Autor opracował tutaj metodę syntezy i analizy takich układów przekaznikowo-stykowych w których część wejść przyjmuje dwa stany wyróżnione , pozostałe wejscia przyjmują trzy stany wyróżnione, analogicznie część wyjść układu przyjmuje dwa stany wyróżnione pozostałe zaś, trzy stany wyróżnione. Problem ten z punktu widzenie zastosowań / np. automatyka kolejowa/ wydaje się interesujący.

Analogiczną metodę można by zastosować do układów zbudowanych, z elementów o większej ilości stanów wyróżnionych. Z drugiej strony można by się spodziewać, że wyniki te mogą mieć zastosowanie do układów elektronowych przy budowie automatycznych maszyn cyfrowych.

Rozważania przeprowadzone w rozdziałach 2 i 4 pozwalają na rozwiązanie układów zawierających wielokrotne sprzężenia zwrotne. Przykłady takich układów są rozważane w rozdziale 5.

W rozdziale 2 częściowo korzystam z wyników cytowanej pracy H.Greniewskiego, K.Bochenka i R.Marczyńskiego / interpretacja macierzy /, oraz cytowanej pracy Gr.C.Moisila / funkcje rekursywne a sprzężenia zwrotne, opracowane przez Gr.C.Moisila dla układów 2-stanowych/.

Rozdział 1. Algebry m + n elementowe

1.0 Uwagi wstępne

Tematem rozważań tego rozdziału jest algebra skończenie elementowa taka, że część argumentów badanych funkcji przebiega pewien zbiór skończony A, pozostałe argumenty inny zbiór skończo[ny] B, zaś wartości funkcji należą do zbioru A.

Pokażemy, że jeżeli na zbiorze A jest określona struktura rozdzielna, oraz jeżeli na zbiorze B jest zdefiniowana tzw. funkcja porównawcza o wartosciach należących do zbioru A, to przy pomocy działań struktury i funkcji porównawczych można zbud[o]wać wszystkie funkcje f k + l -zmiennych spełniające koniunkcje trzech warunków poniższych:

1. wartości funkcji f należą zawsze do zbioru A,
2. pierwsze k-zmiennych przebiega zbiór A,
3. pozostałe l-zmiennych przebiegają zbiór B.

W związku z tym zostaje wprowadzone pojęcie funkcji uniwersalnej. Pokażemy, że funkcję określoną na pozważanej parze zbiorów można przedstawić przez funkcje uniwersalną, o odpowiednio dobranych parametrach, przyczem ~~zbiór~~ dobór ten jest jednoznaczn

1.1. Algebra m-elementowej struktury rozdzielnej

Podamy aksjomaty skończonej struktury rozdzielnej, a następnie w oparciu o przyjętą aksjomatykę dowiedziemy kilku podstawowych twierdzeń dla dalszych rozważań.

Wyrażenia pierwotne:

1/ stałe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$

2/ zmienne $x, y, z, \ldots, c, \gamma, \ldots$ przebiegające zbiór $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$

3/ funkcje $x \cup y$ / suma /

$x \cap y$ /iloczyn /

$x \underset{(1)}{:} y$ / identyfikacja /

Tezy pierwotne / postulaty /:

1.101 $\alpha_i \neq \alpha_j$ jeżeli $i \neq j$ dla $i, j = 1, 2, \ldots, m$

1.102a $x \cap \alpha_m = x$ 1.102b $x \cup \alpha_1 = x$

1.103a $x \cap \alpha_1 = \alpha_1$ 1.103b $x \cup \alpha_m = \alpha_m$

1.104a $x \cap y = y \cap x$ 1.104b $x \cup y = y \cup x$

1.105a $x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$ 1.105b $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$

1.106a $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ 1.106b $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$

1.107a jeżeli $x = y$ to $x \underset{(1)}{:} y = \alpha_m$

1.108 jeżeli $x \neq y$ to $x \underset{(1)}{;} y = \alpha_1$

Udowodnimy obecnie dwa lematy tzw. prawa tautologi.

