lenie odpowiednie wynosi około 100 *mm*, wtedy poprawka będzie zaledwie 0,33%. Takie właśnie odchylenia stosowane są najczęściej w praktyce.

Jeżeli zaś zachodzi konieczna potrzeba zastosowania większych odchyleń, to trzeba, albo zwiększyć odległość skali i lunety od lusterka, albo też wprowadzić poprawki.

73. Wyrównywanie błędów.

Zmniejszenie wpływu błędów przypadkowych na wynik ostateczny może być osiągnięte przez powtórzenie wielokrotne pomiaru. W praktyce przy pomiarach niezbyt dokładnych zwykle powtarzamy pomiar trzy, albo pięć razy, przy pomiarach zaś bardzo dokładnych — 10 razy i więcej. Średnia arytmetyczna ze wszystkich wyników takich pomiarów wyraża wartość najprawdopodobniejszą mierzonej wielkości. *) O ile warunki wykonania pomiarów pozostają bez zmiany, dokładność pomiaru będzie tem większa, im więcej razy powtórzymy pomiar. Gdy mamy wyniki szeregu pomiarów jednej i tej samej wielkości, to dla oceny wartości tych pomiarów, pod względem błędów przypadkowych, miarodajnemi są: błąd średni poszczególnego pomiaru i błąd wartości średniej. Dla tych dwóch błędów wyprowadzimy wzory, za pomocą których można je obliczać.

74. Obliczanie błędu średniego poszczególnego pomiaru i błędu wartości średniej.

Oznaczmy przez R rzeczywistą wartość mierzonej wielkości, a przez A_1, $A_2 \ldots A_n$ wartości, otrzymane przy poszczególnych pomiarach, wtedy średnią wartość otrzymamy ze wzoru:

$$A = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Błędy poszczególnych pomiarów będą:

$$R - A_1 = x_1,$$
$$R - A_2 = x_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$R - A_n = x_n,$$

*) O prawie błędów czytelnik znajdzie wiadomości w książce p. A. B. Danielewicza: „Metoda najmniejszych kwadratów". Tam też przytoczony jest dowód powyższego twierdzenia. Z tego dzieła zaczerpnąłem sposób wyprowadzenia dalej podanych wzorów.

Średnim błędem poszczególnego pomiaru nazywamy wyraz:

$$s = \pm\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Ponieważ liczb $x_1, x_2 \ldots x_n$ nie znamy, z tego więc wzoru obliczyć s nie możemy.

Wyprowadzimy wzór inny. Załóżmy:

$$A - A_1 = \alpha_1,$$
$$A - A_2 = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$A - A_n = \alpha_n.$$

Wtedy oznaczając dowolne spostrzeżenie znaczkiem λ, otrzymamy:

$$x_\lambda = R - A_\lambda,$$
$$A_\lambda = A - \alpha_\lambda.$$

Z tych dwóch równań wynika, że:

$$x_\lambda = R - A + \alpha_\lambda.$$

Różnica $R - A$ stanowi błąd średniej wartości, otrzymanej z rozważanych pomiarów według wzoru (a).

Oznaczmy ten błąd przez S, wtedy:

$$R - A = S.$$
$$x_\lambda = S + \alpha_\lambda \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Z tego wzoru możemy otrzymać dwa równania w sposób następujący: Podnosząc obie strony równania (c) do drugiej potęgi, otrzymamy:

$$x_\lambda^2 = S^2 + 2S \cdot \alpha_\lambda + \alpha_\lambda^2.$$

Jeśli n takich równań, napisanych dla poszczególnych spostrzeżeń, dodamy odpowiedniemi stronami, to otrzymamy:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 = n \cdot S^2 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) +$$
$$+ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Z wyrazów dla poszczególnych wielkości α_λ wynika:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = A - A_1 + A - A_2 \ldots + A - A_n,$$

więc:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n \,.\, A - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n).$$

Ze wzoru (a):

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = n \,.\, A.$$

przeto:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_n = 0.$$

Uwzględniając wartość sumy składnikow α_λ i używając symbolu Σ dla oznaczenia sumy, otrzymamy z równania (d):

$$\Sigma x_\lambda^{\ 2} = n \,.\, S^2 + \Sigma \alpha_\lambda^{\ 2},$$

stąd:

$$\frac{\Sigma x_\lambda^{\ 2}}{n} = S^2 + \frac{\Sigma \alpha_\lambda^{\ 2}}{n}.$$

Według wzoru (b):

$$\frac{\Sigma x_\lambda^{\ 2}}{n} = s^2,$$

przeto:

$$s^2 = S^2 + \frac{\Sigma \alpha_\lambda^{\ 2}}{n}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

Z równania (c) otrzymamy jeszcze równanie inne. Dodajmy odpowiedniemi stronami wszystkie równania (c), napisane dla różnych spostrzeżeń, których liczba jest n, otrzymamy wtedy:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \,.\, S + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

Według poprzednio podanego dowodzenia:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0,$$

przeto:

$$\Sigma x_\lambda = n \,.\, S.$$

Podnieśmy teraz obie strony tego równania do drugiej potęgi, wtedy otrzymamy:

$$\Sigma x_\lambda^{\ 2} + 2 \Sigma x_\mu \,.\, x_\lambda = n^2 \,.\, S^2.$$

W równości tej suma: $\Sigma x_\lambda^{\ 2}$ ma wszystkie składniki niewątpliwie dodatnie, w sumie zaś: $2 \Sigma x_\mu \,.\, x_\lambda$ będą składniki dodatnie i ujemne, ponieważ błędy rzeczywiste bywają dodatnie i ujemne; wobec tego możemy twierdzić, że wyrazy w tej sumie do pewnego stopnia znosić się będą; korzystając z tej okoliczności, przyjmujemy w przybliżeniu, że:

$$\Sigma x_\mu . x_\lambda = 0,$$

wtedy, pozostawiając oznaczenie S dla błędu średniej wartości i mając na względzie, że będzie to teraz wartość przybliżona tego błędu, otrzymamy:

$$\Sigma x_\lambda{}^2 = n^2 . S^2,$$

albo:

$$\frac{\Sigma x_\lambda{}^2}{n} = n . S^2.$$

Według wzoru (b):

$$\frac{\Sigma x_\lambda{}^2}{n} = s^2$$

przeto:

$$s^2 = n . S^2. \qquad \text{(f)}$$

Z dwóch równań: (e) i (f) znajdziemy:

$$S = \pm\sqrt{\frac{\Sigma \alpha_\lambda{}^2}{n(n-1)}},$$

$$s = \pm\sqrt{\frac{\Sigma \alpha_\lambda{}^2}{n-1}}.$$

Za pomocą tych wyrazów obliczamy s — przybliżony błąd średni każdego pomiaru i S — przybliżony błąd najprawdopodobniejszej wartości wielkości mierzonej.*)

75. Błąd największy i najmniejszy pomiaru.

Gdy uwzględnimy błędy systematyczne i błędy przypadkowe, to suma tych błędów wskaże nam całkowity błąd pomiaru.

Suma arytmetyczna wszystkich błędów systematycznych i największego możliwego błędu przypadkowego, stanowi tak zwany **błąd graniczny**, od którego nie może być większy żaden błąd pomiaru.

Oznaczmy całkowity błąd pomiaru przez X, sumę błędów systematycznych przez x, a błąd przypadkowy wartości średniej przez S, wtedy:

$$X = x + S.$$

---

*) Prócz tego odróżniamy jeszcze wartości błędów prawdopodobne. O tych wartościach czytelnik może zasięgnąć wiadomości w książce, poprzednio wspomnianej p. Danielewicza.