

$$\cos \alpha_1 = \frac{x - x_1}{\sqrt{a^2 + (x - x_1)^2}},$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{-(x_2 - x)}{\sqrt{a^2 + (x_2 - x)^2}}.$$

Wzór wyjściowy na indukcję (1.34) przyjmuje teraz postać

$$B_{2z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_2}{a} \left[ \frac{x_2 - x}{\sqrt{a^2 + (x_2 - x)^2}} + \frac{x - x_1}{\sqrt{a^2 + (x - x_1)^2}} \right] \quad (1.34b)$$

Na rys.1.16 b,c,d podane są obecnie za podręcznikiem wzory na siłę całkowitą oddziaływującą na przewód z prądem  $i_1$  znajdujący się w omawianym wyżej polu magnetycznym równoległego przewodu  $i_2$  również o długości skończonej.

1.3.3.3. Obliczanie sił występujących pomiędzy dwoma jednowymiarowymi prostopadłymi torami prądowymi

A. Wzory wyjściowe do obliczeń.

W tym przypadku indukcja magnetyczna wywołana przepływem prądu  $i_2$  przez tor  $S_2$  (rys.1.17) wyraża się wobec braku składowej  $d\hat{B}_2$  w osi  $y$  wzorem (1.33) tj.

$$d\hat{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_2}{r} \hat{k} \sin \alpha \, dx = d\hat{B}_{2z}.$$

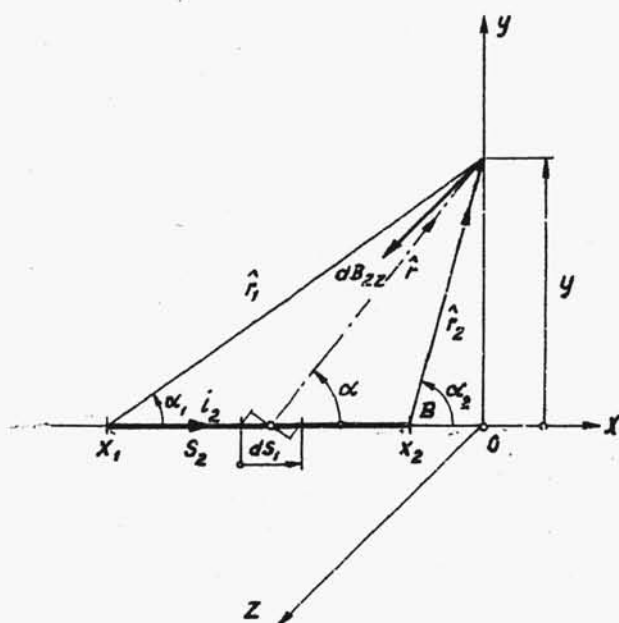
Zgodnie z rys.1.17 występują następujące związki geometryczne

$$r = \frac{y}{\sin \alpha}, \quad s_2 = x = -\frac{y}{\tan \alpha}, \quad \text{tj.} \quad ds_2 = dx = \frac{y}{\sin^2 \alpha} d\alpha.$$

Po podstawieniu do (1.33) znajdujemy

$$B_{2z} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sin^3 \alpha}{y^2 \sin^2 \alpha} y d\alpha =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_2}{y} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (1.37)$$



Rys.1.17. Indukcja magnetyczna od prądu  $i_2$  w odcinku toru  $S_2$  w punkcie  $(0, y)$

