Rozdział 2. Algebra macierzy nadbudowana na algebrze m + n - elementowej

2.0 Uwagi wstępne

Rozdział niniejszy ma za zadanie powiązać w sposób wygodny algebry m + n - elementowe z sieciami elektrycznymi. Algebraiczne odpowiedniki sprzężeń zwrotnych / funkcje rekursywne / zostają wprowadzone w sposób jednolity, z którego widać, że do badania układów zawierających sprzężenia zwrotne nie potrzeba żadnego nowego aparatu matematycznego, poza tym, jaki używamy do badania układów prostych / bez sprzężeń zwrotnych i układów opóźniających/.

Nadbudowywanie algebry macierzy nad skończonymi algebrami nie jest rzeczą nową w matematyce, np. traktowaniem ogólnej algebry Boole'a jako algebry macierzy których wyrazy należą do dwuelementowej algebry Boole'a zajmował się J.H.M.Wedderburn [22] . Podobnie H.Greniewski, K.Bochenek i R.Marczyński [5] nadbudowali algebrę macierzy na dwuelementowej algebrze Boole'a i wprowadzili interpretacje macierzy zerojedynkowych, którą w rozdziale niniejszym uogólnimy.

2.1 Pionowe i poziome łączenie macierzy

2.101 Definicja. Przez odcinek liczb naturalnych rozumiemy zbiór wszystkich liczb naturalnych nie większych od liczby danej.

2.102 Definicja. Przez ciąg / skończony / rozumiemy funkcję określoną na odcinku naturalno-liczbowym.

2.103 Definicja. Przez macierz/skończoną / rozumiemy funkcję określoną na parze odcinków naturalno-liczbowych.

2.104 Przykłady

Macierz o jednym wierszu i dwu kolumnach

$$[x_1, x_2]$$

jest funkcją określoną na produkcie

$$\{1,2\} \times \{1\} = \{\langle 1,1\rangle ; \langle 2,1\rangle\}$$

które przyporządkowuje

1/ parze $\langle 1,1\rangle$ wartość x_1

2/ parze $\langle 2,1\rangle$ wartość x_2

Macierz o dwu wierszach i jednej kolumnie

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

jest funkcją określoną na produkcie

$$\{1\} \times \{1,2\} = \{\langle 1,1\rangle ; \langle 1,2\rangle\}$$

która przyporządkowuje

1/ parze $\langle 1,1\rangle$ wartość x^1

2/ parze $\langle 1,2\rangle$ wartość x^2

Macierz o dwu wierszach i dwu kolumnach

$$\begin{bmatrix} x^1_1 , & x^1_2 \\ x^2_1 , & x^2_2 \end{bmatrix}$$

jest funkcją określoną na produkcie

$$\{1,2\} \times \{1,2\} = \{\langle 1,1\rangle ; \langle 1,2\rangle ; \langle 2,1\rangle ; \langle 2,2\rangle\}$$

która przyporządkowuje

1/ parze $\langle 1,1\rangle$ wartość x^1_1

2/ parze $\langle 1,2\rangle$ wartość x^2_1

3/ parze $\langle 2,1\rangle$ wartość x^1_2

4/ parze $\langle 2,2\rangle$ wartość x^2_2

Macierz o jednym wierszu i jednej kolumnie / czyli macierz jednoelementową / będziemy identyfikowali z elementem zbioru A

2.105 $$[x] \underset{df}{=} x \qquad \text{gdzie} \quad x \in A$$

2.11 <u>Operacja łączenia pionowego.</u> Operację którą zdefiniujemy poniżej można wykonywać tylko na macierzach o jednakowej ilości kolumn.

