ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria II: WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE XIV (1972)

Z. PAWLAK (Warszawa)

Zastosowania maszyn matematycznych a zastosowania matematyki

1. Nie zakończyła się jeszcze ostatecznie dyskusja nad podziałem matematyki, czy raczej matematyków na czystych i stosowanych, a już powstała nowa schizma w gronie matematyków, i to matematyków zajmujących się zastosowaniami. O ile pierwszy podział na matematykę czystą i stosowaną (brudną?) nie miał w końcu większego znaczenia praktycznego i często trudno byłoby rozróżnić kto uprawia pierwszy, a kto drugi rodzaj matematyki — to w ostatnim rozłamie różnice mają charakter zasadniczy, tak że łatwo jest odróżniać wyznawców każdej wiary. W pierwszym przypadku różnice między oboma ugrupowaniami matematyków miały charakter raczej drugorzędny; obie grupy nie straciły wspólnego języka i doskonale się rozumiały. Ostatni, drugi rozłam jest znacznie głębszy; w istocie powstały w ostatnim dziesięcioleciu dwa rodzaje matematyków pracujących w zastosowaniach, które nie mają prawie wcale wspólnego języka ani problemów. Co ciekawsze, fakt powstania takiego podziału w zastosowaniach nie dotarł do tej pory wyraźnie do świadomości znakomitej większości matematyków, nawet tych, którzy w zastosowaniach pracują, nie mówiąc już o matematykach zajmujących się problemami czysto teoretycznymi. Łatwo to stwierdzić słuchając, czy też czytając, wypowiedzi na temat matematyki, jej zastosowań oraz maszyn matematycznych. One to bowiem są właśnie przyczyną ostatnich rozbieżności.

2. Gdybyśmy prześledzili tok postępowania matematyka rozwiązującego jakieś zagadnienie praktyczne 100, 50, 20, czy nawet jeszcze 15 lat temu zauważylibyśmy, że postępuje on według następującego schematu:

1. Zapoznanie się z problemem.
2. Matematyczne sformułowanie problemu.
3. Poszukiwanie matematycznego rozwiązania problemu.
4. Wykonanie rachunków.
5. Interpretacja wyników.

Schemat ten pochodzi chyba jeszcze od czasów Newtona i Leibniza, jest powszechnie znany i nie wymaga komentarza.

Współczesne maszyny matematyczne powstały na skutek trudności występujących w ręcznym wykonywaniu rachunków (punkt 4 powyższego schematu) i miały pierwotnie na celu usprawnienie procesu rachunkowego. Stanowiły one więc w istocie ważny praktycznie, ale w gruncie rzeczy drugorzędny element w podanym wyżej schemacie postępowania (taka opinia na temat maszyn pozostała zresztą w świadomości znakomitej większości matematyków do dnia dzisiejszego). Stąd właśnie powstały współczesne metody numeryczne i inne działy pokrewne, będące wynikiem rozwoju metod rachunkowych.

3. W ostatnich latach okazało się, że maszyny matematyczne można stosować przy rozwiązywaniu zagadnień w zupełnie inny sposób niż to podano w poprzednim paragrafie. Sposób ten, pomimo że jest bardzo prymitywny z matematycznego punktu widzenia, jest niezmiernie użyteczny w praktyce, wypierając poprzedni sposób postępowania, co ważniejsze, zwiększając znacznie zakres zastosowań maszyn matematycznych w wielu dziedzinach, gdzie posługiwanie się poprzednim schematem byłoby w ogóle niemożliwe. Metoda ta nosi nazwę *modelowania* albo *symulacji*. Czasem zresztą oba te terminy mają nieco różne znaczenie i raczej używany jest tu wtedy termin „symulacja" — pozostawiając słowo „modelowanie" do określenia bardziej „tradycyjnych" metod zastosowań.

Dla wyjaśnienia, na czym owa symulacja polega, wprowadźmy kilka pojęć pomocniczych. Pierwsze z tych pojęć, to pojęcie systemu dynamicznego. Przez *system dynamiczny* będziemy rozumieli parę uporządkowaną $S = \langle X, \pi\rangle$, gdzie X jest pewnym zbiorem zwanym *zbiorem stanów* systemu, a π jest funkcją częściową o argumentach i wartościach w X zwaną *funkcją przejścia* systemu S. *Procesem* w systemie dynamicznym S nazywamy ciąg stanów

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, \qquad k \geqslant 1,$$

skończony albo nieskończony, taki że $x_{i+1} = \pi(x_i)$ dla każdego i.

Nietrudno podać przykłady systemów dynamicznych. Pocisk jest takim systemem. Stanem pocisku jest jego położenie, szybkość, przyśpieszenie etc., a funkcja przejścia daje zaś dla każdego stanu stan następny (chodzi tu oczywiście o dyskretny opis zjawiska). Fabryka, zespół fabryk czy nawet cała gospodarka narodowa są również systemami. Bank jest systemem, centrala telefoniczna również. Co jest dla nas ważne, to fakt, że również każda maszyna matematyczna jest systemem dynamicznym. Zbiorem stanów takiego systemu jest pamięć maszyny, a jej funkcją przejścia — tzw. sterowanie maszyny.