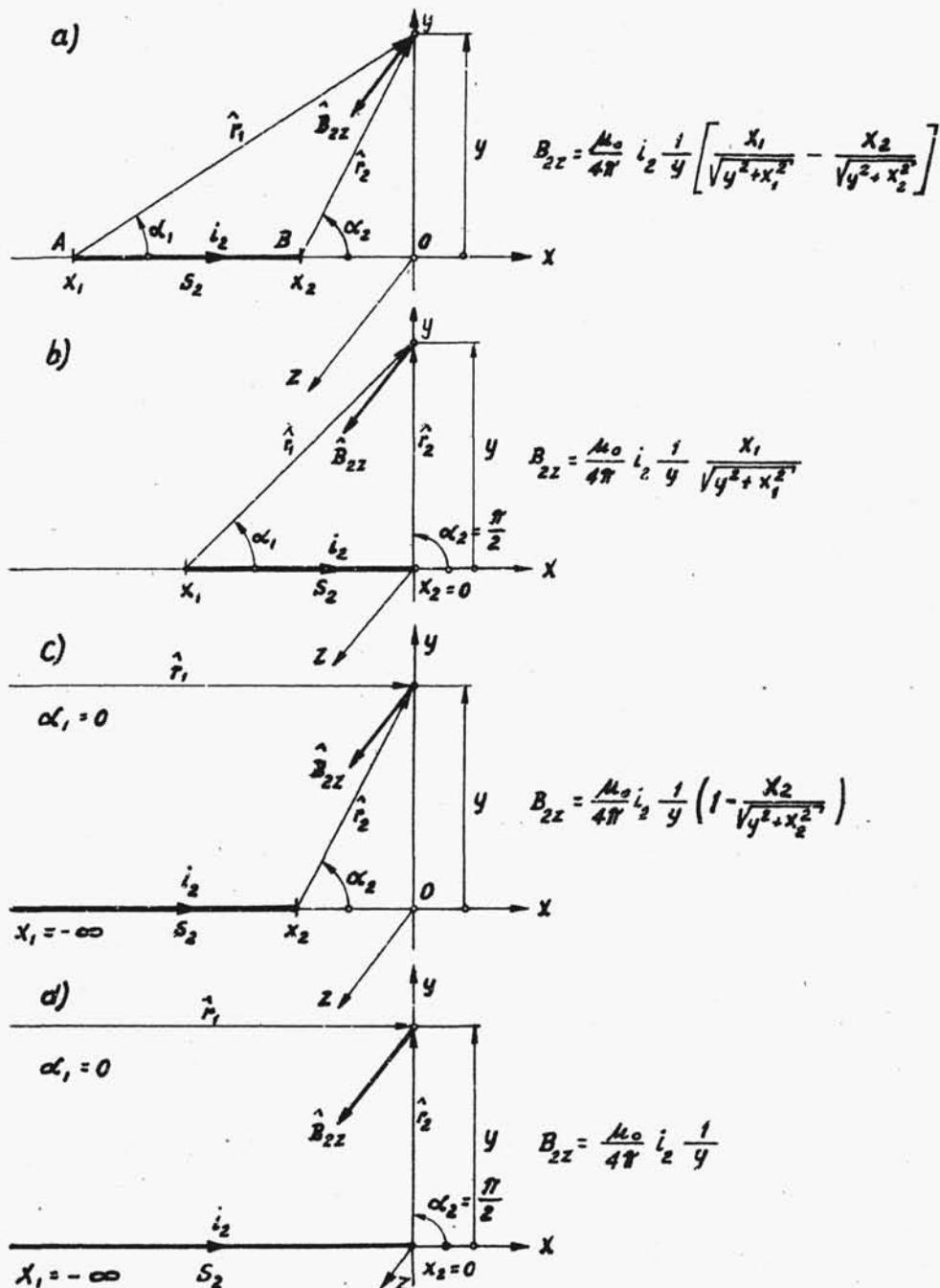
Można wyróżnić 4 przypadki ograniczenia i ułożenia toru  $S_2$  z prądem  $i_2$ , jak to pokazuje rys.1.18, na którym podano również wywodzące się z zależności (1.37) wzory na indukcję magnetyczną dla odpowiadających poszczególnym przypadkom warunków brzegowych.

W dalszym ciągu przytoczymy za podręcznikiem najważniejsze dla praktyki wzory na obliczanie sił elektrodynamicznych w układach odpowiadających rys.1.18 b, d tj.

w przypadku toru  $S_2$  o postaci odcinka lub półprostej leżących na ujemnej osi  $x$  poczynając od początku przyjętego prostokątnego układu współrzędnych.

Zakładamy, że tor  $S_1$  z prądem  $i_1$  prostopadły do toru  $S_2$  z prądem  $i_2$  jest ograniczony współrzędnymi  $x = 0$  i  $y_1, y_2$ .

Wzór (1.33) z uwagi na istnienie składowej wektora  $d\hat{s}_1$  jedynie w osi  $y$  wyznacza siłę elementarna  $ti$ .



Rys. 1.18. Indukcja magnetyczna od prądu  $i_2$  w odcinku toru  $S_2$  w punkcie  $(0, y)$  dla różnych postaci półpętli prostokątnej

$$d\hat{f} = i_1 \left[ d\hat{y} \times \hat{B}_{2z} \right] = i_1 \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & 0 & B_{2z} \end{vmatrix} = i_1 \hat{i} B_{2z} dy = d\hat{f}_x.$$

Siła działająca na tor  $S_1$  przy założonym kierunku przepływu prądów jest dodatnia.

