukładów zlewni (równania stanu wg I wersji zapisu). Wybór jednej z tych koncepcji zależy od posiadanego materiału obserwacyjnego. W pierwszym przypadku wystarczają pomiary opadu i przepływu rzecznoego, natomiast w drugim należy posiadać pomiary wszystkich współrzędnych mierzalnych, a ponadto jeszcze pewne informacje o własnościach akumulujących koryta rzecznoego.

Stosując koncepcję pierwszą otrzymamy zbiór parametrów, który będzie optymalny pod kątem modelowania odpływu rzecznoego, natomiast nie będzie w pełni spełniać warunków adekwatności modeli poszczególnych procesów. Wynika to z faktu, że jedynie ograniczenia współrzędnych stanu określone są w wyniku analizy poszczególnych procesów, natomiast współczynniki wpływu k_i nie będą odzwierciedlać przebiegu procesów akumulacji i ruchu wody w poszczególnych środowiskach, lecz globalnie w całym systemie zlewni. Wobec powyższego identyfikacja tego rodzaju prowadzi do uzyskania pseudo-integralnego modelu zlewni, tzn. modelu zlewni, w którym poszczególne procesy nie są poprawnie odzwierciedlone ze względu na nieadekwatne wartości parametrów w odniesieniu do każdego oddzielnie rozpatrywanego procesu.

Stosując natomiast drugą koncepcję identyfikacji można uzyskać, przy oddzielnym identyfikowaniu każdego podukładu, w pełni integralny model zlewni. W I wersji zapisu równań stanu zostało wyodrębnionych pięć podukładów. Dwa pierwsze podukłady o współrzędnych niemierzalnych muszą być identyfikowane łącznie, w oparciu o kryterium zgodności odpływu z całego modelu, a więc na końcu po zidentyfikowaniu trzech pozostałych.

Podukład 5 powinien być identyfikowany w oparciu o informację o własnościach akumulujących koryta. Informacja taka może być uzyskana np. z analizy zależności pomiędzy napełnieniem koryta a przepływem (można wykorzystać krzywą przepływu po uwzględnieniu położenia zera wodowskazu). Zależność ta jest nieliniowa, wobec tego należy przeprowadzić jej linearyzację dla poszczególnych zakresów napełnień (w tym przypadku czterech) i przyjąć odpowiednie współczynniki katowe jako wartości określające k_7, k_8, k_9 i k_{10} , które powinny spełniać warunek $k_7 > k_8 > k_9 > k_{10}$.

Podukład 4 można identyfikować przy wykorzystaniu warunku (2.20) w oparciu o obserwacje stanów wód gruntowych (z_6) i napełnienia koryta (z_{10}) w okresie gdy $Q_1 = 0$, $Q'_3 = 0$ i $Q_5 = 0$ oraz w oparciu o określony uprzednio współczynnik k_{10} .

Podukład 3, najbardziej złożony, może być identyfikowany w oparciu o pomiary wilgotności gruntu w górnej strefie aera-cji (z_4) i strefie dolnej (z_5) a ponadto w oparciu o przyrosty wód gruntowych wywołane dopływem Q'_5 i odpływem ze strefy sa-turacji Q_6 , który można obliczyć na podstawie uprzednio ziden-tyfikowanego współczynnika k_6 .

Przedstawiony model, chociaż dość trudny do zidentyfikowa-nia, może być szeroko wykorzystywany, a to głównie ze względu na możliwość łatwego uwzględniania działalności człowieka w zakresie sterowania obiegiem wody w zlewni. Sterowanie to moż-na realizować poprzez wprowadzanie wejść lub wyjść do odpowied-nich podukładów. Np. pobór wody studniami ze strefy saturacji można uwzględnić wprowadzając dodatkowe ujemne wejście do rów-nania stanu współrzędnej z_6 , natomiast nawadnianie czy odwad-nianie drenami lub rowami, wprowadzając dodatnie bądź ujemne wejście w równaniu stanu współrzędnej z_5 . Podobnie każdy zrzut czy pobór wody z rzeki, zwiększona ewapotranspiracja w wyniku intensyfikacji produkcji rolnej, czy też jeszcze inne formy sterowania rozrzędem wody w zlewni mogą być łatwo u-względniane w modelu.

Poza powyższym rodzajem sterowania obiegiem wody w zlewni można wyróżnić sterowanie polegające na zmianie wartości liczb-owych parametrów modelu w wyniku zmiany własności fizycznych zlewni pod wpływem jej zagospodarowania (zabudowy). Ten rodzaj sterowania nie był w niniejszej pracy rozpatrywany, poza pew-nymi uwagami ogólnymi zamieszczonymi w rozdz.6.

3. OPIS SYSTEMU ZA POMOCĄ RÓWNANIA „WEJŚCIE-WYJŚCIE”

Opis systemu za pomocą zależności "wejście-wyjscie" jest często w praktyce stosowany, gdyż nie wymaga on, w porównaniu

z opisem w oparciu o równania stanu, znajomości struktury wewnętrznej systemu i może być stosowany nawet przy zupełnym braku informacji odnośnie własności i struktury systemu. Wymaga on jedynie informacji o sygnałach wejściowych i wyjściowych systemu. Poniżej zostaną podane różne formy takiego opisu.

3.1. RELACJA „WEJŚCIE-WYJŚCIE” W POSTACI RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO ZWYCZAJNEGO DOWOLNEGO RZĘDU

Zależność między sygnałem wejściowym $x(t)$ i wyjściowym $y(t)$ systemu, którego schemat podano na rys.3.1, może być przedstawiona za pomocą równania różniczkowego zwyczajnego dowolnego rzędu o ogólnej postaci



Rys.3.1. Schemat blokowy systemu

$$F \begin{pmatrix} (n) \\ y, y, \dots, \dot{y}, y, t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (r) \\ x, x, \dots, \dot{x}, x, t \end{pmatrix} = 0, \quad (3.1)$$

przy czym

$$\begin{pmatrix} (n) \\ y \end{pmatrix} = \frac{d^n y}{dt^n}, \quad \begin{pmatrix} (r) \\ x \end{pmatrix} = \frac{d^r x}{dt^r} \dots \text{itp.}$$

Równanie (3.1) zapisane w formie rozdzielonych zmiennych wejścia i wyjścia ma postać

$$F_1 \begin{pmatrix} (n) \\ y, y, \dots, \dot{y}, y, t \end{pmatrix} = F_2 \begin{pmatrix} (r) \\ x, x, \dots, \dot{x}, x, t \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Dla systemów liniowych równanie (3.2) przybiera postać

$$\begin{aligned} & a_n(t) y^{(n)} + a_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \dot{y} + a_0(t) y = \\ & = b_r(t) x^{(r)} + b_{r-1}(t) x^{(r-1)} + \dots + b_1(t) \dot{x} + b_0 x, \end{aligned} \quad (3.3)$$

przy czym

$$n \geq r$$

gdzie

$a_i(t)$ oraz $b_j(t)$ są współczynnikami, zależnymi od charakterystyk systemu i nazywanymi parametrami modelu. Równanie (3.3) zapisywane jest często w formie skróconej o postaci

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^{(i)} = \sum_{j=0}^r b_j(t) x^{(j)} \quad n \geq r. \quad (3.4)$$

Parametry $a_i(t)$ oraz $b_j(t)$ mogą być funkcjami czasu (systemy niestacjonarne) lub mogą być stałe a_i, b_j (systemy stacjonarne). Najczęściej są one liczbami lub prostymi funkcjami zależnymi od charakterystyk fizycznych systemu. Stopień równania różniczkowego n jest nazywany rzędem systemu. Dla realnych systemów dynamicznych obowiązuje zależność $n \geq r$.

Określenie stopnia równania różniczkowego opisującego badany system dokonuje się na drodze analizy własności fizycznych systemu, bądź na drodze doświadczalnej przy zastosowaniu metod optymalizacji.

Dla systemów wielowymiarowych, tzn. dla systemów wielowejściowych i wielowyjściowych, parametry równania (3.4) stanowią macierze $A_i(t)$ o wymiarach $l \times l$ i $B_j(t)$ o wymiarach $l \times m$, zaś y jest l -elementowym wektorem wyjść, a x m -elementowym wektorem wejść.

3.2. MODELE SYSTEMÓW HYDROLOGICZNYCH OPISANE RÓWNANIEM RÓŻNICZKOWYM „WEJŚCIE-WYJŚCIE”

Równanie różniczkowe, stanowiące model matematyczny systemu dynamicznego, opisuje zachodzące w tym systemie procesy. Wobec tego, poprawne ułożenie równania różniczkowego, nazywanego często równaniem dynamiki, wymaga dokładnej znajomości dynamiki systemu wynikającej z rodzaju zachodzących w systemie procesów i praw fizycznych (czy chemicznych) rządzących tymi procesami. Złożoność i duża liczba procesów, składających się

na system zlewni, wyklucza realność bezpośredniego określenia równania różniczkowego zwyczajnego stanowiącego opis łącznego efektu wszystkich procesów tzn. opis zlewni traktowanej globalnie jako jedna całość. wobec tego istnieją jedynie zastępcze drogi postępowania stosowane często w różnych dziedzinach nauki i dające nieraz zupełnie zadawalające rezultaty.

Jedną z nich, jest droga analityczna polegająca na podziale systemu na proste układy, możliwe do analizy. Następnie na podstawie ustalonych równań dla poszczególnych układów oraz analizy przyczynowo-skutkowych powiązań między nimi, doprowadzenie do jednego równania różniczkowego opisującego cały system. Jest to jednak dla systemów złożonych, wymagających podziału na dużą liczbę układów prostych, droga bardzo żmudna, a z drugiej strony z punktu widzenia praktyki tzn. problemów związanych z rozwiązaniem tego równania, zupełnie bezcelowa. Przyjmując np., że liczba wydzielonych pojedynczych procesów w zlewni jest około 7 - 8, z których każdy opisany jest równaniem różniczkowym rzędu pierwszego lub wyższego, uzyskujemy po żmudnych przekształceniach równanie różniczkowe rzędu około dziesiątego lub wyższego, ze współczynnikami o zawikłanych postaciach.

Przykładowo przekształcając, podany w rozdz.2.4.2 opis zlewni w oparciu o równania stanu, do jednego równania różniczkowego "wejście-wyjście" uzyskalibyśmy równanie rzędu dziesiątego ze współczynnikami o bardzo złożonej postaci. Rozwiązanie takiego równania jest poważnym problemem i to problemem sztucznie stworzonym, gdyż z punktu widzenia praktyki rozwiązywania wygodniej jest rozwiązywać układ kilku równań (w tym przypadku dziesięciu) rzędu pierwszego, do którego zresztą sprowadza się często rozwiązywanie równań różniczkowych rzędów wyższych.

Drugą drogą postępowania jest droga doświadczalna, polegająca na określeniu rzędu równania i parametrów, czy też tylko parametrów gdy rząd równania jest znany, na podstawie pomierzonych sygnałów wejściowych i wyjściowych. Postępowanie takie, szczególnie w pierwszym przypadku, sprowadza się do potraktowania modelowanego systemu jako "czarnej skrzynki", dla której przyjmuje się funkcję transformującą w ogólnej postaci

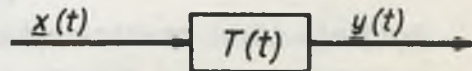
równania różniczkowego rzędu n -tego. Podejście takie jest w hydrologii często stosowane, chociaż w zasadzie teoretycznie. W praktyce rozwiązanie jest sprowadzane, dla zerowych warunków początkowych, do całki spłotu o postaci (3.12), dla której funkcja $h(t - \tau)$ jest określana doświadczalnie - w postaci analitycznej lub wykresu (rozd.3.4.2). Tak więc rozwiązanie nie jest doprowadzone do postaci określającej w sposób jawny rząd i parametry równania (3.4). Określeniem rzędu równania i parametrów, jednak wyłącznie dla modelu spływu powierzchniowego, zajmowali się np. V.T. Chow i V.C. Kula - d a i s w a m y [1971] uzyskując $n = 2$, zaś $r = 1$, a więc proces spływu powierzchniowego może być, przy założeniu miarodajności uzyskanych przez nich wyników (analizowano 27 wezbrań z 6 zlewni), traktowany jako układ rzędu drugiego. Natomiast w pracy [J. B a l e k , L. J o k l , 1974] z góry założono, że relacja opad-spływ powierzchniowy może być opisana równaniem różniczkowym rzędu drugiego o postaci (3.8) i doświadczalnie wyznaczano tylko jest parametry.

Reasumując, wydaje się, że w odniesieniu do zjawisk hydrologicznych stosowanie opisu "wejście-wyjście" w postaci równania różniczkowego jest celowe i realne jedynie dla oddzielnych procesów i ewentualnie komponentów zlewni.

3.3. RELACJA „WEJŚCIE-WYJŚCIE” W POSTACI OPERATOROWEJ

3.3.1. Ogólna postać opisu

Zależność między sygnałem wejściowym i wyjściowym systemu, można przedstawić stosując operator T (rys.3.2) który przekształca wektor wejścia $\underline{x}(t)$ w wektor wyjścia $\underline{y}(t)$



$$\underline{y}(t) = T [\underline{x}(t)] . \quad (3.5) \quad \text{Rys.3.2. Schemat blokowy systemu w postaci operatorowej}$$

Dla systemów niestacjonarnych operator T będzie funkcją czasu, co zaznaczamy w jednej z dwóch poniższych postaci

$$\underline{y}(t) = T(t) [\underline{x}(t)] \quad (3.6a)$$

lub

$$\underline{y}(t) = T [\underline{x}(t), t] . \quad (3.6b)$$

Operator T może zawierać takie operacje jak całkowanie, różniczkowanie, przesunięcie w czasie itp. Dla liniowych systemów stacjonarnych operator T zastępuje się symbolem L , zaś dla liniowych niestacjonarnych symbolem $L(t)$ – lub postacią analogiczną do zależności (3.6b).

Stosując do opisu systemu postać operatorową należy pamiętać, że przebieg sygnału wyjściowego $y(t)$ zależy również od warunków początkowych tzn. od początkowego stanu systemu. Należałoby więc zależność (3.5) zapisać w postaci

$$\underline{y}(t) = T [\underline{x}(t), \underline{z}(t_0)] , \quad (3.7)$$

lecz taka postać wymaga określenia wektora stanu $\underline{z}(t_0)$ w chwili t_0 co z kolei wymaga ustalenia współrzędnych stanu, a więc znajomości wewnętrznej struktury systemu. Wobec powyższego postać operatorowa stosowana jest bądź dla zerowych warunków początkowych, bądź dla stałych warunków początkowych, które z punktu widzenia modelowanego procesu można traktować jako zerowe, bądź też dla systemu, w którym istotna jest tylko zależność między wejściem i wyjściem, natomiast stan początkowy systemu jest nieistotny (mało istotny).

Postać operatorowa opisu "wejście-wyjście" może być uzyskana bądź w oparciu o równanie różniczkowe (3.4) stanowiące opis rozpatrywanego systemu, bądź na drodze doświadczałnej, jeżeli równanie to jest nieznanne.

3.3.2. Całka splotu

Równanie (3.4) często zapisywane jest w postaci

$$\sum_{i=0}^n a_1^{(i)}(t) y^{(i)}(t) = x(t), \quad (3.8)$$

gdzie $x(t)$ jest znaną funkcją czasu sygnału wejściowego. Z teorii liniowych równań różniczkowych wiadomo, że rozwiązanie równania (3.4) czy (3.8), spełniającego zadane warunki początkowe, można przedstawić w postaci sumy rozwiązania ogólnego odpowiadającego mu równania jednorodnego spełniającego zadane warunki początkowe i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego spełniającego zerowe warunki początkowe, a więc

$$y(t) = y_0(t) + y_I(t), \quad (3.9)$$

gdzie

$y_0(t)$ - rozwiązanie równania jednorodnego,

$y_I(t)$ - rozwiązanie równania niejednorodnego.

Z uwagi na liniowość równania, $y_0(t)$ można przedstawić w postaci

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(t), \quad (3.10)$$

gdzie

$y_i(t)$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami równania jednorodnego, zaś

c_i - są stałymi wyznaczonymi z warunków początkowych.

