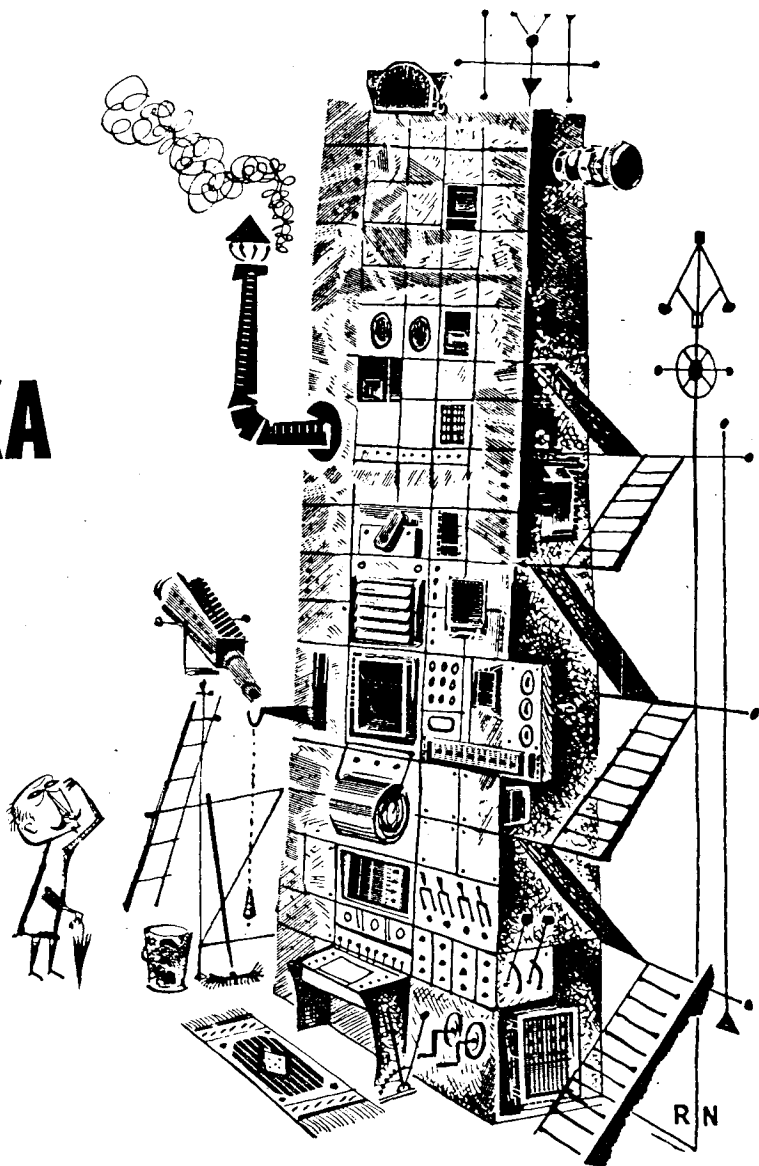


MASZyny i MATEMATYKA

Dr ZDZISŁAW PAWLAK

adiunkt Instytutu Matematycznego PAN



KRÓLOWA nauk — matematyka, stosuje bardzo prymitywne narzędzia: papier i ołówek czy też tablicę i kredę. Nasuwa się pytanie, czy matematyk potrzebuje w swej pracy zastosować bardziej skomplikowane narzędzia i w jakim stopniu mogą one wpłynąć na uprawianą przez niego dziedzinę. Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy zdać sobie sprawę z charakteru pracy matematyka.

Produktem pracy matematyków są teorie matematyczne. Każda teoria matematyczna składa się z pewnych zdań, które dla ich oczywistości czy też innych względów przyjmuje się za prawdziwe, i z reguł logicznych, które pozwalają ze zdań już prawdziwych otrzymywać nowe zdania prawdziwe. Zdania wyjściowe nazywa się aksjomatami albo pewnikami, bądź też przesłankami, a zdania, które z nich wyprowadzamy — tezami, wnioskami lub twierdzeniami. Tak więc w teorii matematycznej za pomocą odpowiednich operacji z jednych zdań otrzymujemy nowe zdania. Proces taki nazywa się

w matematyce wnioskowaniem albo dowodzeniem, a operacje logiczne, które pozwalają otrzymywać twierdzenia z pewników (wnioski z przesłanek) zwą się regułami wnioskowania lub regułami dowodzenia. Przez dowodzenie rozumie się czasem też postępowanie odwrotne do opisanego, tj. badanie, czy zdanie jest twierdzeniem teorii. Chodzi nam wtedy nie o przekształcanie aksjomatów w celu otrzymania twierdzenia, lecz odwrotnie — o takie przekształcanie zdania, aby otrzymać z niego aksjomaty. Jeżeli można dokonać takiego przekształcenia, to rozpatrywane zdanie jest twierdzeniem badanej teorii. W obu przypadkach istota rzeczy nie ulega zmianie: matematyk przekształca za pomocą ustalonych operacji jedno wyrażenie w inne. Ponieważ zdania matematyczne zapisuje się obecnie nie w języku potocznym, jak to czyniono kilkaset lat temu, lecz w specjalnie w tym celu stworzonym języku symbolicznym — w postaci wzorów matematycznych — wnioskowanie czy dowodzenie polega na przekształ-

caniu wzorów matematycznych w myśl określonych reguł.