Moment elementarny siły  $d\hat{f}_x$  względem osi  $y = 0$  wynosi

$$d\hat{M}_0 = \left[ \hat{y} \times d\hat{f}_x \right] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & y & 0 \\ d\hat{f}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{k} y d\hat{f}_x = dM_{z0}. \quad (1.38)$$

Moment elementarny tejże siły  $d\hat{f}_x$  względem dowolnej osi  $y$  nie leżącej w początku układu współrzędnych, np.  $y = y_0$  wynosi

$$d\hat{M}' = -\hat{k} (y - y_0) d\hat{f}_x = dM'_z \quad (1.39)$$

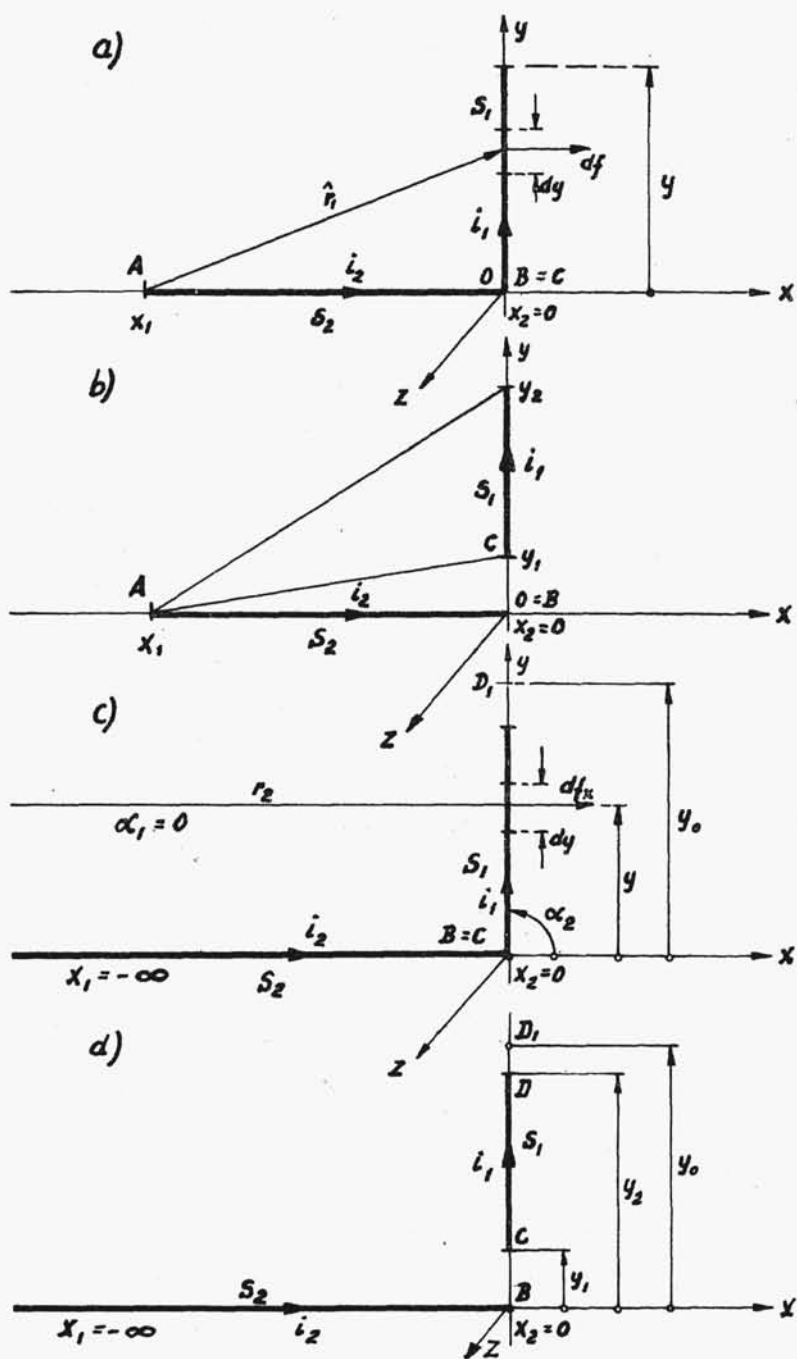
Przypadek 1. Tor  $S_2$  o postaci odcinka rozpoczyna się w początku układu współrzędnych (rys.1.19a).