Rozwiązanie szczególne $y_I(t)$ równania niejednorodnego przy zerowych warunkach początkowych można przedstawić w postaci

$$y_I(t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau) \cdot x(\tau) d\tau, \quad (3.11)$$

gdzie

t_0 - chwila wystąpienia sygnału wejściowego, który jest przesunięty (opóźniony) w stosunku do czasu t wystąpienia sygnału wyjściowego, zaś funkcja

$h(t, \tau)$ - jest funkcją Greena równania różniczkowego (3.8).

Rozwiązanie równania (3.3) o stałych współczynnikach otrzymamy analogicznie, z tym, że nie zależy ono od chwili t_0 - wystąpienia sygnału wejściowego. Można więc, dla uproszczenia analizy, wybrać t_0 dogodnie na początku osi czasu, czyli $t_0 = 0$ i wobec tego

$$y_I(t) = \int_0^t h(t - \tau) \cdot x(\tau) d\tau, \quad (3.12)$$

$h(t - \tau)$ jest teraz funkcją tylko jednej zmiennej, a mianowicie różnicy czasu wystąpienia sygnału wejściowego i odpowiedzi. Całki spłotu (3.11) i (3.12) zwane także całkami Duhamela, opisują odpowiednio system niestacjonarny (współczynniki zmienne w czasie) i system stacjonarny (współczynniki stałe). Przy zerowych warunkach początkowych, dla których $y_0(t) = 0$, całka spłotu stanowi całkowite rozwiązanie równania różniczkowego, a tym samym stanowi całkowity opis własności dynamicznych systemu. W teorii systemów $y_0(t)$ nazywa się odpowiedzią swobodną systemu (układu), zaś $y_I(t)$ odpowiedzią wymuszoną. Odpowiedź swobodna określa ruch własny systemu, gdy nie działają na niego żadne oddziaływania zewnętrzne ($x(t)=0$), a więc zależy ona jedynie od własności fizycznych systemu, a nie zależy od funkcji wymuszającej. Odpowiedź swobodna określa transformację stanu początkowego systemu i równa się zeru gdy stan początkowy (warunki początkowe) jest zerowy. Natomiast odpowiedź wymuszona ma charakter taki jak funkcja wymuszająca [R.H. C a n n o n , 1973].

Wobec powyższego całka spłotu oraz funkcja $h(t - \tau)$, czy też $h(t, \tau)$, odgrywają istotną rolę w matematycznym modelowaniu systemów. Funkcja $h(t - \tau)$ jest odpowiedzią systemu na impulsowe wejście w postaci funkcji δ Diraca i w teorii systemów nazywana jest impulsową funkcją przejścia, lub reakcją systemu na impulsowe wymuszenie. Natomiast całka (3.11) - dla systemu liniowego niestacjonarnego, zaś całka (3.12) - dla systemu liniowego stacjonarnego określają odpowiedź tych systemów na dowolne wymuszenie $x(t)$, przy zerowych warunkach początkowych.

Dla systemów o znanym opisie w postaci równania różniczkowego funkcja $h(t, \tau)$ jest określana jako stosunek dwóch wyznaczników utworzonych z liniowo niezależnych rozwiązań odpowiadającego równania jednorodnego [K. S o b c z y k , 1973; A.A. S w i e s z n i k o w , 1965]. W przypadku równania różniczkowego (3.3) o zmiennych współczynnikach nie ma wygodnych wzorów pozwalających obliczyć $h(t, \tau)$ i z tego względu,

z wyjątkiem prostych przypadków, jesteśmy zmuszeni przeprowadzać całkowanie numeryczne dla obliczenia $h(t, \tau)$ w systemach niestacjonarnych [k. O g a t a , 1974]. Natomiast w przypadku nieznanomości równań różniczkowych opisujących badany system funkcja $h(t)$ może być określona eksperymentalnie. Ten drugi właśnie sposób postępowania jest często stosowany w hydrologii.

3.3.3. Transmitancja operatorowa

Transmitancją operatorową $H(s)$ układu liniowego stacjonarnego nazywamy wielkość określoną jako stosunek transformaty Laplace'a $Y(s)$ odpowiedzi $y(t)$ do transformaty Laplace'a $X(s)$ wymuszenia $x(t)$ przy zerowych warunkach początkowych [T. K a c z o r e k , 1974]

$$H(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad (3.13)$$

przy czym

$Y(s)$ - transformata Laplace'a sygnału wyjściowego

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt \quad (3.14)$$

$X(s)$ - transformata Laplace'a sygnału wejściowego

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt. \quad (3.15)$$

Transmitancja operatorowa jest wielkością zespoloną zależną od parametrów systemu i od zmiennej zespolonej s .

Znając transmitancję operatorową $H(s)$ oraz transformatę $X(s)$ dowolnego sygnału wejściowego $x(t)$, można stosując odwrotną transformatę Laplace'a znaleźć odpowiedź systemu $y(t)$ na to wejście.

Z zależności (3.13) mamy

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) \quad (3.16)$$

stosując transformatę odwrotną otrzymujemy

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} [H(s) \cdot X(s)] . \quad (3.17)$$

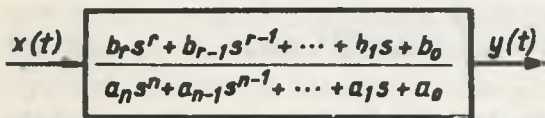
Dla systemu liniowego stacjonarnego opisanego równaniem różniczkowym (3.3) lecz ze stałymi współczynnikami transmitancję operatorową uzyskujemy dokonując transformacji Laplace'a obu stron równania przy założeniu zerowych warunków początkowych

$$\begin{aligned} & [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] Y(s) = \\ & = [b_r s^r + b_{r-1} s^{r-1} + \dots + b_1 s + b_0] X(s) \end{aligned} \quad (3.18)$$

stąd

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_r s^r + b_{r-1} s^{r-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{\sum_{j=0}^r b_j s^j}{\sum_{l=0}^n a_l s^l} . \quad (3.19)$$

Analizując zależności (3.19) łatwo zauważyć, że transmitancja systemu liniowego stacjonarnego (rys.3.3) jest funkcją wymierną zmiennej s , niezależną od wielkości wejściowych i wyjściowych, a jedynie od parametrów charakteryzujących własności systemu.



Rys.3.3. Schemat blokowy systemu opisanego transmitancją

Dla systemu jednowymiarowego tzn. dla systemu z jednym wejściem i z jednym wyjściem transmitancja operatorowa jest skalarem, natomiast dla systemu wielowymiarowego o m wejściach i l wyjściami użyjemy macierz transmitancji operatorowej nazywaną transmitancją macierzową (pełne brzmienie: transmitancja macierzowa "wejście-wyjście")

$$\underline{H}(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \dots & H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \dots & H_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{l1}(s) & H_{l2}(s) & \dots & H_{lm}(s) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Transmitancja operatorowa $H_{ij}(s)$ między i -tym wyjściem a j -tym wejściem określa stosunek transformaty $Y_i(s)$ i -tego wyjścia $y_i(t)$ do transformaty $X_j(s)$ j -tego wejścia $x_j(t)$ przy założeniu, że warunki początkowe i wszystkie wejścia z wyjątkiem j -tego są równe zeru

$$H_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{X_j(s)}, \quad (3.21)$$

$i = 1, 2, \dots, l; \quad j = 1, 2, \dots, m.$

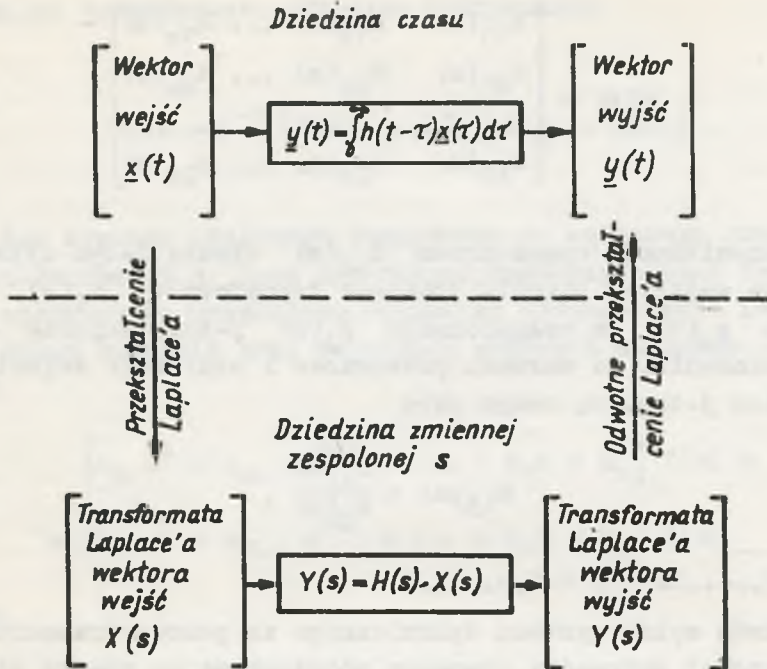
Metoda opisu systemu dynamicznego za pomocą transmitancji operatorowej sprowadza równania różniczkowe do równań algebraicznych, a tym samym znacznie ułatwia analizę skomplikowanych systemów. Należy jednak pamiętać, że transformaty Laplace'a można stosować tylko do równań liniowych o stałych współczynnikach, a więc za pomocą transmitancji opisywać możemy wyłącznie liniowe systemy stacjonarne.

Pomiędzy opisem systemu w postaci całki Duhamela podanym w rozdz. 3.3.2 i transmitancją operatorową istnieje jednoznaczna zależność. Impulsowa funkcja reakcji systemu $h(t)$ związana jest z transmitancją poprzez odwrotną transformatę Laplace'a

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(s)] . \quad (3.22)$$

Tak więc $h(t)$ oraz $H(s)$ stanowią tę samą charakterystykę własności dynamicznych systemu, z tym, że pierwsza z nich określona jest w dziedzinie czasu, a druga w dziedzinie zmiennej zespolonej s (rys. 3.4).

Transmitancja operatorowa, tak jak i postacie operatorowe omówione w rozdz. 3.3.1 oraz 3.3.2, może być określona bądź w oparciu o stanowiące opis rozpatrywanego systemu równanie



Rys.3.4. Współzależność postaci opisu systemu za pomocą transmitancji macierzowej i całki spłotu

różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach, bądź na drodze doświadczalnej jako iloraz transformat Laplace'a pomierzonych funkcji sygnału wyjściowego i wejściowego.

3.4. MODELE SYSTEMÓW HYDROLOGICZNYCH OPISANE RÓWNIANIEM „WEJŚCIE – WYJŚCIE” W POSTACI OPERATOROWEJ

3.4.1. Uwagi ogólne

Relacja "wejscie-wyjście" w postaci operatorowej stanowi najczęściej dotychczas stosowany opis zlewni. Wynika to z kilku powodów. Po pierwsze jest to najprostsza forma opisu jaką możemy uzyskać doświadczalnie w wyniku eksperymentu ograniczonego do pomiaru sygnałów wejściowego i wyjściowego. Po drugie

w wielu praktycznych przypadkach model zlewni jest opracowywany dla potrzeb prognozy przepływu rzecznoego w okresie wezbrań, a więc w okresie występowania dużych wartości sygnału wejściowego (dużych opadów). Wówczas to składowa swobodnej odpowiedzi systemu (wynikająca z warunków początkowych) jest, w stosunku do odpowiedzi wymuszonej mała i wobec tego postać operatorowa będąca opisem odpowiedzi wymuszonej daje zadawalające przybliżenie. Po trzecie w modelu prognostycznym przepływu rzecznoego znajomość stanu innych komponentów zlewni nie jest potrzebna i wówczas postać operatorowa "wejście-wyjście" pozwalająca określać przebieg sygnału wyjściowego ze zlewni traktowanej globalnie jest postacią w pełni uzasadnioną pod warunkiem, że wpływ gospodarowania wodą, w obszarze zlewni, na kształtowanie się przepływu rzecznoego może być pominięty.

3.4.2. Modele hydrologiczne w postaci całki splotu

Jak już wspomniano w rozdz.3.3.2, funkcja $h(t - \tau)$ występująca w całce splotu może być określana bądź w wyniku rozwiązania równania różniczkowego opisującego badany system, bądź na drodze eksperymentalnej. Dla systemu zlewni postać równania różniczkowego nie jest znana i wobec tego funkcja $h(t - \tau)$ określana jest wyłącznie w wyniku eksperymentu.

Całka splotu stanowi najczęściej i najchętniej stosowaną postać modelu zlewni, a właściwie modelu "opad skuteczny - spływ powierzchniowy". W związku z tym istnieje obecnie pokazalna liczba modeli, w których stosowane są różnorodne metody określania funkcji reakcji systemu $h(t - \tau)$. Obszerny przegląd tych metod oraz modeli je wykorzystujących, można znaleźć w pracach Ł. S. K u č m e n t a [1972], D o o g e ' a [1974, a] i innych.

Jedną z pierwszych (1952 r.) i najbardziej fizycznie uzasadnioną jest metoda hydrogramu jednostkowego opracowana przez Shermanna. Metoda ta w oparciu o analizę pomierzonego sygnału wyjściowego prowadzi do określenia wykresu funkcji $h(t - \tau)$ jako odpowiedzi systemu na impuls jednostkowy. Dalszym rozwinięciem tej metody jest określenie hydrogramu chwilowego (1945 r.) będącego odpowiedzią systemu na impuls δ -Diraca.

Inne metody, stanowiące najobszerniejszą grupę, to tzw. metody konceptualne polegające na wykorzystaniu informacji o własnościach i działaniu systemu zlewni dla określenia modelu systemu zastępczego, o znanej lub łatwej do wyznaczenia funkcji $h(t - \tau)$, który imituje działanie rzeczywistego systemu zlewni. W grupie tej wyróżnić można znane modele oparte na koncepcji izochron, różnego rodzaju kaskad zbiorników, kanałów itp. Wreszcie istnieje grupa modeli opartych na próbach dobierania różnych postaci funkcji przekształcających sygnał wejściowy w obserwowany sygnał wyjściowy. Próby te dotyczyły stosowania szeregów Fouriera, funkcji Laguerre'a, szeregu Maclaurina, czy też rozkładów prawdopodobieństwa typu gamma, Pearsona i innych jako aproksymacji funkcji hydrogramu jednostkowego. Wyniki większości tych prób, szczególnie rozwinąć w szereg są niezadawalające i to głównie z powodu niestabilności rozwiązania przy wzroście liczby wyrazów [L.S. K u ċ m e n t , 1972; 1974]. Również i inne sposoby rozwiązywania całki spłotu polegające np. na przekształceniu jej za pomocą formuły kwadraturowej (metoda prostokątów), czy określaniu funkcji $h(t - \tau)$ na podstawie teorii zagadnień źle uwarunkowanych, nie dają zachęcających wyników.

3.4.3. Modele hydrologiczne w postaci transmitancji

Termin "transmitancja" nie był dotychczas w hydrologii stosowany (L.S. K u ċ m e n t [1972] - stosuje termin funkcja przejścia), chociaż ten sposób opisu systemów hydrologicznych był stosowany aczkolwiek rzadko i wyłącznie dla modeli "opad skuteczny - odpływ powierzchniowy", które są często niewłaściwie nazywane modelami "opad - odpływ".

Pierwsze próby dotyczyły zastosowania transformaty Laplace'a dla określenia funkcji reakcji systemu $h(t - \tau)$ w zależności (3.12) i były podjęte w 1952 r. przez Paynter'a [V.T. C h o w , 1964; J.Č. D o o g e , 1974, a], a następnie przez A m o r o c h o i O r l o b ' a w 1961 r. oraz D i s k i n ' a w 1964 i 1967 r. Uzyskiwane wyniki nie były jednak zadowalające, a to głównie z powodu trudności związanych z funkcyjnym opisem sygnałów wejścia i wyjścia

w systemach hydrologicznych. Inni badacze [np. J.W. D e l - l e u r , R.A. R a o , 1971; G. H u t h m a n n 1975]; poszukiwali funkcji $h(t - \tau)$ stosując nie tylko transformację Laplace'a, ale i inne transformaty całkowe a mianowicie Fouriera i \mathcal{Z} (dla sygnałów dyskretnych). Również ostatnio w Zakładzie Gospodarki Wodnej i Hydrologii PW wykonano pewne próby, w ramach pracy magisterskiej [H. W y r z y k o w - s k a - K o p a c z , 1976], wykorzystania transformaty Fouriera (szybkiej transformaty Fouriera - FFT) dla określenia funkcji reakcji systemu.

