

§ III.

O skoku prędkim, czyli progressyi Jeometrycznéy.

20. **K**tóre są Prawidła, na których się reguły Jeometrycznéy progressyi zasadzają?

Dwa następujące:

Prawidło I. W każdéy progressyi Jeometrycznéy, jeżeli dwa izkiekolwiek terminy między sobą rozmnożone będą, a produkt przez pierwszy termin progressyi podzielony będzie, za wieloraz wypadnie termin tyle miejscami odległy od terminu pierwszego, ile jedności zamykają w sobie wskazowniki razem wzięte obu dwu terminów rozmnożonych.

Te zaś wskazowniki (*indices*) nie co innego są, tylko liczby porządkiem naturalnym, pod każdym progressyi Jeometrycznéy terminem napisane, zaczynając od zera: tak 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. i t. d. I tak w następującéy progressyi, napisawszy pod każdym terminem progressyi liczby naturalne, zaczynając od zera:

3. 6. 12. 24. 48. 96. i t. d.

0. 1. 2. 3. 4. 5.

Jeżeli rozmnożę między sobą dwa którekolwiek terminy, np. 6×48 , a produkt 288 podzielę przez termin pierwszy 3, będę miał za wieloraz termin 96, który w téy progressyi pięcią miejscami od pierwszego terminu jest odległy, iako wskazowniki rozmnożo-

ných przez się terminów $1 + 4 = 5$, wskazują. Liczby więc te pod terminami skoku Jeometrycznego położone, zowią się wskazujące, albo wskazowniki, bo nam wskazują, iak daleko każdy termin odległy jest od terminu pierwszego. Wskazują zaś miéysce, czyli liczbę terminów iednością zmniejszoną. Tak: 48, których wskazownik jest 4, są piątym terminem progressyi. Na co pomnieć, wiele pomoże do zadań rozwiązywania.

Prawiðło II. W każdéy progressyi Jeometrycznéy podwoynéy, naywiększy termin, wyiawszy z niego pierwszy, równy jest wszystkim innym terminom razem wziętym. W progressyi zaś potroynéy, naywiększy termin, wyiawszy z niego pierwszy, jest dwa razy większy nad wszystkie inne terminy razem zebrane, i t. d. Tak np. w téy progressyi: 1. 2. 4. 8. 16, odciągnąwszy termin naymniejszy 1 od naywiększego 16, zostaje się 15. To 15 równe są wszystkim terminom razem zniesionym: $1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

Z A D A N I E I.

21. Gdy danych będzie kilka terminów progressyi Jeometrycznéy, iak się znajdzie termin naywiększy, albo inny którykolwiek, nie dochodząc nawet terminów średnich?

Reguła. Potrzeba dwa terminy albo i więcej w owéy progressyi mnożyć między sobą, ale takie, którychby wskazowniki wraz wzięte zamykały w sobie tyle iedności, iedną

mniey, ile ich ma ta liczba, nad którą terminu szukam; produkt stąd wynikający podzieliwszy przez termin pierwszy, wieloraz pokaże termin, którego szukam.

Naprzykł: Niech będą dane następujące terminy progressyi Jeometrycznéy:

5. 10. 20. 40. 80. 160. i t. d.

0. 1. 2. 3. 4. 5.

W której progressyi chcę znaleźć termin szesnasty. Wskazownik tego terminu będzie 15, to jest liczba iednym mnieysza od miéysca terminu zamierzonego.

Biorę więc np. termin szósty 160, którego wskazownik 5 dwa razy wzięty czyni 10. Mnożę te 160 przez siebie same, to jest 160×160 , wypada produkt: 25600, który podzieliwszy przez termin pierwszy 5, mam za wieloraz 5120 termin iedenasty, którego wskazownik jest 10. Tén iedenasty termin 5120, mnożę znowu przez termin szósty 160, mający wskazownika 5, wychodzi produkt: 819,200, który podzieliwszy przez termin pierwszy, mam za wieloraz 163840. termin szesnasty, którego wskazownikiem będzie liczba 15, iednym mnieysza od miéysca terminu zamierzonego. Gdyż wskazownik $10 + 5 = 15$. Mam więc termin szesnasty znaleziony 163840 z liczbą wskazującą, czyli wskazownikiem 15.