1.111 Lemat $x \cup x = x$

Dowód

$$x \cup x = (x \cap \alpha_m) \cup (x \cap \alpha_m)$$ / na mocy 1.102a /

$$= x \cap (\alpha_m \cup \alpha_m)$$ / na mocy 1.106a/

$$= x \cap \alpha_m$$ / na mocy 1.103b /

$$= x$$ / na mocy 1.102a /

c.b.d.o.

1.112 Lemat $x \cap x = x$

Dowód

$$x \cap x = (x \cup \alpha_1) \cap (x \cup \alpha_1)$$ / na mocy 1.102 b /

$$= x \cup (\alpha_1 \cap \alpha_1)$$ / na mocy 1.106 b/

$$= x \cup \alpha_1$$ / na mocy 1.103 a /

$$= x$$ / na mocy 1.102 b /

c.b.d.o

Przyjmiemy następujące definicje:

1.113 $$\bigwedge_{j=1}^{1} x_j \underset{df}{=} x_1$$

$$\bigwedge_{t=1}^{q} x_t \underset{df}{=} \Big(\bigwedge_{j=1}^{q-1} x_j\Big) \cap x_q \qquad q = 2,3,\ldots$$

1.114 $$\bigvee_{j=1}^{1} x_j \underset{df}{=} x_1$$

$$\bigvee_{t=1}^{q} x_t \underset{df}{=} \Big(\bigvee_{j=1}^{q-1} x_j\Big) \cup x_q \qquad q = 2,3,\ldots$$

1.115 $A \underset{df}{=} \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\}$

1.116 <u>Definicja</u>. Przez funkcę uniwersalną jednej zmiennej przebiegającą m-elementowy zbiór A, o wartościach ze zbioru A, będziemy rozumieli funkcję od jednej zmiennej i m-parametrów przebiegających w zbiór A, o wartościach należących do zbioru A, taką że podstawiając odpowiednie wartości na parametry, możemy otrzymać wszystkie przekształcenia zbioru A w swoje podzbiory.

1.120 $(x * c_1, \ldots, c_m) = \bigvee_{j=1}^{m} [c_j \cap (x \underset{(1)}{:} \alpha_j)]$ gdzie $c_j \in A$ / dla $j = 1, 2, \ldots, m$ /

1.121 <u>Metatwierdzenie.</u> Definiendum definicji 1.120 jest funkcją uniwersalną jednej zmiennej dla zbioru A.

<u>Dowód</u>. Dowód przeprowadzimy w dwóch częściach, po pierwsze pokażemy, że dla każdej jednoargumentowej funkcji g, określonej na zbiorze A istnieje taki układ stałych $c_1, \ldots, c_m$ że

$$g(x) = (x * c_1, \ldots, c_m)$$

Niech $g(\alpha_j) = \gamma_j$ gdzie $j = 1, \ldots, m$

Podstawmy do wyrażenia [redacted] $(x * c_1, \ldots, c_m)$

$$c_j = \gamma_j \qquad (x * \gamma_1, \ldots, \gamma_m)$$

Niech [redacted] $x = \alpha_k$ gdzie $k = 1, \ldots, m$

$$(x * \gamma_1, \ldots, \gamma_m) = \bigvee_{j=1}^{m} [\gamma_j \cap (\alpha_k \underset{(1)}{:} \alpha_j)] = \gamma_k \cap \alpha_m = \gamma_k$$

Po drugie okażemy, że dla każdej funkcji g określonej na zbiorze A istnieje dokładniee jeden układ stałych $c_1, c_2, \ldots, c_m$ takich że

$$g(x) = (x * c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

Przypuscmy, że

$$g(x) = (x * c_1, \ldots, c_m)$$

oraz

$$g(x) = (x * c'_1, \ldots, c'_m)$$

przyczym istnieje conajmniej jedno takie naturalne k $(1 \leq k \leq m)$ że

$$c_k \neq c'_k$$

Podstawmy $x = \alpha_k$

$$(\alpha_k * C_1,\ldots,C_m) = \bigvee_{j=1}^{m}\left[C_j \cap (\alpha_k \underset{(1)}{:} \alpha_j)\right] = C_k$$

z drugiej strony

$$(\alpha_k * C'_1,\ldots,C'_m) = \bigvee_{j=1}^{m}\left[C'_j \cap (\alpha_k \underset{(1)}{:} \alpha_j)\right] = C'_k$$

skąd

$$(x * C_1,\ldots,C_m) \neq (x * C'_1,\ldots,C'_m)$$

co sprzeczne z założeniem. **c.b.d.o.**

Wprowadzmy definicję:

1.130 Definicja. Przez funkcję uniwersalną p-zmiennych przebiegających m-elementowy zbiór A, o wartościach ze zbioru A, będziemy rozumieli funkcję od p-zmiennych i m^p- parametrów przebiegających zbiór A, o wartosciach należących do zbioru A, taką że podstawiając odpowiednie wartości na parametry , możemy otrzymać wszystkie przekształcenia p-krotnego iloczynu kartezjańskiego zbioru A, w podzbiory zbioru A.

1.140 $$(x_1,\ldots,x_p * \| C_{j_1,\ldots,j_p} \|) \underset{df}{=} \bigvee_{j_1,\ldots,j_p=1}^{m} \left\{ C_{j_1,\ldots,j_p} \cap \left[\bigwedge_{l=1}^{p} (x_l \underset{(1)}{:} \alpha_{j_l}) \right] \right\}$$

gdzie $C_{j_1,\ldots,j_p} \in A$ dla $j_i = 1,\ldots,m$ $i = 1,\ldots,p$

$\| C_{j_1,\ldots,j_p} \|$ - macierz prostokątna o jednym wierszu i m^p-kolumnach.

1.141 Metatwierdzenie. Definiendum definicji 1.140 jest funkcją uniwersalną p-zmiennych, dla funkcji p-zmiennych zbioru A.

Dowód. Dowód przeprowadzimy analogicznie jak w wypadku funkcji jednej zmiennej. Niech będzie dana p-argumentowa funkcja g określona na zbiorze A. Pokażemy, że istnieje taka macierz stałych $\| C_{j_1,\ldots,j_p} \|$, że

$$g(x_1,\ldots,x_p) = (x_1,\ldots,x_p * \| C_{j_1,\ldots,j_p} \|)$$

Niech

$$g(\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_p}) = \gamma_{k_1,\ldots,k_p}$$ dla $k_i = 1,\ldots,m$ $i = 1,\ldots,p$

gdzie

$$\gamma_{k_1,\ldots,k_p} \in A$$

Podstawmy do wyrażenia $(x_1,\ldots,x_p * \| C_{j_1,\ldots,j_p} \|)$

Za zmienną $C_{j_1,\ldots,j_p}$ odpowiednio wyrażenie $\gamma_{j_1,\ldots,j_p}$

W wyniku otrzymujemy $(x_1, \dots, x_p * \| \gamma_{j_1, \dots, j_p} \|)$

Niech

$$x_i = \alpha_{k_i} \qquad i = 1, \dots, p \quad k_i = 1, \dots, m$$

$$(\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_p} * \| \gamma_{j_1, \dots, j_p} \|) = \bigvee_{j_1, \dots, j_p = 1}^{m} \left\{ \gamma_{j_1, \dots, j_p} \cap \left[\bigwedge_{l=1}^{p} (\alpha_{k_l} : \alpha_{j_l}) \right] \right\} = \gamma_{k}$$

Przypuscmy, że

$$g(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p * \| C_{j_1, \dots, j_p} \|)$$

$$g(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p * \| C'_{j_1, \dots, j_p} \|)$$

przyczem istnieje conajmniej jeden układ liczb naturalnych k_i $(i = 1, \dots, p)$, $(1 \leq k_i \leq m)$, że $C_{k_1, \dots, k_p} \neq C'_{k_1, \dots, k_p}$