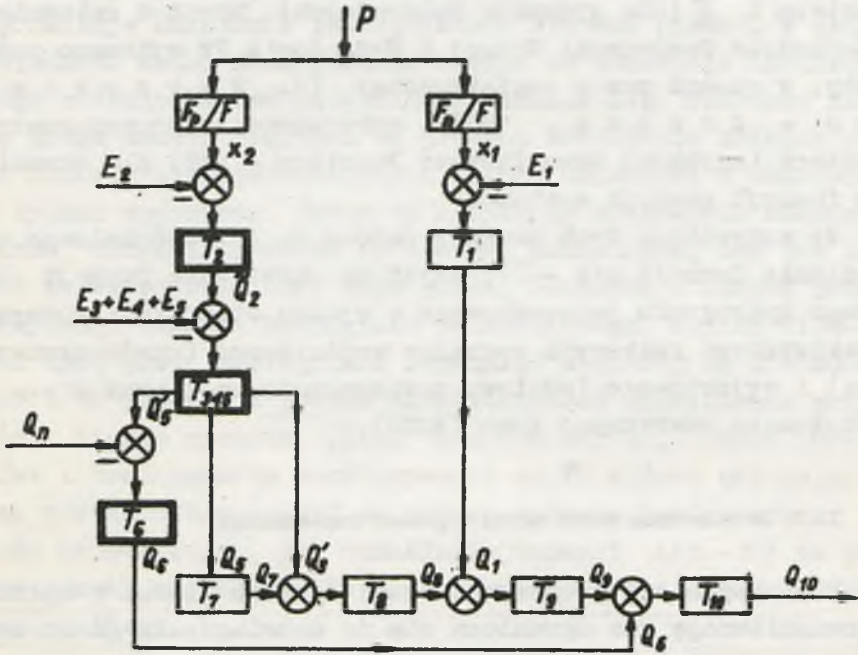
We wszystkich tych pracach dążono do doświadczalnego określenia funkcji $h(t - \tau)$, czyli do określenia funkcji chwilowego hydrografu jednostkowego w wyniku stosowania różnych przekształceń całkowych sygnałów wejściowego (opadu skutecznego) i wyjściowego (odpływu powierzchniowego) oraz przekształcenia odwrotnego typu (3.22).

3.4.4. Proponowany model zlewni w postaci transmitancji

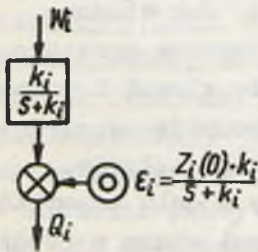
Podana poniżej propozycja opisu systemu zlewni w oparciu o transmitancję nie ogranicza się do doświadczalnego określenia funkcji $H(s)$ jako reakcji całej zlewni, lecz przedstawia możliwość określania postaci transmitancji dla poszczególnych podsystemów (podukładów), zlewni, w wyniku analizy ich własności dynamicznych, a następnie składania ich w transmitancję zastępczą (łączną) dla całego systemu zlewni. Jak wiadomo, transmitancja określona jest dla zerowych warunków początkowych, które nigdy nie są spełnione w systemie zlewni i wobec tego w proponowanym modelu przedstawiono koncepcję uwzględniania warunków początkowych dla poszczególnych podukładów.

Przedstawiony na rys.3.5 schemat blokowy modelu odpowiada strukturze systemu zlewni opisanego równaniami stanu w rozdz. 2.4.2. Również schematy zastępcze poszczególnych elementów (rys.3.6-3.9) oraz ich transmitancje wynikają z odpowiadających im równań stanu. Model (rys.2.4) opisany jest dziesięcioma równaniami stanu i wobec tego na schemacie przedstawionym na rys.3.5 wyróżniono również dziesięć elementów, z tym, że

elementy T_3, T_4 i T_5 , z tych samych powodów jak przy opisie równaniami stanu, są rozpatrywane łącznie jako jeden element T_{345} .



Rys.3.5. Schemat blokowy modelu systemu zlewni opisanego transmitancją



Rys.3.6. Schemat zastępczy elementów liniowych $T_i (i = 1, 7, 8, 9, 10)$

W modelu występuje pięć elementów liniowych T_1, T_7, T_8, T_9 i T_{10} , dla których schematy zastępcze są jednakowe i bardzo proste (rys.3.6) a odpowiadające im transmitancje mają postać

$$H_i(s) = \frac{k_i}{s + k_i}, \quad (3.23)$$

$$i = 1, 7, 8, 9, 10.$$

Uwzględniając składową przejściową (odpowiedź swobodna systemu) pochodzącą od warunków początkowych

$$\epsilon_i = \frac{z_i(0) k_i}{s + k_i}, \quad (3.24)$$

gdzie

$$z_i(0) = z_i(t_0)$$

otrzymamy całkowitą odpowiedź każdego z elementów liniowych w postaci

$$Q_i(s) = \frac{z_i(0) k_i}{s + k_i} + \frac{k_i}{s + k_i} W_i(s) \quad (3.25)$$

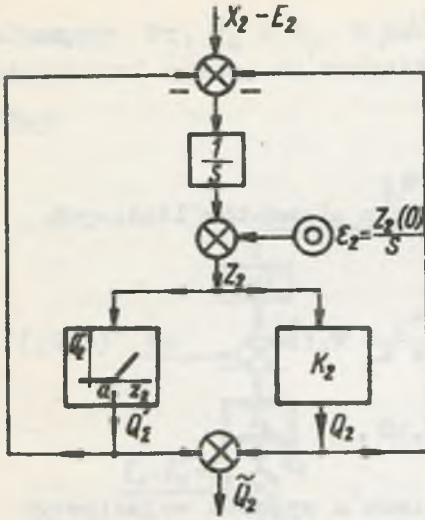
$$i = 1, 7, 8, 9, 10,$$

gdzie $W_i(s)$ jest transformatą Laplace'a sygnału wejściowego i -tego elementu.

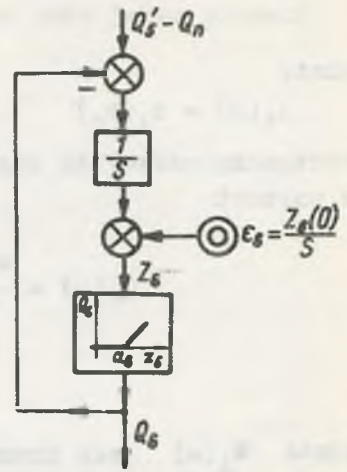
Wobec przyjęcia, w proponowanym w rozdz.2.4.2 modelu, progowej struktury systemu zlewni, elementy T_2 , T_{345} oraz T_6 stanowią układy nieliniowe w sensie nieliniowości systemu, chociaż opisane są one zależnościami liniowymi w sensie matematycznym. Jak wiadomo transmitancja może być określana wyłącznie dla układów liniowych, a więc chcąc elementy nieliniowe opisać transmitancjami musimy określić transmitancje oddzielnie dla poszczególnych przedziałów (pomiędzy progowymi ograniczeniami zmiennych stanu), w których układ spełnia warunki liniowości. W elementach T_2 (rys.3.7) i T_6 (rys.3.8) występują po dwa takie przedziały, a więc są to elementy dwuzakresowe, natomiast w złożonym elemencie T_{345} (rys.3.9) występują cztery ograniczenia dwuzakresowe oraz jedno trzyczakresowe, co po uwzględnieniu wszystkich dróg (kombinacji) przejścia sygnału wejściowego daje 192 przypadki. Dla każdego z tych przypadków system zlewni będzie opisany inną transmitancją zastępczą. Przykładowo podano wyznaczanie transmitancji zastępczej modelu dla jednego przypadku spełniającego następujące warunki (ograniczenia zmiennych stanu)

$$1. \quad a_2 > z_2 > 0$$

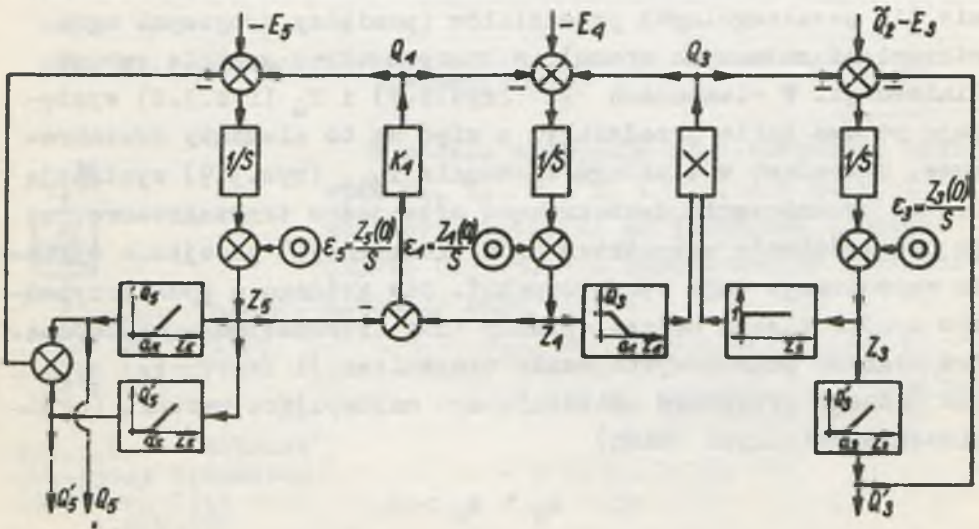
$$2. \quad z_3 > a_3$$



Rys.3.7. Schemat zastępczy elementu nieliniowego T_2



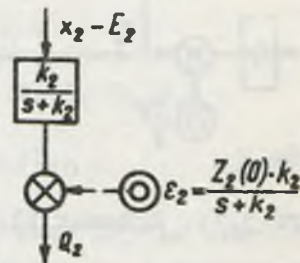
Rys.3.8. Schemat zastępczy elementu nieliniowego T_6



Rys.3.9. Schemat zastępczy elementu nieliniowego T_{345}

3. $a_4 > z_4 > a_4^0$
4. $a_5' > z_5 > a_5$
5. $z_6 > a_6$
6. $z_i > 0 \quad (i = 1, 7, 8, 9, 10).$

Warunek 1 powoduje, że schemat blokowy elementu nieliniowego T_2 upraszcza się do postaci liniowej (rys.3.10). Podobnie warunki 2, 3 i 4 stanowią podstawę do uproszczeń w schemacie blokowym T_{345} do postaci liniowej (rys.3.11). Schemat blokowy elementu nieliniowego T_6 (rys.3.8) przy warunku 5 staje się analogiczny do schematu elementu T_2 (rys.3.10) z tym, że na wejściu nie pojawia się Q_5' ze względu na warunek 4.



Schemat blokowy całego modelu przy warunkach 1 - 6 przedstawiono na rys.3.12, gdzie dla elementów T_i ($i = 1, 2, 3, 8, 9, 10$) transmitancje przyjmują postać

Rys.3.10. Schemat blokowy elementu T_2 przy warunku 1

$$H_i(s) = \frac{k_i}{s + k_i}, \quad (3.26)$$

zaś generatory zastępcze warunków początkowych

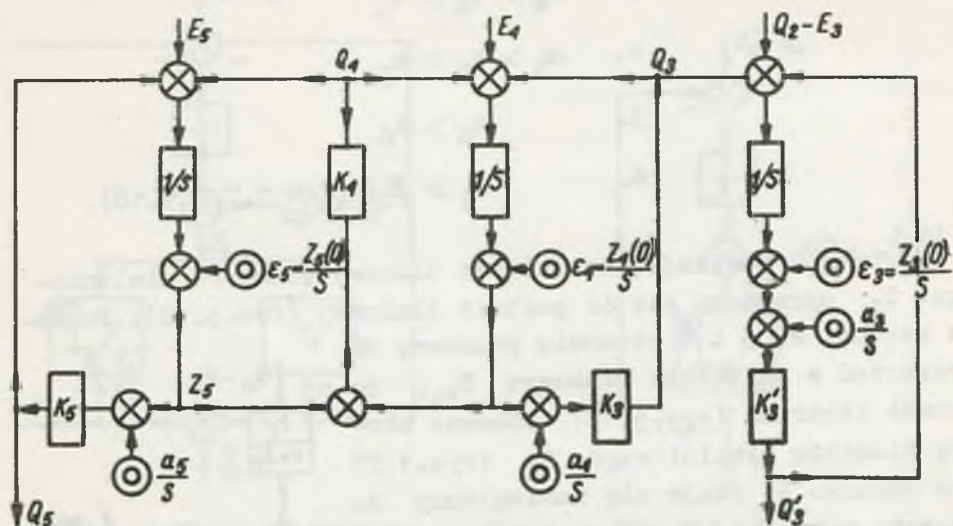
$$\epsilon_i = \frac{z_i(0) k_i}{s + k_i} \quad (3.27)$$

$$i = 1, 2, 7, 8, 9, 10$$

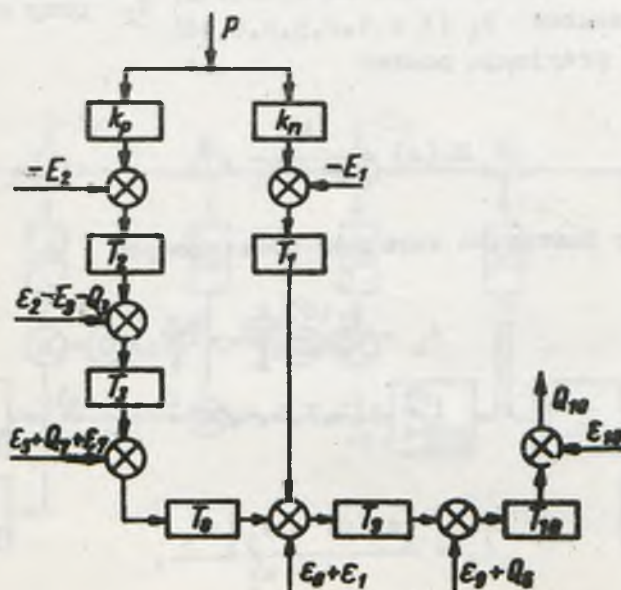
oraz

$$\epsilon_3 = \frac{[z_3(0) - a_3] k_3'}{s + k_3'}, \quad (3.28)$$

$$\epsilon_6 = \frac{[z_6(0) - a_6] k_6}{s + k_6}. \quad (3.29)$$



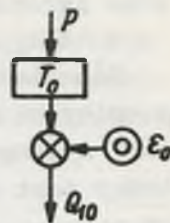
Rys.3.11. Schemat blokowy elementu T_{345} przy warunku 2,3 i 4



Rys.3.12. Schemat blokowy modelu przy warunkach 1 - 6

Schemat przedstawiony na rys.3.12 można zredukować (po prostych przekształceniach) do postaci końcowej o jednym elemencie T_0 (rys.3.13) i transmitancji zastępczej

$$H_0(s) = \left\{ k_p T_2 T_3 T_8 + k_n T_1 \right\} T_9 T_{10} \quad (3.30)$$



Rys.3.13.
Zredukowany
schemat blo-
kowy modelu

oraz generatorze zastępczym warunków początkowych

$$\begin{aligned} \epsilon_0 = & E_2 T_2 T_3 T_8 T_9 T_{10} + \\ & + (\epsilon_2 - E_3 - Q_3) T_3 T_8 T_9 T_{10} + \\ & + (\epsilon_3 + Q_7 + \epsilon_7) T_8 T_9 T_{10} + E_1 T_1 T_9 T_{10} + \\ & + (\epsilon_1 + \epsilon_8) T_9 T_{10} + (\epsilon_9 + Q_6) T_{10} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Przedstawiony integralny model zlewni przy użyciu transmitancji chociaż posiada dość złożoną strukturę, to jednak wszystkie 192 wyróżnione przypadki, określenia transmitancji zastępczej, są możliwe do zapisania w postaci algorytmów obliczeniowych automatycznie je uwzględniających.