Ze wzoru (1.33) podstawiając wyrażenie na  $B_{2z}$  wg rys. 1.18 b mamy siłę elementarną

$$d\hat{f}_x = i_1 B_{2z} dy = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{1}{y} \frac{x_1}{\sqrt{y^2 + x_1^2}} dy$$

i siłę całkowitą działającą na tor prądowy o długości  $S_1$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \int_{S_1} \frac{1}{y} \frac{x_1}{\sqrt{y^2 + x_1^2}} dy = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \ln \frac{y}{x_1 + \sqrt{y^2 + x_1^2}} \Big|_{S_1}. \end{aligned} \quad (1.40)$$



Rys.1.19. Siły elektrodynamiczne w pólpetli prostokątnej

Moment elementarny względem osi  $y = 0$  wg (1.38) wynosi

$$dM_{z0} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{x_1}{\sqrt{y^2 + x_1^2}} dy.$$

Moment siły działającej na odcinku  $S_1$  względem osi  $y = 0$

$$\begin{aligned} M_{z0} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \int_{S_1} \frac{x_1}{\sqrt{y^2 + x_1^2}} dy = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 x_1 \ln \left( y + \sqrt{y^2 + x_1^2} \right). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Przypadek 2. Tor  $S_2$  o postaci odcinka jest przesunięty wzdłuż osi  $y$  względem początku układu współrzędnych (rys. 1.19b).

Siła działająca na odcinek  $y_2 - y_1 = OD - OC$  może być wyznaczona z równania (1.40) dla aktualnych warunków brzegowych

$$f_x = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \ln \frac{y}{x_1 + \sqrt{y^2 + x_1^2}} \bigg|_{y=y_1}^{y=y_2} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \ln \left( \frac{y_2}{y_1} \frac{x_1 + \sqrt{y_1^2 + x_1^2}}{x_1 + \sqrt{y_2^2 + x_1^2}} \right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \ln \left( \frac{OD}{OC} \frac{AO + AC}{AO + AD} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 k_f \ln \frac{OD}{OC}, \quad (1.40a)$$

gdzie  $k_f = \frac{\ln \left( \frac{OD}{OC} \frac{AO + AC}{AO + AD} \right)}{\ln \frac{OD}{OC}}.$

Moment siły  $f_x$  względem punktu  $O$  otrzymujemy z równania (1.41) podstawiając aktualne warunki brzegowe toru  $S_1$

$$\begin{aligned}
 M_{zo} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 x_1 \ln \left( y + \sqrt{y^2 + x_1^2} \right) \Bigg|_{y=y_1}^{y=y_2} \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 x_1 \ln \left( \frac{y_2 + \sqrt{y_2^2 + x_1^2}}{y_1 + \sqrt{y_1^2 + x_1^2}} \right) = \quad (1.41a) \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 AO \ln \left( \frac{OD+AD}{OC+AC} \right).
 \end{aligned}$$

W przypadku szczególnym kiedy tory  $S_1$  i  $S_2$  tworzą wspólny obwód i posiadają określone wymiary przekroju np. kołowego (rys.1.20a) mamy

$$i_1 = i_2 = i \quad \text{oraz} \quad \frac{OD}{OC} = \frac{l_1}{r_0}.$$

Wtedy wzór na siłę wg równania (1.40a) możemy zapisać jako

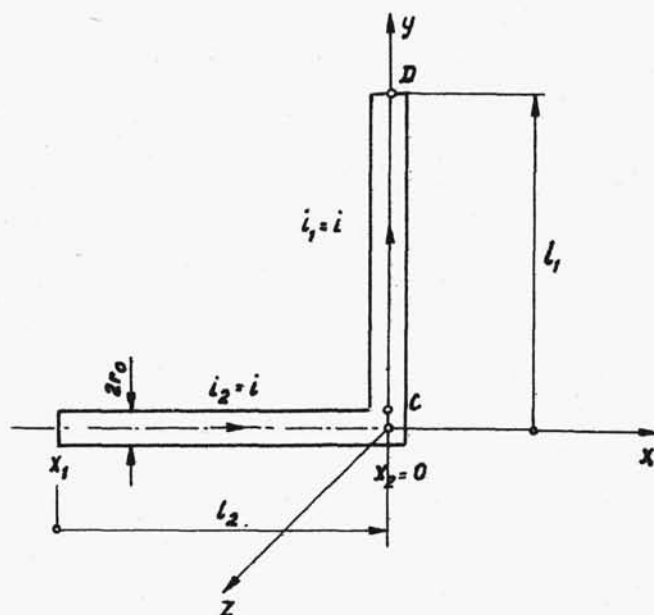
$$f_x = \frac{\mu_0}{4\pi} i^2 k_f \ln \frac{l_1}{r_0}, \quad (1.40b)$$

$$\text{gdzie } k_f = \frac{\ln \frac{l_1}{r_0} \frac{2 l_2}{l_2 + \sqrt{l_1^2 + l_2^2}}}{\ln \frac{l_1}{r_0}}.$$