Definicja operacji łączenia pionowego / symbol $+\!\downarrow$ /

2.111 $$x +\!\downarrow y \underset{df}{=} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{gdzie} \quad x, y \in A$$

2.112 $$\begin{bmatrix} x^1_1, & \dots, & x^1_q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{p_1}_1, & \dots, & x^{p_1}_q \end{bmatrix} +\!\downarrow \begin{bmatrix} y^1_1, & \dots, & y^1_q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{p_2}_1, & \dots, & y^{p_2}_q \end{bmatrix}$$

$$\underset{df}{=} \begin{bmatrix} x_1^1, \ldots, x_q^1 \\ \vdots \\ x_1^{p_1}, \ldots, x_q^{p_1} \\ y_1^1, \ldots, y_q^1 \\ \vdots \\ y_1^{p_2}, \ldots, y_q^{p_2} \end{bmatrix}$$

2.113 Uwaga. Jak widać operacja łączenia pionowego macierzy
1/ nie posiada modułu
2/ jest nieprzemienna
3/ jest łączna

2.12 Operacja łączenia poziomego. Operację którą zdefiniujemy poniżej można wykonywać tylko na macierzach o jednakowej ilości wierszy.

Definicja operacji łączenia poziomego. / symbol $\overrightarrow{+}$ /

2.121 $x \overrightarrow{+} y \underset{df}{=} [x, y]$ gdzie $x, y \in A$

2.122 $$\begin{bmatrix} x_1^1, \ldots, x_{q_1}^1 \\ \vdots \\ x_1^p, \ldots, x_{q_1}^p \end{bmatrix} \overrightarrow{+} \begin{bmatrix} y_1^1, \ldots, y_{q_2}^1 \\ \vdots \\ y_1^p, \ldots, y_{q_2}^p \end{bmatrix} \underset{df}{=}$$

$$\underset{df}{=} \begin{bmatrix} x_1^1, \ldots, x_{q_1}^1 & y_1^1, \ldots, y_{q_2}^1 \\ \vdots & \vdots \\ x_1^p, \ldots, x_{q_1}^p & y_1^p, \ldots, y_{q_2}^p \end{bmatrix}$$

2.123 Uwaga. JAk widać operacja łączenia poziomego macierzy
1/ nie posiada modułu
2/ jest nieprzemienna
3/ jest łączna

2.13 Uwaga. Jak widać operacje łączenia poziomego i pionowego macierzy są między sobą rozdzielne.

Przy pomocy operacji łączenia poziomego i pionowego macierzy możemy przejść od elementów zbioru A do macierzy o dowolnej ilości wyrazów, zbudowanych z elementów zbioru A. Po-działanie którąkolwiek z tych operacji na parę macierzy p.q.i p-elemntowe wyprowadza poza macierze p.q-elementowe, operacje te pokazują związek pomiędzy wszystkimi macierzami skończenieelemntowymi zbudowanymi z elementów zbioru A.

2.2 Suma, iloczyn i identyfikacja macierzy

Operacje sumy, iloczynu i identyfikacji możemy wykonywać tylko na parze macierzy o równej ilości wierszy i kolumn.

2.21 Definicja. Przez sumę dwóch macierzy o p-wierszach i q-kolumnach będziemy rozumieli macierz o p-wierszach i q-kolumnach taką, że wyrazy stojące na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny są sumą wyrazów stojących na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny obu macierzy sumowanych.

2.211 Przykłady.

$$[x_1, x_2] \cup [y_1, y_2] = [x_1 \cup y_1, x_2 \cup y_2]$$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \cup y^1 \\ x^2 \cup y^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^1_1, & x^1_2 \\ x^2_1, & x^2_2 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} y^1_1, & y^1_2 \\ y^2_1, & y^2_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1_1 \cup y^1_1, & x^1_2 \cup y^1_2 \\ x^2_1 \cup y^2_1, & x^2_2 \cup y^2_2 \end{bmatrix}$$

2.22 Definicja. Przez iloczyn dwóch macierzy o p-wierszach i q-kolumnach będziemy rozumieli macierz o p-wierszach i q-kolumnach taką, że wyrazy stojące na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny są iloczynem wyrazów stojących na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny obu macierzy mnożnej i mnożnika.