Natomiast z punktu widzenia praktycznej przydatności model ten charakteryzuje się analogicznymi, jak w przypadku opisu równaniami stanu (rozd.2.4.2), własnościami w zakresie możliwości wprowadzenia do poszczególnych elementów sterowań wynikających z bieżącego gospodarowania wodą w obszarze zlewni.

4. WŁASNOŚCI I WZAJEMNE ZWIĄZKI PRZEDSTAWIONYCH POSTACI OPISU SYSTEMÓW HYDROLOGICZNYCH

4.1. PROBLEMY RÓWNOWAŻNOŚCI POSZCZEGÓLNYCH FORM OPISU SYSTEMU

Przedstawione w rozdz.2 i 3 opisy systemów dynamicznych uwidaczniają możliwości stosowania różnych postaci modelu dla tego samego systemu. Wynikają więc pytania:

- czy opisy te są równoważne tzn. czy znajomość jednego pozwala jednoznacznie określić pozostałe?

- jakie są związki między tymi opisami?
- kiedy w praktyce który z nich należy stosować?

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest negatywna. Okazuje się, że opisy te nie zawsze są równoważne. Najpełniejszy opis własności systemu uzyskujemy stosując równania stanu, mniej dokładny jest opis "wejście-wyjście" za pomocą równania różniczkowego zwyczajnego dowolnego rzędu, a najmniej dokładny w postaci operatorowej. Wyłącznie dla systemu opisanego równaniami stanu istnieje możliwość jednoznacznego określenia opisu "wejście-wyjście" w postaci równania różniczkowego zwyczajnego dowolnego rzędu i w postaci transmitancji operatorowej o ile system jest liniowy i stacjonarny. Dla systemu opisanego równaniem różniczkowym zwyczajnym dowolnego rzędu można określić jednoznacznie transmitancję operatorową naturalnie też tylko w przypadku, gdy system ten jest liniowy i stacjonarny. Natomiast dla systemu, którego opis znamy tylko w postaci transmitancji operatorowej nie można określić jednoznacznie żadnej z dwóch pozostałych postaci opisu systemu. Wynika to z faktu istnienia wielu nieekwiwalentnych opisów za pomocą równań stanu, dla których opis "wejście-wyjście" w postaci równania różniczkowego zwyczajnego dowolnego rzędu jest ten sam, a z kolei istnieje wiele równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach (są one opisami różnych systemów), których transmitancja operatorowa jest taka sama.

Posiadając opis liniowego systemu stacjonarnego w postaci transmitancji można naturalnie określić dla niego zarówno opis w postaci równania różniczkowego o najprostszej lub zadanej postaci, jak również można określić równania stanu o najprostszej (realizacja minimalna macierzy A,B,C,D), lub zadanej postaci jednak należy wyraźnie zdawać sobie sprawę, że uzyskane przekształcenia nie są jedynymi lecz tylko jednymi z wielu możliwych. Natomiast znając opis systemu w postaci równań stanu (2.9) i wyjść (2.10) można jednoznacznie określić odpowiadający mu opis "wejście-wyjście" w postaci równania różniczkowego i transmitancji. w tym celu należy poprzez wielokrotne (w zależności od liczby współrzędnych stanu) różniczkowanie równań (2.9) i (2.10) doprowadzić do tylu równań, aby można było wyeliminować z nich współrzędne stanu z_1, z_2, \dots, z_k oraz

ich pochodne. W ten sposób uzyskuje się związek, w którym będą występowały wyłącznie zmienne wejściowe i wyjściowe. Szerokie omówienie metod wzajemnego (przy różnych założeniach i ograniczeniach) przekształcania przedstawionych tutaj trzech postaci opisu systemu można znaleźć w pracy [O g a t a 1974].

4.2. WARUNKI POCZĄTKOWE

Dla niektórych systemów, szczególnie dla naturalnych systemów przyrodniczych a więc i systemów hydrologicznych, istotną rolę w określaniu reakcji na sygnał wejściowy odgrywają warunki początkowe tzn. warunki, w których znajduje się system w chwili wystąpienia sygnału wejściowego.

Opis systemu w postaci równań stanu wymaga znajomości wektora z_0 , a więc uwzględnia warunki początkowe systemu, natomiast zupełnie inaczej przedstawia się ten problem w przypadku przekształcenia równań stanu do zależności "wejście-wyjście" w postaci transmitancji.

Posiadając opis systemu w postaci równania stanu (2.9) i równania wyjścia (2.10) można, stosując obustronną transformację operatorową Laplace'a tych równań, bezpośrednio określić transmitancję operatorową. Równanie (2.9) po przekształceniach można zapisać w postaci

$$Z(s) = [sI - A]^{-1} z_0 + [sI - A]^{-1} B X(s), \quad (4.1)$$

gdzie I - jest macierzą jednostkową.

Oznaczając

$$H_1(s) = [sI - A]^{-1} \quad - \text{macierz o wymiarach } k \times k \quad (4.2a)$$

$$H_2(s) = [sI - A]^{-1} B \quad - \text{macierz o wymiarach } k \times m \quad (4.2b)$$

równanie (4.1) przyjmuje postać

$$Z(s) = H_1(s) z_0 + H_2(s) X(s). \quad (4.3)$$

Pierwszy składnik zależności (4.3) odpowiada rozwiązaniu równania jednorodnego ($x(t) = 0$) odnośnego równania niejednorodnego (2.9) i stanowi odpowiedź swobodną systemu zależną od stanu początkowego z_0 , zaś drugi jest odpowiedzią wymuszoną systemu zależną od wektora sygnału wejściowego i niezależną od stanu początkowego systemu z_0 .

Stosując transformację Laplace'a do równania wyjść (2.10) otrzymamy w postaci operatorowej

$$Y(s) = C Z(s) + D X(s). \quad (4.4)$$

Zgodnie z definicją (rozd.3.3.3) transmitancja operatorowa "wejscie-wyjście" ustalona jest dla zerowych warunków początkowych, a więc przyjmując, że wektor stanu w chwili $t_0 = 0$ przybiera wartość zerową tj. $z_0 = 0$ i podstawiając zależność (4.3) do równania (4.4) otrzymujemy

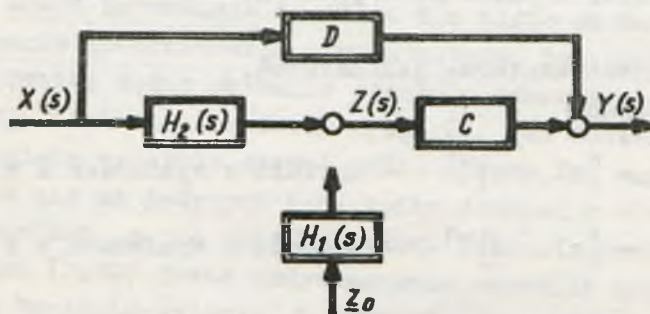
$$Y(s) = C H_2(s) X(s) + D X(s) = H(s) X(s), \quad (4.5)$$

gdzie wobec (4.2b)

$$H(s) = C [sI - A]^{-1} B + D \quad (4.6)$$

jest transmitancją macierzową "wejscie-wyjście" o wymiarach $l \times m$.

Schemat blokowy przedstawiony na rys.4.1 ilustruje zależność (4.5) i wyraźnie uwidacznia, że transmitancja charaktery-



Rys.4.1. Schemat blokowy systemu opisanego transmitancją macierzową

zuje jedynie wpływ wektora sygnałów wejściowych na wektor sygnałów wyjściowych, pomijając wpływ stanu początkowego systemu,

gdyż nie zawiera gałęzi $H_1(s)$ wobec założenia, że $z_0 = 0$. Transmittancja nie stanowi więc pełnego opisu systemu i wobec tego nie zawsze może być uznana za opis wystarczający.

Odnosnie innych postaci zależności "wejście-wyjście", a mianowicie równania różniczkowego zwyczajnego dowolnego rzędu, to naturalnie pełne rozwiązanie równania (3.4) czy (3.8) wymaga podania warunków początkowych

$$y(t_0), \dot{y}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0), \quad (4.7)$$

a więc uwzględnia stan początkowy. Natomiast stosowanie do opisu systemu jedynie całki spłotu (3.11) czy (3.12) pociąga za sobą przyjęcie zerowego stanu początkowego. Wobec tego, tak jak i transmittancja, całka spłotu nie stanowi pełnego opisu systemu i nie może być stosowana dla systemów, w których w chwili wystąpienia sygnału wejściowego nie istnieje zerowy stan początkowy tzn. system nie znajduje się w stanie spoczynku. Odrzucane jest bowiem wówczas wyrażenie (3.10) określające swobodną odpowiedź systemu, która stanowi transformację stanu początkowego.

Podobnie, stosowanie do opisu systemu dowolnej zależności typu (3.5) pociąga za sobą pominięcie odpowiedzi swobodnej systemu.

4.3. STEROWALNOŚĆ I OBSERWOWALNOŚĆ

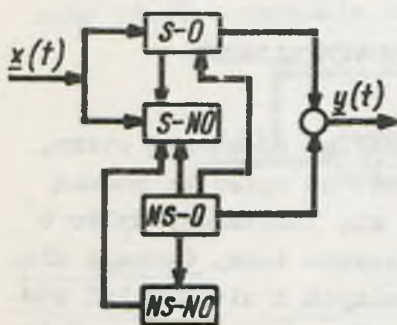
Wynika ponadto pytanie czy przechodząc od równań stanu, które są najpełniejszym opisem systemu, do opisu za pomocą transmittancji czy całki spłotu traci się informację tylko o stanie początkowym systemu czy też jeszcze inną. Okazuje się, że dla systemów nie w pełni obserwowalnych i nie w pełni sterowalnych traci się znacznie więcej informacji, a mianowicie część informacji zawartej w elementach macierzy A, B, C i D równań stanu i wyjść. Aby określić, które elementy tych macierzy ulegają pominięciu należy chociaż ogólnie zapoznać się z pojęciami sterowalności i obserwowalności systemu. Podane poniżej definicje określają sterowalność i obserwowalność systemu

w sensie Kalmana i odnoszą się do systemów liniowych i stacjonarnych [J. Pułaczewski, K. Szacka, A. Manitius, 1974; A. Niedźwiedziński, 1974].

System dynamiczny nazywamy całkowicie sterowalnym (lub po prostu sterowalnym), jeżeli dla każdego t_0 istnieje takie sterowanie $\underline{v}(t)$, które spowoduje w skończonym przedziale czasu $(t_1 - t_0)$ zmianę dowolnego stanu początkowego $\underline{z}(t_0)$ w dowolny stan końcowy $\underline{z}(t_1)$. A więc sterowalność systemu oznacza możliwość, poprzez odpowiedni dobór $\underline{v}(t)$, doprowadzenia systemu od dowolnego stanu początkowego do dowolnego żądanego stanu końcowego. Wektor $\underline{x}(t)$ obejmuje te spośród sygnałów wejściowych $\underline{x}(t)$, za pomocą których jest prowadzone sterowanie systemem i nosi nazwę wektora sterowań.

System dynamiczny nazywa się całkowicie obserwowalnym (lub po prostu obserwowalnym) w przedziale czasu $t_0 \leq t \leq t_1$, jeżeli dla każdego t_0 możemy określić stan początkowy systemu $\underline{z}(t_0)$ na podstawie znajomości wektora sygnałów wejściowych $\underline{x}(t)$ i wyjściowych $\underline{y}(t)$ w tym przedziale. Tak więc, dla systemu obserwowalnego możemy określić wszystkie współrzędne wektora stanu w oparciu o obserwacje (pomiar) wektora sygnałów wyjściowych przy znanym sygnale wejściowym.

Wobec powyższego w systemach całkowicie sterowalnych wszystkie współrzędne stanu są zależne od sygnału sterującego, a



Rys.4.2. Schemat blokowy systemu podzielonego ze względu na sterowalność i obserwowalność

więc są sterowalne, natomiast w systemach częściowo sterowalnych niektóre współrzędne stanu są niezależne od sygnału sterującego, więc są niesterowalne. Z kolei, w systemach całkowicie obserwowalnych wszystkie współrzędne stanu mogą być wyznaczone w oparciu o pomiar sygnału wyjściowego, a więc są obserwowalne, natomiast w systemach nie w pełni obserwowalnych niektóre współrzędne stanu nie mogą być określone w oparciu o pomiar sygnału wyjściowego, a więc są nie-

obserwowalne. Prowadzi to do wydzielenia w systemie czterech

części systemu (podsystemów): sterowalnej i obserwowalnej (S - O), sterowalnej ale nieobserwowalnej (S - NO), niesterowalnej ale obserwowalnej (NS - O) oraz niesterowalnej i nieobserwowalnej (NS - NO). Na rys.4.2 przedstawiono schemat blokowy systemu z wydzielonymi częściami i ich wzajemnymi związkami ze względu na sterowalność i obserwowalność.

Dla systemu niecałkowicie sterowalnego i niecałkowicie obserwowalnego równania stanu (2.9) i wyjść (2.10) można doprowadzić, po uwzględnieniu macierzy zerowych które wynikają z faktu niesterowalności lub nieobserwowalności poszczególnych grup współrzędnych stanu (rys.4.2), do następującej postaci kanonicznej Kalmana [A. N i e d e r l i ń s k i , 1974]

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_{S-O} \\ \dot{z}_{S-NO} \\ \dot{z}_{NS-O} \\ \dot{z}_{NS-NO} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{S-O,S-O} & 0 & A_{S-O,NS-O} & 0 \\ A_{S-NO,S-O} & A_{S-NO,S-NO} & A_{S-NO,NS-O} & A_{S-NO,NS-NO} \\ 0 & 0 & A_{NS-O,NS-O} & 0 \\ 0 & 0 & A_{NS-NO,NS-O} & A_{NS-NO,NS-NO} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{S-O} \\ z_{S-NO} \\ z_{NS-O} \\ z_{NS-NO} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{S-O} \\ B_{S-NO} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{y} \quad (4.8)$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} C_{S-O} & 0 & C_{NS-O} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{S-O} \\ z_{S-NO} \\ z_{NS-O} \\ z_{NS-NO} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{S-O} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \underline{y} \quad (4.9)$$

przy czym $\underline{z} = \underline{z}(t)$, $\underline{y} = \underline{y}(t)$, $\underline{y} = \underline{y}(t)$.

Z powyższych równań można określić transmitancję operatorkową, która będzie miała postać

$$H(s) = C_{S-O}(sI - A_{S-O,S-O})^{-1} B_{S-O} + D_{S-O} \quad (4.10)$$

Tak więc transmitancja opisuje tylko część sterowalną i obserwowalną systemu, a więc daje pełen opis własności dynamicznych systemu (przy zerowych warunkach początkowych) wyłącznie dla systemów całkowicie sterowalnych i obserwowalnych. Natomiast w żadnym przypadku transmitancja nie daje opisu struktury systemu.

Problem sterowalności i obserwowalności został tutaj jedynie zasygnalizowany, natomiast szersze jego omówienie można znaleźć w wielu pracach [np. A. N i e d e r l i ń s k i , 1974; T. K a c z o r e k , 1974; J. P u ł a c z e w s k i , K. S z a c k a , A. M a n i t i u s , 1974]. Pojęcia sterowalności i obserwowalności, związane ściśle z praktyką opracowywania i identyfikacji modeli obiektów sterowania, nie były dotychczas stosowane w odniesieniu do systemów hydrologicznych i dlatego uznano za celowe wprowadzenie ich nawet w tej wstępnej formie.

Według A. N i e d e r l i ń s k i e g o [1974] wszystkie obiekty rzeczywiste są lub powinny być całkowicie sterowalne i obserwowalne, nie oznacza to jednak, że modele matematyczne tych obiektów są zawsze całkowicie sterowalne i obserwowalne. Tak więc znajomość i uwzględnienie warunków sterowalności i obserwowalności przy modelowaniu matematycznym obiektów sterowania są nieodzowne. Problem ten w odniesieniu do systemów hydrologicznych i ich modeli wymaga dalszych badań i stanowi oddzielne zagadnienie, które będzie w przyszłości rozwiązywane. Wobec tego rozdział ten oraz zawarte w nim sformułowania należy traktować jako luźne i wstępne uwagi związane z wprowadzeniem pojęć sterowalności i obserwowalności do analizy naturalnych systemów przyrodniczych jakimi są systemy hydrologiczne.