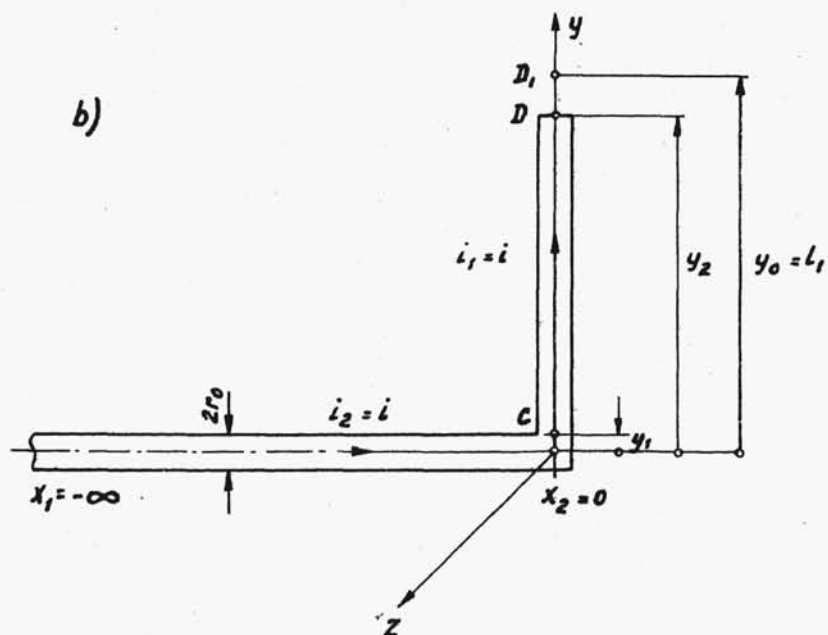
Wzór (1.41a) na moment względem punktu O wobec  $AC \cong AO = l_2$  oraz wobec  $r_0 \ll l_2$  będzie

$$\begin{aligned}
 M_{zo} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} i^2 l_2 \ln \frac{l_1 + \sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{r_0 + l_2} \cong \quad (1.41b) \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} i^2 l_2 \ln \frac{l_1}{l_2} \left( 1 + \sqrt{1 + \left( \frac{l_2}{l_1} \right)^2} \right).
 \end{aligned}$$

a)



b)



Rys.1.20. Przypadek szczególny półpętli z przewodu o przekroju kołowym z tym samym prądem w obydwu odcinkach

W przypadkach przewodów o przekroju prostokątnym o wymiarach  $b \times h$  należy rozumieć promień  $r_0$  jako średni geometryczny tj.

$$r_0 = 0,2236 (b + h).$$

Przypadek 3. Tor  $S_2$  o postaci półprostej rozpoczyna się w początku układu współrzędnych (rys.1.19c).

Podstawiając wyrażenie na  $B_{2z}$  wg rys.1.18d znajdujemy siłę elementarną

$$df_x = i_1 B_{2z} dy = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{1}{y} dy$$

i siłę całkowitą działającą na tor prądowy o długości  $S_1$

$$f_x = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \int_{S_1} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \ln y \Big|_{S_1}. \quad (1.42)$$

Odpowiednio moment elementarny i całkowity od siły działającej na odcinek  $S_1$  względem punktu O wynoszą

$$\begin{aligned} dM_{zo} &= -y df_x - \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 dy, \\ M_{zo} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 y \Big|_{S_1}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Wreszcie moment elementarny i całkowity od siły działającej na odcinek  $S_1$  względem dowolnego punktu na osi toru  $S_1$  o współrzędnej  $y_0$  wynosi

$$\begin{aligned} d\hat{M}' &= \left[ (y \hat{i} - y_0 \hat{j}) \times d\hat{f}_x \right] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & y-y_0 & 0 \\ d\hat{f}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{k}(y-y_0)d\hat{f}_x = \\ &= \hat{k}(y-y_0) d\hat{f}_x = d\hat{M}'_z. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Po podstawieniu uzyskanego wcześniej wyrażenia na  $df_x$  mamy

$$\begin{aligned} dM_z &= (y-y_0) df_x = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{y_0-y}{y} dy = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \left( \frac{y_0}{y} - 1 \right) dy . \end{aligned} \quad (1.44a)$$

Po scałkowaniu

$$M'_z = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \int_{S_1} \left( \frac{y_0}{y} - 1 \right) dy = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 (y_0 \ln y - y) \Big|_{S_1} \quad (1.45)$$

Przypadek 4. Tor  $S_2$  o postaci półprostej rozpoczyna się w początku układu współrzędnych (rys.1.19d).