2.221 Przykłady.

$$[x_1, x_2] \cap [y_1, y_2] = [x_1 \cap y_1, x_2 \cap y_2]$$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \cap y^1 \\ x^2 \cap y^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^1_1, & x^1_2 \\ x^2_1, & x^2_2 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} y^1_1, & y^1_2 \\ y^2_1, & y^2_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1_1 \cap y^1_1, & x^1_2 \cap y^1_2 \\ x^2_1 \cap y^2_1, & x^2_2 \cap y^2_2 \end{bmatrix}$$

2.23 Definicja. Przez identyfikację dwóch macierzy o p-wierszach i q-kolumnach będziemy rozumieli macierz o p-wierszach i q-kolumnach taką, że wyrazy stojące na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny są identyfikacją wyrazów stojących na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny obu macierzy identyfikowanych.

2.231 Przykłady.

$$[x_1, x_2] \underset{(1)}{\vdots} [y_1, y_2] = [x_1 \underset{(1)}{\vdots} y_1, x_2 \underset{(1)}{\vdots} y_2]$$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \underset{(1)}{\vdots} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \underset{(1)}{\vdots} y^1 \\ x^2 \underset{(1)}{\vdots} y^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^1_1, & x^1_2 \\ x^2_1, & x^2_2 \end{bmatrix} \underset{(1)}{\vdots} \begin{bmatrix} y^1_1, & y^1_2 \\ y^2_1, & y^2_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1_1 \underset{(1)}{\vdots} y^1_1, & x^1_2 \underset{(1)}{\vdots} y^1_2 \\ x^2_1 \underset{(1)}{\vdots} y^2_1, & x^2_2 \underset{(1)}{\vdots} y^2_2 \end{bmatrix}$$

2.3 Funkcje rekursywne

W dotychczasowych rozważaniach nie wspominaliśmy nic o praktycznych zastosowaniach naszych wyników / wszystkie nasze dotychczasowe rozważania mają ścisły sens praktyczny, mianowicie opisują one pewne układy fizyczne o skończonej ilości wejść i wyjść mających skończony wachlarz stanów wyróżnionych /.

W zależności od warunków technicznych badanego układu wprowadzamy jednostkę czasu, długość tej jednostki, wyrażona np. w sekundach, będzie różna dla układów elektronowych, przekaźnikowych i mechanicznych.

W dalszych rozważaniach czas będziemy mierzyli tylko w całkowitych wielokrotnościach naszej jednostki.

2.31 Definicja. Przez chwilę początkową / pierwszą / będziemy rozumieli przedział czasu, o długości jednostki czasu, od momentu w którym układ nasz zaczyna działać.

2.32 Definicja. Przez chwilę k-tą / k-liczba naturalna / będziemy rozumieli przedział czasu o długości przyjętej jednostki czasu, następującą po chwili k-1 . / k = 2, 3, 4,........,T /

Obecnie zajmiemy się klasyfikacją układów o skończonej ilości wejść i wyjść przyjmujący skończony wachlarz stanów wyróżnionych. / będziemy przyjmowali, że układ posiada m_1- wejść, oraz m_2- wyjść. /

2.33 Jeżeli w każdej chwili k stan m_1- wejść wyznacza jednoznacznie stan m_2- wyjść, to algebraicznym odpowiednikiem takiego układu jest układ m_2- funkcji od m_1- argumentów, rozważanych w rozdziale 1.

2.34 Jeżeli w każdej chwili k stan m_2- wyjść jest wyznaczony przez stan m_1-wejść w chwilach k oraz k-1 / linie opóźniające/ to odpowiednikiem takiego układu jest poniżej zdefiniowana rekursywna funkcja macierzowa argumentów macierzowego pierwszego rodzaju.

2.341
$$F\left(\begin{bmatrix} x_1^1, \dots, x_{m_1}^1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ x_1^p, \dots, x_{m_1}^p \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1^1, \dots, y_{m_2}^1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ y_1^p, \dots, y_{m_2}^p \\ y_1^{p+1}, \dots, y_{m_2}^{p+1} \end{bmatrix}$$

gdzie
$$y_q^1 = f_q(x_1^1, \dots, x_{m_1}^1; \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{m_1\text{-krotnie}}) \qquad k = 2, 3, \dots, p \quad q = 1, 2, \dots, m_2$$

2.342
$$y_q^k = f_q(x_1^k, \dots, x_{m_1}^k; x_1^{k-1}, \dots, x_{m_1}^{k-1})$$
$$y_q^{p+1} = f_q(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{m_1\text{-krotnie}}; x_1^p, \dots, x_{m_1}^p)$$

2.343 <u>Uwaga</u>. Powyższą funkcję macierzową argumentu macierzowego możemy na gruncie algebry macierzy wyrazić przy pomocy operacji łączenia pionowego i poziomego oraz sumy, iloczynu i identyfikacji macierzy.