W teorii sterowania wydzielane są na ogół tylko dwa rodzaje wielkości wejściowych: sterowania i zakłócenia. W systemach naturalnych, które nie są sterowane przez człowieka lecz przez Naturę, wielkości wejściowe można podzielić na: wejścia kontrolowane (mierzone) i zakłócenia. Opis reakcji systemu na wejścia kontrolowane będzie identyczny jak w odniesieniu do sterowań, gdyż system niezależnie od tego czy określone wejś-

cie jest sterowaniem czy też tylko wejściem kontrolowanym, będzie na nie w ten sam sposób reagował.

Z podanej uprzednio definicji sterowalności wynika, że system sterowalny może być pod wpływem odpowiedniego sterowania doprowadzony do dowolnego, żądanego stanu końcowego. W odniesieniu do systemów naturalnych, tak sformułowany warunek nie może być spełniony, gdyż znając wejścia kontrolowane możemy jedynie określić stan końcowy, do którego system został doprowadzony przez wymuszenia wynikające z działania innych naturalnych systemów oraz przez wymuszenia sterowane przez człowieka. Na sterujący charakter sygnałów wejściowych, będących wielkościami narzuconymi badanemu obiektowi (systemowi) przez inny obiekt, zwraca uwagę [W. F i n d e i s e n 1974] wydzielający trzy grupy wielkości wejściowych:

- wejścia obiektu pochodzące od innych obiektów (mające charakter sterowań),

- sterowania, czyli wielkości wejściowe manipulowane,

- zakłócenia, to znaczy te fizyczne wielkości wejściowe, które nie są ani sterowaniami, ani wpływem innych obiektów systemu.

Dwie pierwsze grupy wyróżnionych wielkości wejściowych są niewątpliwie sterowaniami dla systemu, który przecież nie odróżnia kto nim steruje. Natomiast sama grupa pierwsza stanowi, w odniesieniu do czynnej działalności człowieka czyli sterowania manipulowanego, sterowanie które można by nazwać biernym.

Biorąc powyższe pod uwagę wydaje się, że celowe będzie wprowadzenie do opisu systemów hydrologicznych następujące wielkości wejściowe:

$x(t)$ - sterowanie bierne, czyli wejścia kontrolowane (mierzone) ale niesterowane przez człowieka,

$v(t)$ - sterowanie czynne, czyli wejścia sterowane przez człowieka,

$\xi(t)$ - zakłócenia.

Pozwoliliby to stosować do opisu naturalnych systemów hydrologicznych jak i w przyszłości systemów hydrologiczno-gospodarczych czyli systemów sterowanych czynnie, jednolitego rodzaju wejść - a mianowicie sterowań biernych i czynnych.

Wobec tego podana uprzednio definicja sterowalności systemu odnosiłaby się do sterowania czynnego, natomiast w odniesieniu do sterowania biernego (czy wejść kontrolowanych - jeżeli określenie sterowanie bierne byłoby uznane za nietrafne) można ją sformułować następująco: "System jest sterowalny biernie [kontrolowalny], jeżeli dla każdego t_0 istnieje takie sterowanie bierne [wejście kontrolowane] $x(t)$, które spowoduje w przedziale czasu $(t_1 - t_0)$ zmianę stanu początkowego $z(t_0)$ w określony, możliwy do przewidzenia [kontrolowany] stan końcowy $z(t_1)$ ".

Zagadnienie obserwowalności systemu wiąże się z możliwością określenia współrzędnych stanu w oparciu o pomiar (obserwację) wektora sygnałów wyjściowych. W przypadku możliwości określenia wszystkich współrzędnych stanu na podstawie znajomości $y(t)$ mówimy, że system jest całkowicie obserwowalny. Aby warunek ten był spełniony wektor $y(t)$ musi być zależny od każdej współrzędnej stanu $z(t)$.

W systemie zlewni hydrologicznej sygnałem wyjściowym mierzonym jest całkowity przepływ rzeczny, który jest bezpośrednio zależny tylko od jednej współrzędnej stanu a mianowicie całkowitego napełnienia koryta. Gdyby istniała możliwość niezależnego pomiaru poszczególnych składowych przepływu rzeczno, a więc przepływu gruntowego, przepływu z powierzchni nieprzepuszczalnej, przepływu z powierzchni przepuszczalnej i przepływu podpowierzchniowego, wówczas zaistniałaby możliwość określenia na podstawie pomiaru przepływu w rzece większej liczby współrzędnych stanu. Jednak pomiar taki jest zupełnie nierealny i wobec tego pozostają wyłącznie różne sposoby pośrednie, polegające na wydzielaniu z hydrogramu poszczególnych jego składowych. Prowadzi to do pośredniego (sztucznego) zwiększania obserwowalności systemu zlewni.

Innym sposobem zwiększenia obserwowalności systemu zlewni jest podział jej na podukłady modelowane i identyfikowane niezależnie, co wymaga jednak rozszerzenia zakresu obecnie prowadzonych pomiarów. Przy obecnie prowadzonych standardowych obserwacjach, naturalny system zlewni jest w małym stopniu obserwowalny i sterowalny (kontrolowalny).

Reasumując można stwierdzić, że wydzielenie z hydrogramu jego składowych zmienia w istotny sposób obserwowalność systemu zlewni. Natomiast pominięcie, w modelu zlewni, intercepcji powoduje, że współrzędna obszaru powierzchni przepuszczalnej staje się współrzędną sterowalną i wówczas razem ze współrzędną powierzchni nieprzepuszczalnej tworzą grupę współrzędnych sterowalnych. W oparciu o powyższe łatwo zauważyć, że model "opad skuteczny- odpływ powierzchniowy" (dla wydzielonego z hydrogramu odpływu powierzchniowego) obejmuje wyłącznie część sterowalną i obserwowalną i wobec tego transmitancja czy całka splotu daje pełen opis własności dynamicznych powierzchniowej części zlewni hydrologicznej.

W przeprowadzonej analizie sterowalności biernej i obserwowalności systemu zlewni nie brano pod uwagę parowania, które stanowi niemierzalne bezpośrednio wyjście i zwiększa nieobserwowalność systemu zlewni. Potraktowanie natomiast parowania jako znanego sterowania biernego, wynikającego z działania innego systemu, prowadzi do zwiększenia sterowalności systemu zlewni.

4.4. WARUNKI STOSOWALNOŚCI ORAZ WADY I ZALETY POSZCZEGÓLNYCH FORM OPISU SYSTEMU

Każda z omówionych w rozdz.2 i 3 form opisu systemu posiada określone zalety i wady, które należy dokładnie znać przed przystąpieniem do wyboru postaci modelu. Poszczególne formy opisu wymagają innej informacji do ich opracowania, a więc tym samym zawierają różną informację o systemie, która jest mniej lub bardziej przydatna dla określonego celu wykorzystania modelu.

Jak już wspomniano najbardziej ogólną, a zarazem najbardziej pełną formę opisu systemu stanowi opis w oparciu o równania stanu, które są podstawą nowoczesnej teorii układów wielowymiarowych [A. N i e d e r l i ŋ s k i , 1974]. Do połowy lat pięćdziesiątych metody opisu obiektów sterowania opierały się na klasycznym pojęciu transmitancji operatorowej i widmowej (ta ostatnia nie jest omawiana w niniejszej pracy).

Gwałtowny rozwój maszyn cyfrowych pod koniec lat pięćdziesiątych oraz możliwości zastosowania ich przy projektowaniu, symulowaniu i sterowaniu obiektów wielowymiarowych umożliwiły stworzenie teorii układów wielowymiarowych opartej na metodach przestrzeni stanu.

Wyższość opisu systemu równaniami stanu w stosunku do innych form opisu jest bezsprzeczna, jednak równocześnie wymaga największej informacji początkowej (apriorycznej) o strukturze i własnościach systemu, gdyż podstawowym sposobem wyznaczania równań stanu jest wyprowadzenie ich z równań opisujących prawa fizyczne rządzące systemem. Liczba równań stanu może być interpretowana fizycznie jako równa liczbie elementów systemu, które mają zdolność magazynowania masy lub energii. Wobec tego równania stanu mogą być również ustalone, dla wydzielonych w systemie elementów akumulujących (rozd.2.4.2) jako równania bilansowe wynikające z praw zachowania. Ponadto równania stanu mogą być wyprowadzone z równania różniczkowego wyższego rzędu opisującego dany system. Wówczas współrzędne stanu są kolejnymi pochodnymi względem czasu pierwszej wybranej współrzędnej i noszą nazwę współrzędnych fazowych. Współrzędne tego rodzaju, szczególnie przy wysokich rzędach równania, nie mają na ogół interpretacji fizycznej. Należy jednak podkreślić, że nie tylko w tym przypadku współrzędne stanu mogą być wielkościami nie posiadającymi interpretacji fizycznej. Dla każdego systemu można napisać nieskończenie wiele różnych równań stanu i wyjść, w których współrzędne wynikają z dowolnego, jednoznacznego przekształcenia. Macierz przekształceń współrzędnych stanu P o wymiarach $k \times k$ jest macierzą nieosobliwą. Przekształcone równania stanu (2.9) i wyjść (2.10) przyjmują postać

$$\dot{z}'(t) = A' z'(t) + B' x(t), \quad (4.11)$$

$$y(t) = C' z'(t) + D x(t), \quad (4.12)$$

przy czym

$$A' = P A P^{-1}, \quad B' = P B, \quad C' = C P^{-1}. \quad (4.13)$$

Przekształcenia współrzędnych stanu są często stosowane ze względów obliczeniowych i analizy własności systemu. Np. przekształcenie macierzy stanu A do postaci kanonicznej Jordana umożliwia prostą ocenę własności dynamicznych układów (systemów) wielowymiarowych, upraszcza modelowanie cyfrowe, umożliwia uproszczenie modelu matematycznego układu, upraszcza kryteria sterowalności i obserwowalności układów [A. N i e - d e r l i ń s k i , 1974].

Dla układów złożonych z podukładów można w prosty sposób otrzymać równania stanu na podstawie znajomości równań stanu podukładów oraz struktury układu. Istotną zaletą równań stanu jest możliwość włączenia do rozwiązania warunków początkowych oraz ograniczenie się w obliczeniach do k równań różniczkowych pierwszego rzędu zamiast badania równania różniczkowego rzędu wyższego. Ponadto równania stanu (2.5) stanowią wygodną formę zapisu zarówno dla liniowych jak i nieliniowych systemów.

Jedną z poważniejszych wad opisów w oparciu o równania stanu jest niemożność bezpośredniego uzyskania ich metodą doświadczalną (pomiarową). Istnieje co prawda możliwość, poprzez wybór współrzędnych stanu (metodą bezpośrednią, równoległą lub iteracyjną) i określenie macierzy A, B, C, D , wyprowadzania równań stanu na podstawie transmitancji uzyskanej metodą doświadczalną. Sposób ten prowadzi jednak do wyznaczenia macierzy A, B, C, D jako realizacji minimalnej (o minimalnej liczbie współrzędnych stanu), która jest w pełni sterowalna i obserwowalna. Wobec tego można w ten sposób jednoznacznie odtworzyć równania stanu wyłącznie dla systemów w pełni sterowalnych i obserwowalnych.

W przeciwieństwie do równań stanu, jedną z ważniejszych zalet opisów w oparciu o transmitancję lub całkę splotu jest możliwość uzyskania ich na drodze doświadczalnej. Nie zawsze przecież udaje się dokonać analizy wewnętrznej struktury i własności systemu i wówczas trzeba ograniczyć się i zadowolić badaniami doświadczalnymi, które w oparciu o pomierzone przebiegi sygnałów wejściowych i wyjściowych pozwalają wyznaczyć transmitancję, lub odpowiedź systemu na impulsy jednostkowe a więc opis w postaci całki splotu. Jednak opisy te cechują się

wieloma, uprzednio już szerzej omówionymi, mankamentami, z których głównymi są niemożność włączenia do równań warunków początkowych oraz opis wyłącznie systemów liniowych, a ponadto w odniesieniu do transmitancji - wyłącznie systemów stacjonarnych. Niemniej metoda doświadczalna pozwala uzyskać operator "wejście-wyjście" nawet dla bardzo złożonych systemów, naturalnie jedynie dla systemów w pełni sterowalnych i obserwowalnych lub dla ich sterowalnych i obserwowalnych części.

Opisy w postaci "wejście-wyjście" można uzyskać na drodze doświadczalnej dla istniejącego systemu, natomiast dla potrzeb projektowania systemu są one trudne do wykorzystania. Ponadto opisy te dla systemów z wieloma wejściami i wyjściami są nieraz w ogóle niemożliwe do uzyskania metodą doświadczalną. Oddzielne badanie wpływu poszczególnych wejść, przy stałych lub zerowych wartościach pozostałych, nie zawsze jest przecież możliwe.

Możliwość i celowość stosowania poszczególnych form opisu systemu zależą przede wszystkim od dwóch rodzajów informacji, a mianowicie od informacji apriorycznej oraz od informacji użytecznej. Pierwsza z nich stanowi informację początkową jaką posiadamy przystępując do opracowania modelu tzn. informację w oparciu o którą przeprowadzana jest specyfikacja i identyfikacja modelu. A więc będzie to informacja o strukturze i własnościach systemu (oryginału) oraz wynikach pomiarów uzyskanych z eksperymentu czynnego lub biernego. Opis systemu w oparciu o równania stanu wymaga największej informacji apriorycznej, natomiast postać operatorowa "wejście-wyjście" może być zastosowana przy informacji apriorycznej minimalnej, którą stanowią przebiegi sygnałów wejściowych i wyjściowych uzyskane w wyniku eksperymentu biernego. Drugi rodzaj informacji to informacja użyteczna, którą chcemy uzyskać za pomocą modelu, a więc informacja dla której model jest w ogóle opracowywany i która uzasadnia jego celowość. I tutaj, podobnie jak w odniesieniu do informacji apriorycznej, największą informację użyteczną (zarówno dla potrzeb prognozowania jak i sterowania) otrzymujemy z modelu integralnego opisanego równaniami stanu, natomiast najmniejszą z modelu globalnego w postaci operatorowej "wejście-wyjście". Należy wyraźnie podkreślić, że dla uzyska-

nia pożądaney informacji użytecznej, model musi być opracowany w oparciu o odpowiednią ilość informacji apriorycznej. Uzyskiwana informacja użyteczna jest ściśle związana i wynika z wykorzystanej informacji apriorycznej.

Naturalnie o możliwości zastosowania tej czy innej formy opisu systemu decyduje jeszcze wiele dodatkowych czynników, takich jak np. możliwości realizacji przyjętego rozwiązania, rodzaj i czas pracy maszyny matematycznej oraz inne czynniki techniczne, ekonomiczne itp.

5. PROBLEMY IDENTYFIKACJI I WERYFIKACJI MODELI HYDROLOGICZNYCH

5.1. WARUNKI IDENTYFIKACJI SYSTEMÓW HYDROLOGICZNYCH

Istotnym problemem rzutującym na ostateczny wybór postaci opisu systemu jest możliwość identyfikacji modelu. Problem ten jest szczególnie znaczący w przypadku systemów identyfikowanych w oparciu o eksperyment bierny oraz systemów nie w pełni mierzalnych i nie w pełni obserwowalnych, a właśnie do takich zaliczają się w większości systemy hydrologiczne.

Jak wiadomo zastosowanie określonej metodyki identyfikacji zależy od pierwszego etapu opracowania modelu tzn. od specyfikacji. W wyniku przeprowadzonej specyfikacji systemu może zaistnieć jedna z czterech sytuacji:

1. System jest w pełni rozpoznany pod względem jego własności, struktury, postaci opisu matematycznego i parametrów - posiadamy pełną informację aprioryczną.
2. System jest rozpoznany pod względem własności, struktury i ogólnej postaci opisu matematycznego lecz wartości liczbowe parametrów są nieznane tzw. funkcja opisująca działanie systemu jest określona z dokładnością do parametrów.
3. System jest częściowo rozpoznany - określony jest ogólny charakter jego działania pozwalający na przyjęcie pewnej zastępczej koncepcji jego opisu.
4. System jest całkowicie nierozpoznany - posiadamy zerową informację aprioryczną.