Wypisujemy kolejno

$$f_x = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \ln y \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \ln \frac{y_2}{y_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \ln \frac{OD}{OC} , \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} M_{zO} &= - \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 y \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} = - \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 (y_2 - y_1) = \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 (OD - OC) = - \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 CD . \end{aligned} \quad (1.47)$$

Wreszcie moment siły  $f_x$  względem punktu  $D_1$  wg 1.45

$$\begin{aligned} M'_{zD_1} &= \frac{\mu_0}{2\pi} i_1 i_2 (y_0 \ln y - y) \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \left[ y_0 \ln \frac{y_2}{y_1} - (y_2 - y_1) \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 OD_1 \left( \ln \frac{OD}{OC} - \frac{CD}{OD_1} \right) . \end{aligned} \quad (1.45a)$$

W przypadku szczególnym kiedy tory  $S_1$  i  $S_2$  tworzą wspólny obwód i posiadają określone wymiary przekroju np. kołowego (rys.1.20b) mamy

$$i_1 = i_2 = i \quad \text{oraz} \quad y_1 = r_0, \quad y_2 = l_1 - r_0, \quad y_0 = l_1.$$

Siła działająca na odcinek  $(y_2 - y_1)$  wyniesie wg (1.46)

$$f_x = \frac{\mu_0}{4\pi} i^2 \ln \frac{l_1 - r_0}{r_0}. \quad (1.46a)$$

Moment tej siły względem punktu O wg 1.47

$$M_{ZO} = -\frac{\mu_0}{4\pi} i^2 (l_1 - 2r_0). \quad (1.47a)$$

i względem punktu  $D_1$  wg 1.45a

$$M'_{ZD} = \frac{\mu_0}{4\pi} i^2 l_1 \left( \ln \frac{l_1 - r_0}{r_0} - 1 + \frac{2r_0}{l_1} \right). \quad (1.45b)$$

#### B. Przykłady liczbowe

1. Dla odłącznika zabudowanego w układzie półpętli prostokątnej (rys.1.21) wyznaczyć siłę działającą na ruchomą część toru prądowego odłącznika oraz dla dwóch przypadków umiejscowienia punktu obrotu noża stykowego (w O i D) obliczyć:

- moment otwierający względem punktu obrotu,
- siłę otwierającą tj. działającą w osi zestyku rozłącznego.

Dane są:  $i_u = 75$  kA,  $l_1 = 20$  cm,  $S_2 = l_2 = \infty$ ,  $h = 3$  cm.

a. Siłę działającą na nóż odłącznika obliczymy ze wzoru 1.46 podstawiając

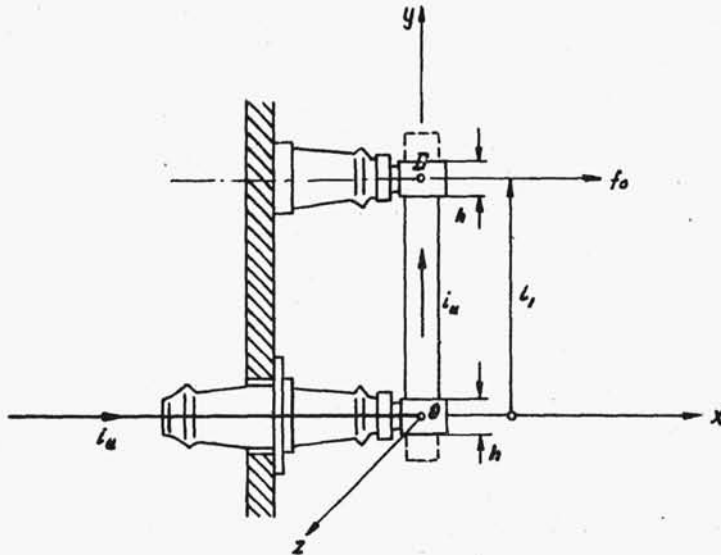
$$y_1 = h/2,$$

$$y_2 = l_1 - h/2,$$

$$f_x = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \ln \frac{y_2}{y_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_u^2 \ln \frac{2l_1 - h}{h} =$$

$$= \frac{1,256 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vs}}{\text{cm}} \cdot 7,5^2 \cdot 10^8 \text{A}^2 \cdot 10,2 \text{ kGcm}}{4\pi \text{ Vs}} \ln \frac{37}{5} = 143 \text{ kG}.$$

b.