2.35 Jeżli w każdej chwili k stan m_2-wyjść układu jest wyznaczony przez stan m_1-wejść w chwili k i stany m_2- wyjść i chwili k - 1 / sprzężenie zwrotne /, to odpowiednikiem takiego układu jest poniżej zdefiniowana funkcja macierzowa argumentu macierzowego drugiego rodzaju.

2.351
$$F\left(\begin{bmatrix} x_1^1, \dots, x_{m_1}^1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ x_1^p, \dots, x_{m_1}^p \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1^1, \dots, y_{m_2}^1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ y_1^p, \dots, y_{m_2}^p \\ y_1^{p+1}, \dots, y_{m_2}^{p+1} \end{bmatrix}$$

gdzie
$$y_q^1 = f_q(x_1^1, \dots, x_{m_1}^1; \underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{m_2\text{-krotnie}}) \qquad k = 2, 3, \dots, p \quad q = 1, 2, \dots, m_2$$

2.352
$$y_q^k = f_q(x_1^k, \dots, x_{m_1}^k, y_1^{k-1}, \dots, y_{m_2}^{k-1})$$
$$y_q^{p+1} = f_q(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{m_1\text{-krotnie}}; y_1^p, \dots, y_{m_2}^p)$$

2.353 <u>Uwaga</u>. Powyższą funkcję macierzową argumentu macierzowego możemy na gruncie algebry macierzy wyrazić przy pomocy operacji łączenia pionowego i poziomego oraz sumy, iloczynu i identyfikacji macierzy.

Funkcje f_q / q = 1, 2, ...m_2 / rozważane w 2.34 oraz 2.35x są zwykłymi funkcjami dotychczas rozważanymi w rozdziale 1. W ten sposób matematycznego opisu układów z tzw. liniami opóźniającymi, oraz z tzw. sprzężeniami zwrotnymi dokonujemy przy pomocy funkcji rozważanych w rozdziale 1, narzucając im tzw. warunki początkowe i końcowe.

Rozdział 3. Algebra trzyelementowa

3.0 Uwagi wstępne

Tematem tego rozdziału jest algebra trzyelementowa, jej własności i jej interpretacja przekaźnikowo-stykowa. Rozważana tutaj trzyelementowa algrebra jest odpowiednikiem Łukasiewicza trój-wartościowego rachunku zdań [9] . Algebrę tą wprowadzamy dla jednolitości rozważań, zamiast mówić o trójwartościowym rachunku zdań.

Funkcje uniwersalne zostały wyrażone w sposób analogiczny jak w rozdziale 1, przy pomocy trzech funkcji podstawowych, sumy, iloczynu i identyfikacji.

Interpretacja przekaźnikowo-stykowa kilku funkcji trójwartościowego rachunku zdań została podana po raz pierwszy przez M.Greniewskiego i Gr.C. Moisila [7] . Pokazane w tym rozdziale układy / odpowiadające funkcjom algebry trójelementowej / jak dotąd nie posiadają zastosowań praktycznych ponieważ w istniejących dotychczas urządzeniach przekaźnikowo-stykowych, nie stosuje się układów zbudowanych z samych przekaźników / elementów / trzypozycyjnych, natomiast stosuje się często urządzenia zbudowane z przekaźników dwu i trzypozycyjnych . Przeprowadzone w tym rozdziale rozważania mają charakter przygotowania dla następnego rozdziału w którym omówimy ogólną teorię układów zbudowanych z przekaźników dwu i trzypozycyjnych.

3.1 Suma, iloczyn, identyfikacja elementów

Rozważmy obecnie szczególny przypadek struktury rozdzielnej, dla której m = 3 / m-ilość elementów struktury / .