Każdej z powyższych sytuacji odpowiada inny poziom informacji apriorycznej. Wybór metody identyfikacji zależy właśnie głównie od poziomu posiadanej informacji apriorycznej oraz ponadto od dwóch dalszych czynników:

- czy określane są charakterystyki statyczne, czy dynamiczne systemu, oraz
- czy może być zastosowany eksperyment czynny, czy też musimy ograniczyć się do eksperymentu biernego.

W odniesieniu do systemów hydrologicznych, specyfikacja nie doprowadza do zaistnienia sytuacji pierwszej tzn. do uzyskania najwyższego poziomu informacji apriorycznej. Najczęściej natomiast spotykamy się z sytuacją trzecią oraz drugą. Sytuacja czwarta występuje w rzeczywistości bardzo rzadko lecz jest dość często w praktyce przyjmowana (zakładana).

W przypadku pierwszym, specyfikacja doprowadza do pełnej identyfikacji systemu i mówimy wówczas, że system został zidentyfikowany na drodze analitycznej, a więc opis systemu wprowadzony jest z praw fizycznych (lub chemicznych) wraz z wartościami liczbowymi parametrów mającymi sens fizyczny. Jest oczywiste, że sytuacja taka zdarza się rzadko i z praktycznego punktu widzenia może być ona w ogóle pomijana. Natomiast sytuacja druga jest tą do której dążymy w każdej dziedzinie nauki i która stanowi połączenie analitycznej metody identyfikacji z metodą eksperymentalną. Ogólna postać matematycznego opisu systemu określona jest wówczas na drodze analitycznej, zaś liczbowe wartości parametrów na drodze eksperymentalnej. Metoda ta nazywana jest nieraz metodą kombinowaną lub metodą analityczną z uwagi, że metoda czysto analityczna jest praktycznie nierealizowana. Podobny tok postępowania zachodzi w sytuacji trzeciej, z tym, że postać opisu matematycznego określona jest nie w oparciu o prawa fizyczne rządzące badanym systemem lecz o pewną koncepcję jego działania (modele konceptualne) i wówczas przyjęty model jest właściwie opisem systemu zastępczego, którym symulujemy działanie systemu badanego. Opis ten, jak poprzednio, jest w postaci ogólnej a parametry określone są w wyniku eksperymentu. Czwarta sytuacja wymaga określenia w wyniku identyfikacji zarówno postaci funkcji opisującej działanie systemu jak i liczbowych wartości parametrów.

Wobec braku jakiegokolwiek ogólnej informacji apriorycznej o własnościach i działaniu modelowanego systemu pozostaje wyłącznie droga czysto eksperymentalna. Jak już wspomniano, sytuacja zupełnego braku informacji apriorycznej o systemie zdarza się w rzeczywistości rzadko, niemniej sytuacja taka jest w praktyce często zakładana ze względu na trudności w realnym wykorzystaniu małej informacji apriorycznej tzn. ze względu na niemożność określenia postaci modelu na podstawie tej informacji. Nieraz jednak możemy spotkać się z sytuacją posiadania zerowej informacji apriorycznej o własnościach i strukturze systemu i wówczas bądź przyjmujemy model "czarnej skrzynki", bądź też w wyniku analizy pomierzonych odpowiedzi systemu na określone wymuszenia możemy na tyle poznać charakter działania systemu, że pozwoli nam to określić dla niego model conceptualny w oparciu o przyjęty system zastępczy. Tak więc, w tym ostatnim przypadku informacja aprioryczna o systemie została w wyniku eksperymentu na tyle zwiększona, że można identyfikować go jak w sytuacji trzeciej.

Z powyższego wynika, że eksperyment, w większym czy mniejszym stopniu, jest zawsze niezbędny przy praktycznej identyfikacji systemu. Wobec tego powstaje problem sposobu przeprowadzania eksperymentu. W odniesieniu do systemów hydrologicznych może być zastosowany, prawie wyłącznie tylko eksperyment bierny. Eksperyment bierny, w stosunku do czynnego, ma wiele wad, z których głównymi są:

- ograniczona liczba eksperymentów,
- występowanie zakłóceń trudnych, lub wręcz niemożliwych, do usunięcia,
- ograniczony zakres zmienności poszczególnych sygnałów,
- niemożność badania odpowiedzi systemu na typowe, specjalnie dobrane sygnały wejściowe, lecz badanie wyłącznie odpowiedzi na sygnały naturalne na ogół trudne do opisania matematycznego.

W związku z powyższymi charakterystyki statyczne (dla stanów ustalonych) czy charakterystyki dynamiczne (dla stanów nieustalonych) systemu mogą być określone w eksperymencie biernym jedynie statystycznymi metodami identyfikacji, gdyż sygnały mierzone w obecności zakłóceń (przypadkowych i niemie-

rzalnych) są właściwie realizacjami funkcji losowych. Do najbardziej popularnych, opartych na eksperymencie biernym, statystycznych metod identyfikacji (dla sytuacji czwartej tzn. przy nieznanym postaci ogólnej funkcji operatora) należy metoda funkcji korelacyjnej do wyznaczania charakterystyk dynamicznych oraz metoda analizy regresji do wyznaczania charakterystyk statycznych [K. Mańczak, 1971]. Obie te metody są szeroko stosowane w hydrologii przy identyfikacji modeli stochastycznych [Z. Kaczmarek, 1970; 1973]. Natomiast często w praktyce, nie tylko hydrologicznej, stosowane są przy eksperymencie biernym metody identyfikacji typowe dla eksperymentu czynnego. Zakłada się wówczas, że sygnały wejściowe są zdeterminowane o znanej typowej postaci np. skoku jednostkowego, impulsu δ -Diraca, czy sinusoidalnej. Sygnały wejściowe naturalne (mierzone w eksperymencie biernym) na ogół nie występują w postaci takich przebiegów typowych, lecz w niektórych przypadkach mogą być traktowane jako wynik nakładających się lub przesuniętych sygnałów o postaci typowej. Taki właśnie sposób podejścia stosowany jest przy określaniu hydrogramu jednostkowego będącego odpowiedzią na impuls prostokątny, czy hydrogramu chwilowego będącego odpowiedzią na impuls Dirac'a. Analizowane są wówczas pomierzone sygnały wejściowe w postaci histogramu opadu tzn. skwantowanego w czasie opadu deszczu dla założonych (czterogodzinnych, szesciogodzinnych czy innych) okresów próbkowania, lub w postaci nietogramu tzn. opadu deszczu w postaci sygnału ciągłego. Natomiast pomierzony sygnał wyjściowy w postaci hydrogramu, traktowany jest jako odpowiedź wynikowa uzyskana w oparciu o zasadę superpozycji (obowiązującą dla systemów liniowych) z odpowiedzi na pojedyncze impulsy wejściowe. Wobec tego odpowiedź na pojedynczy impuls można uzyskać w wyniku rozłożenia (np. metodą krzywej S) pomierzonego sygnału wyjściowego.

Identyfikacja analityczna kombinowana polegająca na określeniu, w znanych funkcjach operatorów, liczbowych wartości parametrów może być przeprowadzana bądź poprzez bezpośredni pomiar tych parametrów, bądź poprzez określenie ich na podstawie pomierzonych sygnałów wejściowych i wyjściowych w wyniku eksperymentu biernego lub czynnego. Bezpośrednie określenie

parametrów w przypadku pomiaru bez zakłóceń (mało realne w praktyce, ze względu chociażby na błędy samego przyrządu pomiarowego) wymaga jednokrotnego pomiaru każdego parametru. Natomiast pomiar w obecności zakłóceń wymaga wielokrotnego pomiaru każdego parametru i następnie, przy znajomości rozkładu prawdopodobieństwa zakłóceń, oszacowania wielkości tych parametrów [Z. B u b n i c k i , 1974]. W przypadku normalnego rozkładu zakłóceń, o wartości oczekiwanej równej zeru, prowadzi to do oszacowania parametru jako wartości średniej arytmetycznej z pomierzonych, która jest estymatorem zgodnym i nieobciążonym.

Pośrednie określenie parametrów w sytuacji w pełni deterministycznej, tzn. przy adekwatnym określeniu funkcji opisujących system oraz pomiarze sygnałów wejściowych i wyjściowych bez zakłóceń, wymaga wykonania r par pomiarów wejścia i wyjścia, równej liczbie r parametrów. Natomiast w przypadku pomiaru w obecności zakłóceń parametry szacowane są w oparciu o n pomiarów, gdzie $n > r$, metodami optymalizacji w wyniku minimalizacji przyjętej funkcji celu, opartej na porównaniu zgodności sygnałów wyjściowych pomierzonych i obliczonych z modelu. Ten ostatni sposób szacowania parametrów jest często stosowany w hydrologii gdy postaci funkcji operatorów wynikają z praw fizycznych lub stanowią modele konceptualne. Wobec tego również modele w postaci równań stanu mogą być identyfikowane w powyższy sposób. Metoda ta ma jednak pewne wady. Po pierwsze nie możemy oceniać dokładności określania poszczególnych parametrów, po drugie uzyskuje się optymalny zbiór parametrów dla założonej arbitralnie funkcji celu, która nie zawsze prowadzi do uzyskania jednakowej i najlepszej zgodności modelu z oryginałem dla całego zakresu zmienności sygnałów. Problem określenia najodpowiedniejszej funkcji celu (kryterium zgodności), dla identyfikacji systemów hydrologicznych metodami optymalizacji, nie został dotychczas rozwiązany i wymaga dalszych badań. Interesujące rezultaty uzyskano ostatnio w wyniku przeprowadzonego w Zakładzie Gospodarki Wodnej i Hydrologii Politechniki Warszawskiej eksperymentu numerycznego [W. F e l u c h , H. H e r n i k , 1976]. Analizie poddano siedem funkcji celu stosowanych, przez różnych badaczy, przy

identyfikacji modeli zlewni. Eksperyment przeprowadzono na ciągach wygenerowanych z modelu Nash'a o przyjętych parametrach $n = 2$ i $k = 2$. Okazało się, że topografia poszczególnych funkcji celu jest bardzo zróżnicowana. Posiadają one różnie zlokalizowane minima, a ponadto niektóre z nich charakteryzują się dużą liczbą minimów lokalnych. Najlepszą funkcją celu, w sensie przyjętych warunków:

- posiadanie względem parametrów modelu minimum w punkcie odpowiadającym rzeczywistej zgodności modelu z oryginałem,
- posiadanie tylko jednego minimum w założonym obszarze zmienności parametrów,
- szybka zbieżność, a więc duży gradient względem parametrów,

okazała się funkcja określająca średni względny błąd kwadratowy

$$Z = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (Q_{0i} - Q_i)^2}{\sum_{i=1}^m Q_{0i}^2}}, \quad (5.1)$$

gdzie

Q_{0i}, Q_i - odpowiednio i -te rzędne wyjścia z oryginału i obliczone ($i = 1, 2, \dots, m$),

N - liczba wezbrań,

m - liczba rzędnych wszystkich wezbrań łącznie.

Jeżeli wartość średniego błędu kwadratowego nas nie interesuje, to wystarczy stosować uproszczoną, nie zmieniającą lokalizacji minimum, postać

$$Z = \sum_{i=1}^m (Q_{0i} - Q_i)^2. \quad (5.2)$$

Dobłą, lecz wolniej zbieżną funkcją celu okazała się również funkcja określająca specjalny współczynnik korelacji

$$Z = \frac{1}{N} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (2 Q_{0i} \cdot Q_i - Q_i^2)}{\sum_{i=1}^m Q_{0i}^2}}. \quad (5.3)$$

Najgorsze wyniki uzyskano dla często stosowanej w praktyce hydrologicznej funkcji o postaci

$$Z = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{Q_{oi} - Q_i}{Q_{oi}} \right)^2}. \quad (5.4)$$

Przeprowadzony eksperyment wykazał, że lokalne minima funkcji nie są spowodowane tylko błędami pomiarów i nieadekwatnością modelu, ale przede wszystkim własnościami funkcji celu - stąd duży wpływ postaci funkcji celu na uzyskiwane wartości parametrów.

Wynikająca z potrzeb praktyki chęć określania optymalnych wartości parametrów modelu jednocześnie w odniesieniu do różnych kryteriów zgodności prowadzi do sformułowania funkcji celu w postaci wielokryterialnej. Biorąc jednak pod uwagę omówione powyżej wyniki badania topografii funkcji jednokryterialnych, należy zachować dużą ostrożność przy tworzeniu funkcji wielocłonowych, których topografia będzie jeszcze bardziej złożona a ponadto znacznie trudniejsza do analizy.

Należy zaznaczyć, że we wszystkich eksperymentalnych metodach identyfikacji pomiary powinny być przeprowadzane dla tych samych warunków początkowych lub dla każdorazowo określonych i uwzględnionych warunków początkowych.

Osobny problem stanowi identyfikacja systemów niestacjonarnych. Istnieją tutaj dwa sposoby podejścia¹ [Z. B u b n i c k i - 1974]. Jeden polega na określeniu modelu rzeczywiście niestacjonarnego, a więc modelu o parametrach zmiennych w czasie przy czym zmiany te nie są przypadkowe, lecz zdeterminowane i określone konkretną postacią zależności od czasu. Drugi sposób podejścia, stosowany dla systemów o niestacjonarnych parametrach zmieniających się powoli, polega na przyjęciu modelu stacjonarnego. Model stacjonarny może stanowić wystarczająco

¹ Rozpatrywane są wyłącznie systemy, których niestacjonarność wynika ze zmieniających się w czasie wartości parametrów, nie zaś ze zmieniającej się struktury i własności systemu tzn. ze zmieniającej się postaci funkcji operatorów, gdyż wówczas problem sprowadza się do identyfikacji innego, nowego systemu.

jąco dobre przybliżenie systemu dla pewnego odcinka czasu, w ciągu którego parametry systemu niewiele zmieniły się.

W obu przypadkach identyfikacja zależna jest nie tylko od długości serii pomiarowej lecz również od czasu w jakim wykonano eksperyment, a więc od początkowego momentu eksperymentu. W przypadku drugim występuje ponadto problem określenia długości identyfikującej serii pomiarowej jako podstawy optymalnego wyznaczenia wartości parametrów dla potrzeb wykorzystania modelu w określonym momencie (lub przedziale) czasu następującym po momencie, z którego pochodzi ostatnia wartość serii pomiarowej. Określenie optymalnej długości serii identyfikującej, czyli optymalnego okresu obserwacji systemu, wynika bezpośrednio z faktu występowania parametrów zmieniających się w czasie. Im dłużej trwa obserwacja systemu tym bardziej oszacowane parametry różnią się od wartości rzeczywistych jakie występują w okresach następnych. Tak więc, w systemie niestacjonarnym, aproksymowanym (przybliżonym) systemem stacjonarnym, im dłuższa (powyżej długości optymalnej) będzie seria obserwacyjna to tym gorsze uzyskamy oszacowanie parametrów dla potrzeb prognozy. Zachodzi wówczas potrzeba zastosowania modelu adaptacyjnego, którego algorytm identyfikacji (identyfikacja "on-line") przewiduje możliwość ciągłej zmiany wartości parametrów w oparciu o informację roboczą. Informację roboczą uzyskuje się w czasie eksploatacji modelu poprzez stałe porównywanie wyników otrzymywanych z modelu z pomiarami rzeczywistymi.

W systemach hydrologicznych występuje ponadto niestacjonarność okresowa wynikająca z sezonowych zmian wartości niektórych parametrów w cyklu rocznym. Szersze omówienie i propozycje praktycznej realizacji identyfikacji modeli okresowo-cyklicznie niestacjonarnych znaleźć można w pracy [Model matematyczny zlewni 1974; 1975 a,b].