Rys.1.21. Odłącznik jednobiegunowy zabudowany w układzie półpętli prostokątnej

b. Celowość liczenia momentu otwierającego względem dwóch założonych j.w. punktów obrotu, tj. 2 układów zabudowania odłącznika w torze prądowym wynika stąd, że w przypadku punktu obrotu w D wartość momentu jest o wiele większa, niż w przypadku obrotu noża odłącznika względem punktu O.

Wróćmy bowiem do rysunku 1.19c, kiedy to siła elementarna działająca na wybrany odcinek toru  $S_1$  wyraża się wzorem

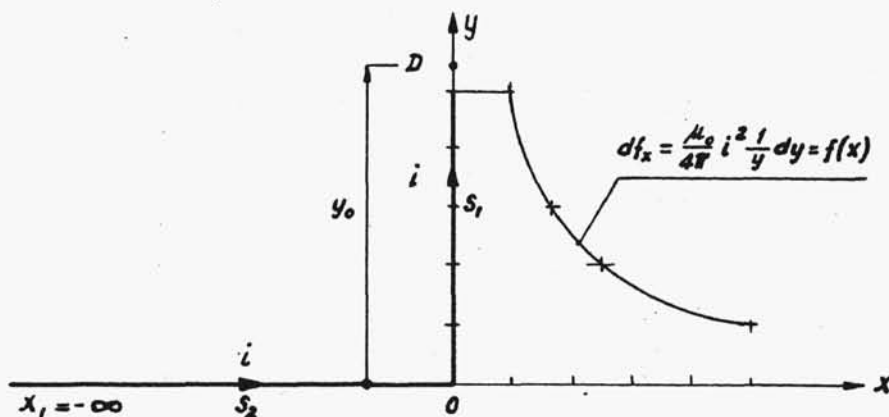
$$df_x = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{1}{y} dy ,$$

tj. przy danych wartościach prądów (prądu)

$$df_x = C \frac{1}{y} dy ,$$

gdzie  $C = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2$ .

Mamy tu zatem do czynienia z parabolicznym rozkładem sił elementarnych o wartościach malejących względem rzędnej  $y$  (rys.1.22).



Rys.1.22. Rozkład sił elementarnych działających na odcinek półpętli prostokątnej

Suma momentów tak wyobrażanych sił elementarnych względem początku układu współrzędnych jest oczywiście zawsze mniejsza od takiej sumy względem punktu np. o  $y = y_0$ , skoro w pierwszym przypadku największym wartościom sił elementarnych odpowiadają najmniejsze ramiona ich działania względem punktu obrotu, tj. punktu O. W drugim przypadku (tj. obrotu względem punktu D) mamy sytuację odwrotną.

Przeliczmy to w rozwiązywanym przykładzie.

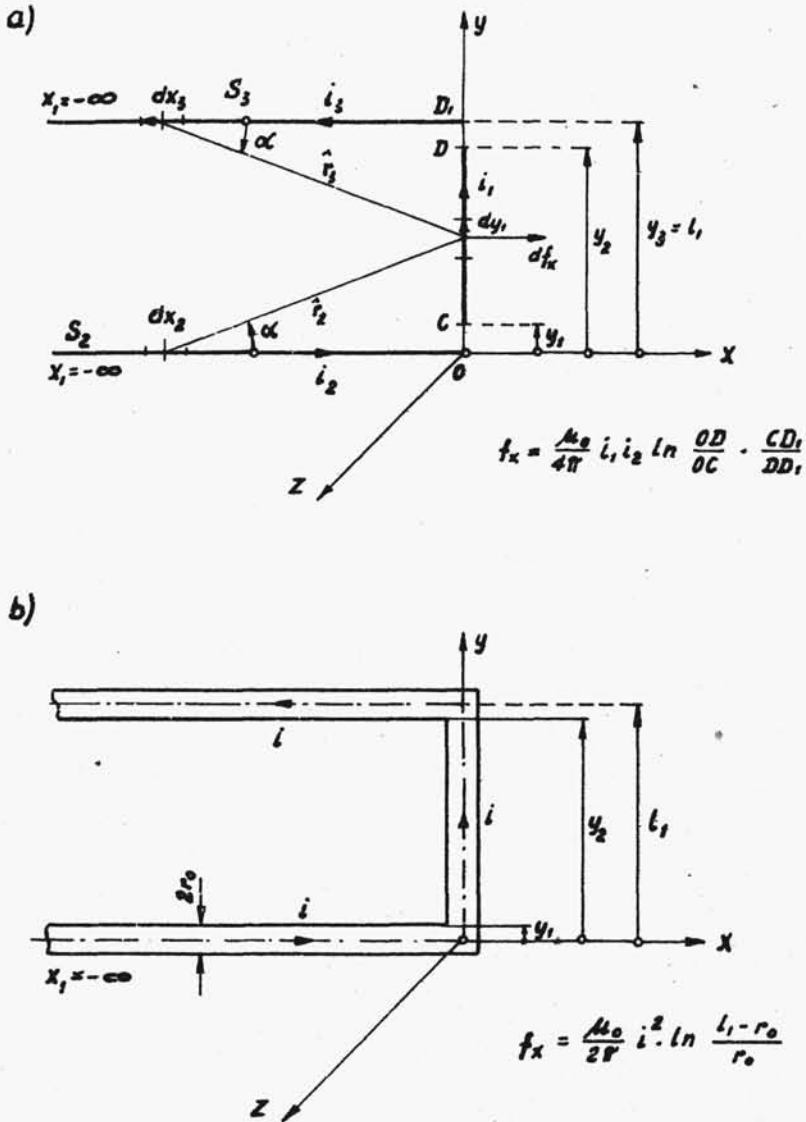
b.1. Punkt obrotu noża stykowego w O.