Dowodzenie twierdzeń przypomina więc nieco wykonywanie obliczenia. Aksjomaty odpowiadają danym początkowym, reguły wnioskowania — działaniom arytmetycznym, a twierdzenie — wynikowi obliczenia. Proces dowodzenia można by też przyrównać do procesu produkcji, składania jakiegoś przedmiotu z jego części. Najpierw z elementów za pomocą określonych operacji składamy podzespoły, z tych podzespołów agregaty itd., aż otrzymamy wytwór końcowy.

Warto podkreślić pewną różnicę między procesem dowodzenia a procesem produkcyjnym. W procesie produkcyjnym celem, który nas najbardziej interesuje, jest wytwór końcowy procesu, przedmiot, który wyprodukowano. Można sobie zadać pytanie, czy wytwór ten wyprodukowano prawidłowo i czy spełnia on oczekiwane warunki, czy ma odpowiednie właściwości. W jaki sposób to sprawdzimy? W przypadku np. samochodu poddamy go odpowiednim próbom technicznym, które pozwolą na wykrycie ewentualnych usterek i wprowadzenie poprawek; w przypadku liny może to być badanie jej wytrzymałości.

Badanie poprawności twierdzenia nie wymaga takich zabiegów. Wystarczy, że wyprowadzono je z aksjomatów, aby produkt ten uznać za udany. Ponieważ niewielka liczba twierdzeń matematycznych znajduje zastosowanie praktyczne, często uwaga matematyka skupia się na samym procesie dowodzenia oraz badaniu jego właściwości. Tak więc dla matematyka celem najbardziej interesującym może być nie twierdzenie, lecz jego dowód. Przypomina to nieco sytuację we wspinaczce wysokogórskiej, gdzie osiągnięcie szczytu może być mniej interesujące od samej drogi do niego. Ktoś złośliwy mógłby powiedzieć, że matematyka przypomina operę: nie jest ważne co, ale jak się śpiewa.

MOŻEMY teraz wrócić do pytania postawionego na początku: czy w pracy matematyka mogą odegrać jakąś istotną rolę narzędzia bardziej skomplikowane? Większość matematyków utrzymuje, że nie. Praca ich jest bowiem pracą twórczą, wymagającą wysiłku intelektualnego i wprowadzenie nawet najbardziej wymyślnych maszyn nie ma tu w zasadzie znaczenia. Można wprawdzie zbudować maszyny, które z podanych aksjomatów będą wyprowadzały twierdzenia, ale okazało się, że w większości teorii matematycznych istnieją twierdzenia, których słuszności tą drogą uzasadnić się nie da. Wykazał to wybitny matematyk Kurt Gödel w 1931 r. Wynik ten uważa się za

jedno z największych osiągnięć współczesnej matematyki. Nie wszyscy jednak zgadzają się z taką interpretacją twierdzenia Gödla i uważają, że wcale z niego nie wynikają ograniczenia stosowania maszyn w twórczej pracy matematyków. Na rozstrzygnięcie tego sporu musimy jeszcze poczekać.

Istnieje jeszcze jedno zagadnienie. Jeżeli zgodzimy się z twierdzeniem Gödla, że całej pracy matematyków zmechanizować się nie da, jakie więc jest znaczenie narzędzi w tym zakresie, gdzie taka mechanizacja jest możliwa? Znany matematyk amerykański Hao Wang, który zajmuje się zagadnieniem mechanicznego dowodzenia twierdzeń i ma na tym polu poważne osiągnięcia, utrzymuje, że chociaż w pracy matematyka występują elementy twórcze, to znakomita większość tej pracy polega na zupełnie mechanicznych czynnościach, które z powodzeniem może wykonywać maszyna. Podał zresztą na to przekonujące dowody, analizując pod kątem zastosowania maszyn wybitne dzieła matematyczne i wykazując, że większość występujących w nich twierdzeń można w bardzo krótkim czasie dowieść za pomocą maszyny.

Zastosowanie maszyn do dowodzenia twierdzeń ma jeszcze jeden aspekt. Matematyk dowodząc jakiegoś twierdzenia na ogół nie przeprowadza dowodu z całą drobiazgowością, robi tylko jego szkic, tak aby były widoczne zasadnicze elementy dowodu, dbając jednakże o to, aby w razie potrzeby dowolny fragment można było uściślić. Szczegółowe przeprowadzenie dowodu wymagałoby bowiem zazwyczaj wykonania olbrzymiej liczby operacji, przez co dowód straciłby na przejrzystości; z drugiej strony, taka drobiazgowość pracy jest nieciekawa, nie odpowiada wysokim kwalifikacjom matematyków.

Zastosowanie maszyny do dowodzenia zmusza natomiast do bardzo szczegółowej analizy dowodu i spojrzenia na niego z zupełnie innej strony, od strony organizacji pracy: w jaki sposób możliwie sprawnie wykonać tak dużą liczbę operacji. Prowadzi to w konsekwencji do nowych zagadnień, które w przypadku pracy ręcznej nie występowały, jak np. dobór odpowiednich reguł wnioskowania czy sposobu zapisywania dowodów. Zastosowanie maszyn w tym przypadku może być więc interesujące nie tylko dlatego, że można za ich pomocą dowieść szybciej pewnej liczby twierdzeń, lecz dlatego, że na proces dowodzenia można spojrzeć z nieco innego punktu widzenia. Przypomina to sytuację w dziedzinie innych odkryć, np. podróży Magellana. Wartość odkrycia może leżeć zupełnie gdzie indziej, aniżeli się spodziewano.