Jak podano na początku tego rozdziału, trudności identyfikowania systemów hydrologicznych wynikają nie tylko z konieczności stosowania prawie wyłącznie eksperymentu biernego, lecz również z faktu występowania znacznych ograniczeń w przeprowadzaniu tego eksperymentu. System zlewni, traktowanej całościowo, ma dwa wyjścia: odpływ rzeczny i parowanie. Pomie-

rzony w korycie rzeczonym przepływ stanowi zawsze sumę odpływów z różnych komponentów (podukładów) zlewni i rozdzielenie jego na poszczególne składowe jest praktycznie niemożliwe. Istnieją, co prawda, różnego rodzaju pośrednie metody rozdzielania hydrogramu na przepływ gruntowy, podpowierzchniowy i powierzchniowy, jednak są to metody przybliżone, w znacznym stopniu subiektywne i nie dające zadawalających rezultatów. Jedynie w okresie bezdeszczowym, gdy występuje wyłącznie zasilanie ze strefy saturacji, może być bezpośrednio pomierzona składowa przepływu gruntowego, natomiast pozostałe składowe nie mogą w żadnym przypadku być pomierzone oddzielnie. Jeszcze gorzej przedstawia się sytuacja z pomiarem parowania terenowego, które jak wiadomo nie może być określone w wyniku bezpośredniego pomiaru.

Wobec powyższego, w oparciu o pomierzone wyjścia z systemu zlewni nie mogą być określone wszystkie współrzędne stanu, co oznacza niepełną obserwalność systemu zlewni. W tej sytuacji jedyną możliwością zwiększenia informacji, dla potrzeb identyfikacji, jest przyjęcie koncepcji wykorzystywania pomiarów tych wszystkich współrzędnych stanu i wyjść z poszczególnych podukładów zlewni, które są mierzalne i istnieją realne możliwości ich pomiaru. Pozwoli to na identyfikowanie parametrów oddzielnie dla modeli poszczególnych komponentów (podukładów), a następnie na włączenie ich do modelu całej zlewni.

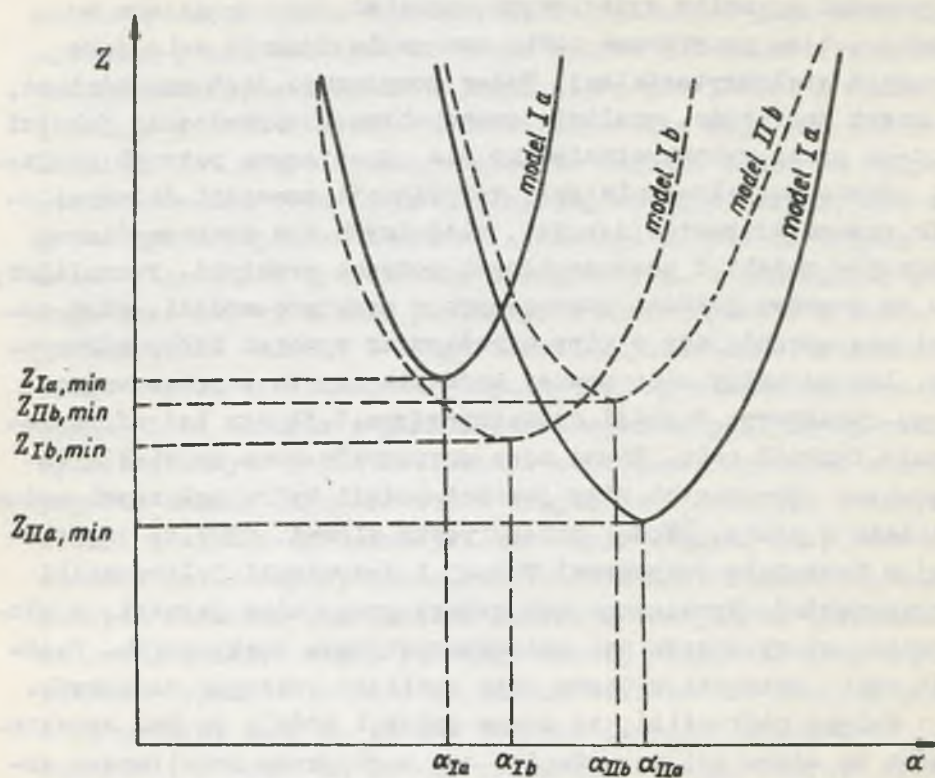
Zwiększenie informacji dla potrzeb identyfikacji stanowi we współczesnej hydrologii problem dużej wagi. Z jednej strony zwiększenie informacji pozwoli lepiej zidentyfikować systemy hydrologiczne, z drugiej jednak wiąże się ze wzrostem kosztów. Np. zwiększenie liczby mierzonych czynników i częstotliwości wykonywania pomiarów oraz wprowadzenie dokładniejszych metod i przyrządów pomiarowych może okazać się zbyt kosztowne i zbyt złożone w odniesieniu do przetwarzania, opracowywania i wykorzystania tych danych. Szczególnie istotne stają się koszty przetwarzania informacji. Zmusza to do kompromisów i określenia zakresu eksperymentu dla potrzeb identyfikacji również pod kątem efektów ekonomicznych. Nakłady na identyfikację nie mogą przewyższać korzyści uzyskiwanych w wyniku polepszenia jakości modeli hydrologicznych wykorzystywanych w praktyce

gospodarowania wodą. Należy ponadto pamiętać, że dla identyfikacji poszczególnych rodzajów modeli, wykorzystywanych dla różnych celów i dających różne korzyści, potrzebna jest inna informacja aprioryczna. Wobec tego problem rodzaju i gęstości sieci pomiarowej oraz jej wyposażenia i częstości wykonywania pomiarów musi być rozpatrywany z punktu widzenia różnych potrzeb praktyki i uzyskiwanych korzyści.

5.2. KRYTERIA WERYFIKACJI MODELI

Problem weryfikacji modeli hydrologicznych nie został dotychczas rozwiązany. Brak jest ogólnie przyjętych zasad doboru kryterium jakości modelu oraz sposobu przeprowadzania weryfikacji. Wobec tego w praktyce weryfikacja albo w ogóle nie jest przeprowadzana, albo dla poszczególnych modeli są stosowane różne metody ich weryfikacji [J.W. D e l l e u r , R.B. S a r m a , A.R. R a o , 1973; Model matematyczny zlewni 1975,a]. Wydawałoby się, że najprostszym rozwiązaniem jest przyjęcie jako kryterium jakości tego samego kryterium które było stosowane przy identyfikacji modelu. Jednak podejście takie nie jest w pełni uzasadnione.

Określenie parametrów modelu, czy też parametrów i postaci funkcji operatora, w oparciu o przyjęte kryterium zgodności (funkcję celu) prowadzi do ustalenia modelu najlepszego z danej klasy, dla danego kryterium zgodności i dla danej serii identyfikującej. Nie oznacza to jednak, że został opracowany najlepszy model dla danego oryginału, a nawet nie oznacza, że został opracowany zadowolający model. Uzyskana minimalna wartość kryterium zgodności może być na tyle duża, że model nie będzie dawał zadowolających wyników (rys.5.1). Oznacza to, że dla danej klasy funkcji operatora, przyjętego kryterium zgodności i posiadanej serii pomiarowej nie może być opracowany model lepszy, a tym samym nie może być opracowany model przydatny dla określonych potrzeb praktyki. Z powyższego automatycznie wynika pytanie: jakie są warunki (kryteria) przydatności modelu dla poszczególnych potrzeb praktyki? Odpowiedź na to pytanie zmusza do sformułowania kryteriów jakości modelu



Rys.5.1. Zmienność wartości minimalnej funkcji celu Z , dla szacowanego parametru α , w zależności od przyjętej postaci modelu (I lub II) oraz postaci funkcji celu (a lub b)

i określenia ich granicznych wartości wynikających z potrzeb praktyki. Ponadto z uwagi na fakt, że wartość kryterium zgodności może być wielkością mianowaną, zależną od zakresu wartości przyjmowanych przez jej składniki, wynika bezwzględna potrzeba stosowania bezwymiarowego kryterium jakości. Wprowadzenie kryterium bezwymiarowego pozwoli porównywać modele tej samej klasy opracowane dla różnych oryginałów (różnych zlewni) jak również porównywać między sobą modele różnych klas tego samego oryginału.

Drugim istotnym aspektem weryfikacji jest sprawdzenie jakości modelu pod kątem charakterystyk nie branych pod uwagę przy identyfikacji. Jest zrozumiałe, że przy identyfikacji modelu nie mogą być uwzględnione wszystkie interesujące nas

własności sygnałów wyjściowych, chociaż jak wspomniano w rozdz.5.1 są prowadzone próby tworzenia funkcji celu jako funkcji wielokryterialnej. Wobec powyższego jest uzasadnione, a nawet konieczne, możliwie wszechstronne sprawdzenie jakości modelu przed wykorzystaniem go dla określonych potrzeb praktyki. Takie potraktowanie roli weryfikacji prowadzi do określenia zbioru kryteriów jakości, właściwych dla poszczególnych rodzajów modeli i poszczególnych potrzeb praktyki. Pozwoliłoby to na poprawę jakości stosowanych w praktyce modeli, gdyż model nie spełniający z góry określonych wymagań byłby odrzucający, lub musiałby ulec pewnej korekcie czy to poprzez zmianę jego struktury, funkcji operatorów (rys.1.3), czy też sformułowania funkcji celu. Pewne nowe propozycje oraz omówienie dotyczących stosowanych miar jakości modeli hydrologicznych można znaleźć w pracy [Model matematyczny zlewni, 1975, a] wykonanej w Zakładzie Gospodarki Wodnej i Hydrologii Politechniki Warszawskiej. Wyróżniono tam cztery grupy miar jakości, a mianowicie miary oparte na: charakterystykach statycznych, funkcji celu, entropii systemu oraz analizie szeregów czasowych.

Należy podkreślić, że ocena jakości modelu ma dwa aspekty. Jeden to odpowiedź na pytanie: czy opracowany model można arbitralnie uznać za "dobry" tzn. czy spełnia postawione mu z góry wymagania. Drugi, to odpowiedź na pytanie: czy opracowany model można uznać za "dobry" w porównaniu z innymi modelami. Z punktu widzenia praktyki weryfikacja powinna prowadzić do odpowiedzi wyłącznie na pierwsze pytanie. Porównywanie jakości różnych modeli wydaje się zagadnieniem badań naukowych, a nie praktycznej działalności, która wymaga akceptacji lub odrzucenia opracowanego konkretnego modelu.

Problem weryfikacji, a szczególnie określenie (wybór) właściwych kryteriów (miar) jakości modeli został tutaj jedynie zasygnalizowany jako temat wymagający szerszych badań.

6. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE

Podane poniżej uwagi i wnioski zostały sformułowane pod kątem głównego przedmiotu pracy, a więc analizy i możliwości

matematycznego opisu systemów hydrologicznych jako naturalnych systemów przyrodniczych na które wpływa działalność gospodarcza człowieka, a właściwie jeden z jej przejawów. Z hydrologicznego punktu widzenia istotne znaczenie mają dwa aspekty działalności gospodarczej w obrębie zlewni. Jeden to wpływ gospodarowania wodą na naturalny jej obieg w zlewni, zaś drugi to wpływ zagospodarowania (zabudowy) zlewni na zmianę własności fizycznych systemów hydrologicznych. W niniejszej pracy zajmowano się wyłącznie pierwszym z tych aspektów i wobec tego wszystkie wnioski i uwagi dotyczą tylko niego. Niemniej drugi aspekt działalności gospodarczej ma równie istotne znaczenie i to zarówno z punktu opracowywania poprawnych modeli hydrologicznych jak i możliwości sterowania systemem zlewni poprzez zmianę jego własności fizycznych. Zabudowa powierzchni zlewni w wyniku urbanizacji, uprzemysłowienia, eksploatacji zasobów naturalnych, zmian w rolniczym wykorzystaniu poszczególnych obszarów jak również budowa retencyjnych zbiorników wodnych, kanałów itp., powodują zmianę własności fizycznych zlewni. Prowadzi to bądź do zmiany wartości liczbowych parametrów modelu, bądź do zmiany postaci funkcji opisujących (operatorów), a nawet do zmiany struktury modelu. Szersze omówienie wpływu tego aspektu działalności gospodarczej można znaleźć w pracy [Model matematyczny zlewni, 1975, c] oraz w cytowanej w tej pracy literaturze.

Konieczność uwzględniania wpływu sterowania zasobami wodnymi zlewni przez system wodno-gospodarczy na zmianę tych zasobów, a więc tym samym na zmianę naturalnego obiegu wody w zlewni, wynika ze sprzężenia zwrotnego przedstawionego na rys. 1.1. Nieuwzględnianie tego sprzężenia w modelach, prowadzi do błędnego prognozowania stanu zasobów wodnych. Modelami, do których sprzężenie to może być wprowadzone są integralne modele zlewni o opisie matematycznym uwzględniającym zarówno wzajemne naturalne sprzężenia pomiędzy poszczególnymi komponentami zlewni jak i sprzężenia wynikające ze sterowania w systemie wodno-gospodarczym. Wydaje się, że najpełniejszy i najbardziej przydatny dla tych potrzeb jest model opisany równaniami stanu lub innymi postaciami wynikającymi z tych równań. Natomiast zupełnie nieprzydatny jest model globalny zlewni (zlewnia trak-

towana jest jako całość) w postaci "wejście-wyście". Dlatego też w pracy podjęto jedną z pierwszych prób zastosowania metody przestrzeni stanu do opisu systemów hydrologicznych. Należy jednak jeszcze raz podkreślić, że model opisany w rozdz.2.4.2 oraz odpowiadający mu opis w postaci transmitancji w rozdz. 3.4.4, są jedynie propozycjami, które po praktycznym zweryfikowaniu mogą ulec znacznym zmianom. Ponadto przyjęta koncepcja układania równań stanu, w oparciu o prawa zachowania, powinna w przyszłości również ulec zmianie i być zastąpiona równaniami stanu wynikającymi z fizyczno-matematycznych opisów poszczególnych procesów hydrologicznych.

Z uwagi na fakt, że systemy hydrologiczne są systemami naturalnymi, na które oddziałują inne systemy naturalne, należy wyróżnić trzy rodzaje wielkości wejściowych:

- sterowanie bierne, czyli wielkości wejściowe kontrolowane (mierzone) będące wynikiem działania innych systemów na system badany,
- sterowanie czynne stanowiące wielkości wejściowe realizowane przez człowieka,
- zakłócenia stanowiące wielkości wejściowe niemierzone i najczęściej nieuwzględniane w modelu.

Niepełna obserwowalność systemu zlewni oraz niepełna jego mierzalność stwarza znaczne trudności opisu i identyfikacji modeli hydrologicznych. Możliwości pełniejszego opisu systemów hydrologicznych, na obecnym etapie badań teoretycznych i możliwości obliczeniowych, są ograniczone głównie zakresem badań eksperymentalnych.

Dla poprawy warunków identyfikowania modeli zjawisk hydrologicznych istnieje konieczność zwiększania zakresu pomiarów, ich dokładności i częstości wykonywania, gdyż prowadzone obecnie standardowe obserwacje hydrologiczne są zdecydowanie niewystarczające dla potrzeb identyfikacji. Wobec dużych kosztów badań eksperymentalnych, rozwiązaniem problemu jest prowadzenie szerokiego eksperymentu na wybranych zlewniach doświadczalnych, a następnie na tej podstawie określenie niezbędnego zakresu pomiarów hydrologicznych prowadzonych na obszarze całego kraju. Identyfikacja złożonych systemów hydrologicznych, poza rozszerzeniem zakresu eksperymentu, wymaga ponadto prowa-

dzenia badań metodycznych nad określeniem najwłaściwszej postaci funkcji kryterium zgodności oraz stosowania identyfikacji wielokryterialnej i wielopoziomowej.