Moment siły  $f_x$  względem punktu O obliczamy ze wzoru 1.47

$$\begin{aligned} M_{zo} &= \frac{\mu_0}{4\pi} i_u^2 (l_1 - h) = \\ &= \frac{1,256 \cdot 10^{-8} \frac{\Omega \cdot s}{cm} \cdot 7,5^2 \cdot 10^8 \frac{A^2}{Ws} \cdot 10,2 \text{ kGcm} (20-3) cm}{cm} = \\ &= - 965 \text{ kGcm}. \end{aligned}$$

Siła otwierająca w zestyku (wartość maksymalna) wyniesie zatem





Rys.1.24. Wzory do obliczania sił działających na poprzeczkę w układzie pętli prostokątnej: a - przy założeniu jednowymiarowych torów prądowych, b- przy torze prądowym z prądem  $i$  oraz kołowym przekroju przewodu

Siła otwierająca w zestyku (wartość maksymalna)

$$f_0 = \frac{M_{zD}}{L_1} = \frac{1900}{20} \text{ kG} = 95 \text{ kG}.$$

2. Obliczyć siłę działającą na nóż stykowy i moment otwierający nóż stykowy odłącznika, tj. moment względem punktu obrotu  $O_1$  noża stykowego w układzie podanym na rys.1.23.

Wskazówka: korzystamy ze wzorów (1.46), (1.47) podstawiając w nich  $y_1 = a + h/2$ ,  $y_2 = a + l_1 - \frac{h}{2}$ .

### C. Obliczanie układów pętlowych

W nawiązaniu do dotąd omawianych układów pól pętli prostokątnej warto wspomnieć, że układy pętli prostokątnej najwygodniej jest obliczać metodą superpozycji oddziaływania elektrodynamicznego liczonego dla dwóch układów pól pętli. Wzory dla obliczania tych układów podane są dla porządku na rys.1.24.

#### 1.3.3.4. Przykład wyznaczania sił elektrodynamicznych w układzie złożonym

Wyznaczyć reakcje przenoszone przez podstawę izolacyjną przepustowego przekładnika prądowego niskiego napięcia podczas badań nad obciążalnością elektrodynamiczną tych przekładników przeprowadzanych w układzie probierczym wieloprądowym pokazanym na rys.1.25. Podstawa przekładnika naprężana jest reakcjami przenoszonymi przez śruby mocujące w zaznaczonych na rysunku punktach A i B. Omawiany rysunek podaje również zwroty dodatnie osi przyjętego prostokątnego układu współrzędnych  $x, y, z$ .

Mamy tutaj do czynienia z przestrzennym układem poszczególnych składowych sił elektrodynamicznych i związanych z nimi reakcji - i stąd zadanie to rozwiązywać będziemy drogą wyznaczania kolejno działających w poszczególnych płaszczyznach składowych<sup>x)</sup>.

a. W płaszczyźnie  $(y, x)$  wzdłuż osi  $y$  na przęsła AC o długości  $l_1$  i BD o długości  $l_2$  działają siły spowodowane

x) W przykładzie powyższym rozpatrujemy jedynie oddziaływanie obwodu zewnętrznego przenoszone przez śruby mocujące podstawę przekładnika. Nie obliczamy w tym miejscu ew. sił powstających w części wewnętrznej przekładnika, zaś siły od obwodu zewnętrznego działające na wewnętrzną część przekładnika zastępujemy siłami działającymi na prostoliniowy odcinek przewodu o długości AB.