Albo téż tenże termin szesnasty tak wynajduję: Biorę dwa terminy np. 40 i 160, pod

któremi wskazowniki raz wzięte czynią 8, to jest: $3 \div 5 = 8$, i rozmnożywszy 40 przez 160, produkt 6400 przez pierwszy termin 5 podzieliwszy, będę miał termin gty 1280 z wskazownikiem 8. Potém wynaleziony termin gty 1280 mnożę przez 20, to jest przez termin trzeci, wypada produkt 25600, który podzieliwszy przez termin pierwszy 5, mam za wieloraz iedenasty termin 5120 z wskazownikiem 10. Bo wskazownik $8 \div 2 = 10$. Naostatek, ażebym miał termin szesnasty ze wskazownikiem 15, termin iedenasty dopiero znaleziony 5120, mnożę przez termin 26sty 160, który pod sobą ma wskazownika 5, to jest 5120×160 , wychodzi produkt 819200, który podzieliwszy przez termin pierwszy 5, wieloraz 163840, ukaże mi termin szesnasty ze wskazującą liczbą 15.

Jeżeli jeszcze chcę szukać terminu dalszego w téjże saméj progressyi, np. 29, mnożę termin, iedenasty 5120 przez 163840 termin szesnasty, a produkt: 838860800 podzieliwszy przez termin pierwszy 5, wypadnie termin 26sty: 167772160 ze wskazownikiem 25. Bo wskazownik $10 \div 5 = 25$. Potém wynaleziony termin 26sty: 167772160, mnożę przez termin czwarty 40 który ma wskazownika 3, (termin bowiem 29ty powinien mieć wskazownika 28, a zaś $25 \div 3 = 28$) po uczynionéj mulyplikacyi wypada produkt: 6710886400, który podzieliwszy przez ter-

min pierwszy 5, wieloraz 1342177280. ukazie mi termin 29ty teyże progressy i ze wskazownikiem 28. Tym sposobem znayduią się terminy choćby nayodlegléysze. Krótko mówiąc, toż samo iest szukać w daney progressyi terminu np. 54, co szukać terminu takiego, któregooby wskazownik był 53, jednym mnieyszy od miéysca terminu, którego szukam.

Ten drugi sposob wynalezienia któregokolwiek w daney progressyi terminu, iest dokładniéyszy i lepszy; bo pierwszy tę ma wadę, iż nie na każdy skok zamierzony służy: gdyż czasem termin zamierzony przenosi, a czasem nie dosięga: Doświadczający łatwo to poznać może.

Reguła ta zasadza się na Prawi: I. Każdy bowiem wieloraz z moltiplikacyi, i dywizyi dwóch terminów wynikający, tylą miéyscami odległy bydz powinien od terminu pierwszego, ile iedności zamykają w sobie wskazujące liczby, czyli wskazowniki razem wzięte, obu dwu terminów między sobą rozmnożonych

Z A D A N I E II.

22. Gdy będą dane termin naymnieyszy, naywiększy i mianownik progressyi Jeometryczney, iak się wynayduie ieneralna summa wszystkich terminów?

Od terminu naywiększego odciąga się naymnieyszy, a resztę podzieliwszy przez mianownik progressyi iednym zmnieyszony, i do

wielorazu przydawszy termin ostatni, wypadnie ieneralna summa wszystkich terminów razem zebranych.

Przykład. Przedaie kto konia na cztery nogi kowanego; nie więcéy za niego nie chce, tylko zapłaty za same ufnale, których się w podkowach znayduie 24. Ale w ten sposób: aby mu za pierwszy ufnal dano 2 gr: za drugi gr: 4, za trzeci gr: 8, za czwarty gr: 16, i tak daléy w podwoynéy progressyi Jeometrycznéy. Pytam, iaka summa groszy wypadnie za tego konia?