Dotychczas nierozwiązany, a bardzo istotny z punktu widzenia zastosowań modeli hydrologicznych w praktyce, jest problem ich weryfikacji. Badania w tym zakresie powinny doprowadzić do ustalenia metodyki weryfikacji oraz zbioru kryteriów (miar) jakości modeli pod kątem określonych potrzeb praktyki.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A m o r o c h o J., E s p i l d o r a B. (1972): Entropy in the Assessment of Uncertainty in Mathematical Model Performance (maszynopis).
- [2] Automatyka (1973): Poradnik inżyniera. Pod red. W.Fin-deisena, Warszawa.
- [3] B a l e k J., J o k l L. (1974): Rainfall-Runoff Deterministic Linear Model of Second Order. Jour. of Hydrol.Scienc.Vol.2.No 3-4.
- [4] B u b n i c k i Z. (1974): Identyfikacja obiektów sterowania. Warszawa.
- [5] C a n n o n R.H. jr. (1973): Dynamika układów fizycznych. Warszawa.
- [6] C h o w V.T. (1964): Handbook of Applied Hydrology. New York.
- [7] C h o w V.T.: (1967): Laboratory Study of Watershed Hydrology.Proc.Intern.Hydrol.Symp.,Fort Collins.
- [8] C h o w V.T., K u l a d a i s w a m y V.C. (1971): General Hydrologic System Model.Jou.Hydrol.Div.Proc. ASCE,June.
- [9] C h o w V.T. (1971): Role of WBS in the Development of Hydrodynamic Watershed Model. Inter.Symp. on Math. Models in Hydrology. Warsaw.
- [10] D e l l e u r J.W., R a o R.A. (1971): Linear Systems Analysis in Hydrology, The Transform Approach, The Kernel Oscillations and the Effect of Noise.Proc. of First Bilateral U.S. - Japan Sem. in Hydrolog., Honolulu.
- [11] D e l l e u r J.W., S a r m a R.B., R a o R.A. (1973): Comparison of Rainfall - Runoff Models for Urban Areas. Journal of Hydrology, vol.18, no 3/4.
- [12] D i s k i n M.H. (1967): A Dispersion Analog Model for Watershed Systems.Int.Hydrol.Symp., Fort Collins.

- [13] D o o g e J.C. (1974,a): Linear Theory Hydrologic Systems. Agricultural Research Service, Technical Bulletin No 1968.
- [14] D o o g e J.C. (1974,b): Modele matematyczne systemów hydrologicznych. Praca zbiorowa pt.: "Modele matematyczne zlewni". PAN Wrocław, Ossolineum.
- [15] D o o g e J.C. (1974,c): wybór modelu deterministycznego. Praca zbiorowa pt.: "Modele matematyczne zlewni". PAN, Wrocław, Ossolineum.
- [16] D r u ż i n i n N.I. (1956): Metod elektrodinamičeskich analogii i jego primenenie pri issledovanii fil'tracii. Moskwa.
- [17] D u c k s t e i n L., K i s i e l C.C. (1972): Control of Hydrologic Systems for Multiple Uses in a Closed-loop Framework. Journal of Hydrology, Vol.XV, no 1, Amsterdam.
- [18] E a g l e s o n P.S. (1970): Dynamic Hydrology. New York.
- [19] F e l u c h W. (1975): Wyznaczanie intercepcji opadu i retencji wody na powierzchni gruntu w okresie wegetacyjnym. Przegląd Geofizyczny, z. 4.
- [20] F e l u c h W., H e r n i k H. (1976): Dobór funkcji celu dla identyfikacji matematycznych modeli w hydrologii. Politechnika Warszawska, Instytut Inżynierii Środowiska (maszynopis).
- [21] F i n d e i s e n W. (1972): Metodyka określania matematycznych modeli obiektów sterowania. Modele matematyczne i identyfikacja procesów, t.I, PAN, Ossolineum.
- [22] F i n d e i s e n W. (1974): Wielopoziomowe układy sterowania. Warszawa.
- [23] F r i e d l y J.C. (1975): Analiza dynamiki procesów. Warszawa.
- [24] G o r d o n G. (1974): Symulacja systemów. Warszawa.
- [25] G ó r e c k i H. (1971): Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem, Warszawa.
- [26] G r a c e R.A., E a g l e s o n P.S. (1967): Scale Model of Urban Runoff Storm Rainfall. Jour. of the Hydraulics Division, Vol.93 No HY 3, May.
- [27] G r e g o r y K.J., W a l l i n g D.E. (1973): Drainage Basin Form and Process. London.
- [28] G u n t e n b a u m J. (1975): Problemy teorii regulatorów. Warszawa.
- [29] H a g e l R. (1975): Miernictwo dynamiczne. Warszawa.
- [30] H a l l A.D. (1968): Podstawy techniki systemów. Warszawa.
- [31] H u t h m a n n G. (1975): Short Term Forecasting of Streamflow with the Aid Multiple Frequency Response Functions. Inter.Symp. of Math. Mod. in Hydrol., Bratislava.

- [32] I b b i t t R.P., O' D o n n e l l T. (1971): Designing Conceptual Catchment Models for Automatic Fitting Methods. Inter. Symp. on Math. Models in Hydrology. Warsaw.
- [33] I s h i h a r a T., I s h i h a r a Y. (1961): Runoff Analysis by Analogue Computer. 9-th Genl. Assemb. Int. Ass. Hydraul. Res., Dubrovnik.
- [34] K a c z m a r e k Z. (1969): O dobowym przebiegu parowania z powierzchni wody. Przegląd Geofizyczny, z.4.
- [35] K a c z m a r e k Z. (1970): Metody statystyczne w hydrologii i meteorologii. Warszawa.
- [36] K a c z m a r e k Z. (1973): Modele prognoz hydrologicznych. Podstawowe Problemy Współczesnej Techniki, t. XVII.
- [37] K a c z o r e k T. (1974): Teoria układów regulacji automatycznej. Warszawa.
- [38] K o r d a s B. (1971): Matematyczne modelowanie ruchu wód gruntowych. Przegląd Geofizyczny, z. 1-2.
- [39] K o r d a s B. (1974): Hydrodynamika zlewni. Praca zbiorowa pt. "Modele matematyczne zlewni". PAN, Wrocław, Ossolineum.
- [40] K o w a l i k P. (1967): Niektóre obiektywne ograniczenia metody badań modelowanych. Archiwum Hydrotechniki, z.1.
- [41] K o w a l i k P. (1973): Zarys fizyki gruntów. Skrypt Politechniki Gdańskiej.
- [42] K o w a l i k P., Z a r a d n y H. (1970): Równanie ruchu wody glebowej. Archiwum Hydrotechniki, z.4.
- [43] K u ć m e n t L.S. (1972): Matematičeskoje modelirovanie rečnogo stoka. Leningrad.
- [44] K u ć m e n t L.S. (1974): Matematyczne modelowanie zlewni rzecznych. Praca zbiorowa pt.: "Modele matematyczne zlewni". PAN, Wrocław, Ossolineum.
- [45] L e r n e r A.J. (1971): Zarys cybernetyki. Warszawa.
- [46] Mały słownik cybernetyczny (1973): Pod red. M.Kempisty. Warszawa.
- [47] M a ń c z a k K. (1971): Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania. Warszawa.
- [48] Model matematyczny zlewni (1974): cz.II. Model zlewni hydrologicznej opracowany w oparciu o dostępne, na obecnym etapie, obserwacje. Praca zbior. pod kier. M.Ozga-Zielińskiej. Politechnika Warszawska, Instytut Inżynierii Środowiska (maszynopis).
- [49] Model matematyczny zlewni (1975,a) - cz.III. Struktura i metodyka identyfikacji docelowego modelu integralnego zlewni. Praca zbiorowa pod kier. M.Ozga-Zielińskiej. Politechnika Warszawska, Instytut Inżynierii Środowiska (maszynopis).

- [50] Model matematyczny zlewni (1975, b): cz. IIIa. Opracowanie struktury i metodyki identyfikacji modeli procesów hydrologicznych dla warunków zimowych. Praca zbiorowa pod kier. M. Ozga-Zielińskiej. Politechnika Warszawska, Instytut Inżynierii Środowiska (maszynopis).
- [51] Model matematyczny zlewni (1975, c): cz. IV. Określenie zasad opracowywania matematycznego hydrologiczno-gospodarczego modelu zlewni. Praca zbiorowa pod kier. M. Ozga-Zielińskiej. Politechnika Warszawska, Instytut Inżynierii Środowiska (maszynopis).
- [52] M u z i k J. (1974): Laboratory Experiments with Surface Runoff. Jour. of the Hydraulics Division Vol. 100, No HY 4, April.
- [53] N i e d e r l i ń s k i A. (1974): Układy wielowymiarowe automatyki. Warszawa.
- [54] O g a t a K. (1974): Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania. Warszawa.
- [55] O r d y n c e w W. M. (1968): Opis matematyczny obiektów regulacji automatycznej. Warszawa.
- [56] O z g a - Z i e l i ń s k a M. (1974): O technologii modelowania lądowej fazy cyklu hydrologicznego. Gospodarka Wodna, Nr 1.
- [57] O z g a - Z i e l i ń s k a M. (1975): Struktura i funkcje operatorów modeli systemów hydrologicznych. Wiadomości Met. i Gosp. Wodnej. Zeszyt 1.
- [58] P a w ł o w s k i Z. (1969): Ekonometria. Warszawa.
- [59] P i w e c k i T., S z y m k i e w i c z R. (1974): Liniowy model transformacji przepływu. Archiwum Hydrotechniki, t. XXI, z. 4.
- [60] P ł a s k o w s k i A. (1965): Eksperymentalne wyznaczenie własności dynamicznych obiektów regulacji. Warszawa.
- [61] P o n t r i a g i n L. S. (1964): Równania różniczkowe zwyczajne. Warszawa.
- [62] P u ł a c z e w s k i J., S z a c k a K., M a n i t i u s A. (1974): Zasady automatyki. Warszawa.
- [63] Representative and Experimental Basin. (1970): An International Guide for Research and Practice. Pod red. Toebe C., Ouryvaev V., UNESCO.
- [64] S h e r m a n L. K. (1932): Stream Flow from Rainfall by the Unit-grap Method. Eng. News Record, April 7.
- [65] S o b c z y k K. (1973): Metody dynamiki statystycznej. Warszawa.
- [66] S o c z y ń s k a U. (1973): Program badań w zlewniach reprezentatywnych i eksperymentalnych w Polsce. Materiały dla KGW PAN. Warszawa (maszynopis).
- [67] S w i e s z n i k o w A. A. (1965): Podstawowe metody funkcji losowych. Warszawa.

- [68] Szóllősi - Nagy A. (1974): State Space Approach to Hydrology. VITUKI, Budapest (maszynopis).
- [69] Śmieciański Z. (1969): Metoda analogii hydraulicznych w ocenie procesów nieustalanej filtracji przy odwadnianiu kopalni odkrywkowych. PAN, Prace geologiczne 56.
- [70] Walton W.C. (1969): Use of Analog Computer in Groundwater Hydrology. Procee. of the First Inter.Sem. for Hydrol.Prof.Urbana.
- [71] Wiener N. (1971): Cybernetyka czyli sterowanie i komunikacja w zwierzęciu i maszynie. Warszawa.
- [72] Wyrzykowska - Kopacz H. (1976): Zastosowanie transformat całkowych do transformacji opadu w odpływ. Praca magisterska wyk. pod kier. M.Ozga-Zielińskiej. Politechnika Warszawska.
- [73] Zaradny H., Kowalik P. (1971,a): Rozwiązanie równań poziomego przepływu wody w gruntach i glebach nienasyconych. Archiwum Hydrotechniki, z.3.
- [74] Zaradny H., Kowalik P. (1971,b): Rozwiązywanie równań pionowego przepływu wody w gruntach i glebach nienasyconych. Archiwum Hydrotechniki, z.4.

Pragnę serdecznie podziękować prof.dr hab.inż. Zdzisławowi Kaczmarkowi za uwagi i przedyskutowanie niektórych zagadnień oraz dr inż. Markowi Nawalanemu za pomoc w opracowaniu zaproponowanych opisów modeli omówionych w rozdz. 2.4.2 i 3.4.4.

МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ И АНАЛИЗА ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

Главная идея работы заключается в том, чтобы после краткого обсуждения применяемых до сих пор в гидрологии методов моделирования (разд. 1.2), дать общее основание для моделирования систем (разд. 1.3), а также представить методы математического описания систем управления в пространстве состояния (разд. 2) и в виде различного рода зависимости типа "вход-выход" (разд. 3). В качестве предложения применения для гидрологии новой методики описания систем была разработана интегральная модель водосборной площади в виде уравнений состояния (разд. 2.4.2) и передаточной функции (разд. 3.4.4). Обе предлагаемые модели позволяют учесть влияние хозяйственной деятельности человека на изменение природного водообмена на водосборной площади. Возможность применения различных форм описания для одной и той же модели требует определения условий управляемости и наблюдае-

мости системы, а также свойств и взаимосвязи между отдельными видами описания (разд. 4). В качестве дополнения методов описания систем выступает разд. 5, относящийся к проблемам идентификации и верификации гидрологических систем. В разд. 6 даны выводы и заключительные замечания, сформулированные под углом главного предмета работы, т.е. анализа и возможности математического описания гидрологических систем, как естественных природных систем, на которые влияет хозяйственная деятельность человека.

THE METHODS OF DESCRIPTION AND ANALYSIS OF HYDROLOGICAL SYSTEMS

S u m m a r y

Following a brief summary of the modeling methods used thus far in hydrology (Chapter 1.2), the work focuses on the general fundamentals of systems modeling (Chapter 1.3) and on the methods of mathematical descriptions of control systems in the state space (Chapter 2) and various input-output relationships (Chapter 3). Integral models of hydrological catchment in the form of the state equations (Chapter 2.4.2) and transfer function (Chapter 3.4.4) have been developed as a proposed new methodology of system description for introduction to hydrology. In both of the proposed models allowance is made for including the effects of man's economic activities on the natural circulation of water in the catchment. For application of various description forms to the same system, the conditions of system controllability and observability as well as the properties and mutual relationships between individual description forms (Chapter 4) must be defined. The methods of system description are supplemented in Chapter 5 which is concerned with identification and verification of hydrological systems. Conclusions and final remarks presented in Chapter 6 are concerned with the main subject of the whole work; namely, analyzing the possibilities of mathematical descriptions of hydrological systems considered as natural systems disturbed by man's activities.



SPIS TREŚCI

1. WPROWADZENIE	3
1.1. Cel i zakres pracy	3
1.2. Modelowanie zjawisk hydrologicznych	6
1.3. Ogólne podstawy modelowania systemów	11
2. OPIS SYSTEMU ZA POMOCĄ RÓWNAŃ STANU	17
2.1. Współrzędne i przestrzeń stanu	17
2.2. Równania stanu	19
2.3. Ustalanie opisu systemu za pomocą równań stanu .	25
2.4. Modele systemów hydrologicznych opisane równa- niami stanu	28
2.4.1. Uwagi ogólne	28
2.4.2. Proponowany model zlewni	28
3. OPIS SYSTEMU ZA POMOCĄ RÓWNIANIA "WEJŚCIE-WYJŚCIE" ...	47
3.1. Relacja "wejście-wyjście" w postaci równania róż- niczkowego zwyczajnego dowolnego rzędu	48
3.2. Modele systemów hydrologicznych opisane równa- niem różniczkowym "wejście-wyjście"	49
3.3. Relacja "wejście-wyjście" w postaci operatorowej	51
3.3.1. Ogólna postać opisu	51
3.3.2. Całka spłotu	52
3.3.3. Transmitancja operatorowa	55
3.4. Modele systemów hydrologicznych opisane równa- niem "wejście-wyjście" w postaci operatorowej ..	58
3.4.1. Uwagi ogólne	58
3.4.2. Modele hydrologiczne w postaci całki splo- tu	59
3.4.3. Modele hydrologiczne w postaci transmitan- cji	60
3.4.4. Proponowany model zlewni w postaci trans- mitancji	61
4. WŁASNOŚCI I WZAJEMNE ZWIĄZKI PRZEDSTAWIONYCH POSTACI OPISU SYSTEMÓW HYDROLOGICZNYCH	67
4.1. Problemy równoważności poszczególnych form opisu systemu	67

4.2. Warunki początkowe	69
4.3. Sterowalność i obserwowalność	71
4.4. Warunki stosowalności oraz wady i zalety poszczególnych form opisu systemu	77
5. PROBLEMY IDENTYFIKACJI I WERYFIKACJI MODELI HYDROLOGICZNYCH	81
5.1. Warunki identyfikacji systemów hydrologicznych .	81
5.2. Kryteria weryfikacji modeli	90
6. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE	92
Bibliografia	95
Streszczenia	99



C

65 936