Zdefiniujemy teraz pojęcie *symulowania* (naśladowania) *systemu przez system*. Powiemy, że system $Q = \langle Y, \tau\rangle$ symuluje system $S = \langle X, \pi\rangle$, symbolicznie $Q \subset S$, wtedy gdy spełnione są następujące warunki:

1. Istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\varrho\colon Y \to X$ stanów obu systemów w siebie.

2. Dla każdego stanu x systemu S istnieje takie $k \geqslant 1$, że

$$\varrho\big(\pi(x_i)\big) = \tau^k\big(\varrho(x)\big)$$

(τ^k oznacza k-krotne złożenie funkcji τ).

Symulacja polega więc na tym, że jeżeli system S w procesie przechodzi przez jakiekolwiek dwa sąsiednie stany, to system Q symulujący go przechodzi również przez stany im odpowiadające, z tym, że między tymi stanami mogą wystąpić jeszcze inne stany, przez które system Q może przejść. Taka definicja symulacji (naśladowania) dobrze odpowiada intuicjom związanym z tym pojęciem.

Otóż za pomocą maszyn matematycznych można dość łatwo symulować złożone zjawiska zachodzące w różnych systemach dynamicznych. Każdą współczesną maszynę matematyczną można uważać za bardzo bogaty, uniwersalny system symulujący. Na czym ta symulacja w maszynie polega? Aby jakieś zjawiska badać za pomocą maszyn należy po pierwsze określić zbiór stanów naśladowanego systemu (inaczej mówiąc określić funkcję ϱ mówiącą, w jaki sposób interpretujemy stany badanego systemu w stanach pamięci maszyny), a następnie określić funkcję przejścia na tak określonym zbiorze stanów. Zdefiniowanie funkcji przejścia sprowadza się do napisania odpowiedniego programu na maszynę, który to program opisuje, jak ma się zachowywać badany system w różnych okolicznościach. Współczesne języki programowania pozwalają na łatwe określanie obu funkcji ϱ i τ. W tym celu zresztą zbudowano wiele specjalnych języków programowania, jak np. język SIMULA. Języki te pozwalają niemal bez żadnych ograniczeń opisywać złożone zjawiska z dużą dokładnością. W konsekwencji mając taki opis zachowania się systemu w maszynie możemy teraz zamiast obserwować interesujące nas zjawisko w naturze robić odpowiednie eksperymenty na maszynie matematycznej. Postępowanie takie możemy w rezultacie sprowadzić do następującego schematu:

1. Zapoznanie się z problemem.
2. Opisanie w języku programowania zbioru stanów badanego systemu oraz jego funkcji przejścia.
3. Wykonanie eksperymentów na maszynie.
4. Interpretacja wyników.

W postępowaniu tym nie występuje w ogóle matematyczne formułowanie problemu ani tym bardziej jego rozwiązanie — przynajmiej w poprzednim rozumieniu tych słów.

4. Porównajmy krótko obie metody postępowania. W klasycznej metodzie otrzymujemy ogólny obraz interesującego nas zjawiska. Można udowodnić, że w takich to a takich warunkach zjawisko będzie przebiegało w taki a taki sposób. Jest to niewątpliwie dużą zaletą tej metody. Wadą jej natomiast jest to, że w bardziej skomplikowanych przypadkach już samo matematyczne sformułowanie problemu jest trudne a czasem wręcz niemożliwe, nie mówiąc już o kolejnych trudnościach związanych ze znalezieniem ścisłego bądź przybliżonego rozwiązania i wyliczenia go na maszynie.

Druga metoda nie ma tych wad. Może ona być stosowana prawie wszędzie niemal bez żadnych ograniczeń, dając szybko i tanio rezultaty z bardzo dobrą dla praktyki dokładnością. Wadą jej jest natomiast brak ogólnego spojrzenia na badane zjawisko. Oczywiście na podstawie dużej liczby eksperymentów można sobie taki pogląd wyrobić, nie ma on jednakże wagi dowodu matematycznego. Jest to niewątpliwie poważny mankament tej metody postępowania.

5. Reasumując: zastosowania matematyki i zastosowania maszyn matematycznych to dwa różne pojęcia nie mające wiele ze sobą wspólnego. Jedyną częścią wspólną obu tych dyscyplin są metody numeryczne, stanowią one obecnie jednakże dość mały fragment wszelkich zastosowań maszyn matematycznych. Jasne zdanie sobie sprawy z tego faktu jest niezbędne dla dalszego rozwoju zarówno zastosowań matematyki, jak i zastosowań maszyn matematycznych. Konieczne jest tu podjęcie odpowiednich badań matematycznych, mających na celu zbadanie i sprecyzowanie podstawowych pojęć i metod, które dostarczyła współczesna technika obliczeniowa, a przede wszystkim uwzględnienie tego stanu rzeczy w programie studiów matematycznych.

Nie ulega dla mnie wątpliwości, że głębokie zrozumienie poruszanych tu spraw nie pozostanie bez wpływu na rozwój całej matematyki.