Znalazwszy ostatni termin w téy progressyi, przypadnie za ostatni czyli 24ty ufnal groszy 16,777,216. Od tego więc ostatniego terminu w progressyi Jeometrycznéy odciągam termin pierwszy 2, a resztę 16,777,214, podzieliwszy przez mianownik iednym zmniéyszony, to jest przez 2 — 1; lecz że iedno nie dzieli, mam za wieloraz téż samę summę: 16,777,214 do któręy przydawszy ostatni w progressyi termin 16,777,216, wypadnie summa ieneralna groszy: 33,554,430, którą podzieliwszy przez 30 gr: będę miał cenę owego konia złotych 1,118,481.

Okazanie tego działania. W każdéy progressyi Jeometrycznéy, iak się ma mianownik iednym zmniéyszony do iegnego; tak się ma największy termin najmniéyszym terminem zmniéyszony, do summy ze wszystkich terminów w progressyi zebranych, wyiawszy ten-

że sam termin ostatni. Tak np: dawszy następującą progressyą Jeometryczną w proporcji potroynéy: 3. 9. 27. 81; będzie się miał mianownik z iednym zmniejszony do 1. to iest, 2. 1. iak się ma termin naywiększy zmniejszony terminem naymniejszym, to iest: $81 - 3 = 78$, do całej summy progressyi, wyiawszy tenże sam ostatni termin, to iest. do $3 + 9 + 27 = 39$.

$$2. 1 :: 78. 39.$$

Zaczém podzieliwszy 78 przez 2, mam 39; do tych 39 dodawszy ostatni termin 81: mam 120. sumnę wszystkich terminów w owéy progressyi będących.

23. W progressyi Jeometrycznéy podwoynéy iak łatwiey i krócéy sumnę znaleźć można?

Znayduie się łatwo tym sposobem: Ostatni termin podwaiam, a od produktu odciagam termin pierwszy. Tak we wspomnionym o ufnalach przykładzie, termin ostatni 16,777,216 podwoiwszy, a od produktu termin pierwszy 2 odciagnawszy, mam sumnę gr: też samę, co i pierwéy: 33,554,430, czyli zł: 1,118,481.

Przyczyna tego ta iest oczywista, iż w téy mierze mianownik z iednym zmniejszony iest 1, który liczby dzielić nie może. Zaczém dodać do wielorazu ostatni termin, iest to wziąć go dwa razy, czyli podwoić.

Na wynaydowanie naymniejszego terminu, liczby terminów, i mianownika, czyli wzglę-

du między terminami zachodzącego, nie kładziemy sposobu, ani reguły; gdyż prawie zawsze termin najmniejszy i liczba terminów w progressyi Jeometryczney wiadome się daia; a na wynalezienie pospolitego mianownika, czyli względu między terminami zachodzącego, sposób już wyżey podaliśmy, mówiąc w powszechności o progressyi Jeometryczney.

§ IV.

Zamyka w sobie niektóre ciekawe przykłady, które się przez progressye rozwiązują.

I. Przykłady na progressyą Arytmetyczną.

I. Rzemieślnik pewny skończywszy znaczne dzieło za dni 30, odebrał umówioną nagrodę; i spytany od przyjaciela, ileby zyskał, odpowiedział: iż pierwszego dnia wziął zł: 1, drugiego 5, i tak daléy w progressyi Arytmetyczney. Pytam się, ile wziął dnia ostatniego i wiele przez wszystkie dni zyskał?

Znalazłszy termin ostatni, mam dnia ostatniego płacą złotych 117. A znalazłszy sumę wszystkich terminów, mam cały jego zarobek złotych 1770.

II. Hetman pewny zdobył przy zdobyciu miasta wziętą, każe dzielić między 40. żołnierzy, którzy pierwsi wpadli do fortecy, z tą kondycyą: ażeby ostatni wziął zł: 100, przedostatni złot: 130, trzeci od końca 160, i tak daléy