Podstawmy

$$x_i = \alpha_{k_i}$$

$$(\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_p} * \| C_{j_1, \dots, j_p} \|) = C_{k_1, \dots, k_p}$$

z drugiej strony

$$(\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_p} * \| C'_{j_1, \dots, j_p} \|) = C'_{k_1, \dots, k_p}$$

skąd

$$(x_1, \dots, x_p * \| C_{j_1, \dots, j_p} \|) \neq (x_1, \dots, x_p * \| C'_{j_1, \dots, j_p} \|)$$

co jest sprzeczne z założeniem **c.b.d.o.**

1.2 Algebra m-elementowej struktury rozdzielnej i n-elementowego zbioru dowolnego

Do aksjomatyki przyjętej w paragrafie 1.1. dołączmy następujące:

Wyrażenia pierwotne:

1°/ stałe $\beta_1, \dots, \beta_m$

2°/ zmienne $a, b, c, \dots$ przebiegające zbiór $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$

3°/ funkcja $a : b$ /identyfikacja druga/
(2)

Tezy pierwotne / postulaty /:

1.201 $\beta_i \neq \beta_j$ jeżeli $i \neq j$ dla $i, j = 1, \dots, m$

1.202 jeżeli $a=b$, to $a \underset{(2)}{:} b = \alpha_m$

1.203 jeżeli $a \neq b$, to $a \underset{(2)}{:} b = \alpha_1$

Wprowadzmy definicje:

1.205 Definicja. Przez funkcję uniwersalną p+q-zmiennych, z których p przebiega zbiór m-elementowy A, zaś q przebiega zbiór n-elementowy B, o wartosciach ze zbioru A, będziemy rozumieli funkcję od p+q-zmiennych i m^p+n^q -parametrów / parametry przebiegają z zbiór A /, taką że podstawiając odpowiednie wartości na parametry, możemy otrzymać wszystkie przekształcenia p + q -krotnieg iloczynu kartezjańskiego zbiorów A i B / p-krotniego zbioru A i q-krotnego zbioru B / w podzbiory zbioru A.

1.204 $B \underset{df}{=} \{\beta_1,\dots,\beta_n\}$

1.210 $(x_1,\dots,x_p; a_1,\dots,a_q * \|C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|) \underset{df}{=}$

$$\bigvee_{j_1,\dots,j_p=1}^{m} \bigvee_{i_1,\dots,i_q=1}^{n} \left\{ C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cap \left[\bigwedge_{l=1}^{p} (x_l \underset{(1)}{:} \alpha_{j_l}) \right] \cap \left[\bigwedge_{k=1}^{q} (a_k \underset{(2)}{:} \beta_{i_k}) \right] \right\}$$

gdzie $C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \in A$. $\|C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|$ -macierz prostokątna o m^p-wierszach i n^q-kolumnach.

1.211 Metatwierdzenie. Definiendum definicji 1.210 jest funkoją uniwersalną p+q-zmiennych z których p-przebiega zbiór A, g-przebiega zbiór B , o wartościach należących do zbioru A, dla funkcji p+q-zmiennych z których p-przebiega zbiór A , q-przebiega zbiór B, a wartości należą do zbioru A.

Dowód. Dowód przeprowadzimy jak dla metatwierdzenie 1.141 Niech będzie dana funkcja g od p+q-argumentów o wartościach ze zbioru A / p-argumentów ze zbioru A, q-argumentów ze zbioru B / pokażemy, że istnieje taka macierz stałych $\|C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|$, że

$$g(x_1,\dots,x_p; a_1,\dots,a_q) = (x_1,\dots,x_p; a_1,\dots,a_q * \|C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|)$$

Niech $g(\alpha_{h_1},\dots,\alpha_{h_p}; \beta_{\tau_1},\dots,\beta_{\tau_q}) = \gamma^{\tau_1,\dots,\tau_q}_{h_1,\dots,h_p}$

gdzie $\gamma^{\tau_1,\dots,\tau_q}_{h_1,\dots,h_p} \in A$ / dla $\tau_\nu = 1,\dots,n$ $\nu=1,\dots,q$ $h_\mu = 1,\dots,m$ $\mu=1,\dots,p$ /

podstawmy do wyrażenia

$$(x_1,\dots,x_p; a_1,\dots,a_q * \|C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|)$$

za zmienne $C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}$ odpowiednie wyrażenia $\gamma^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}$

W wyniku otrzymamy $(x_1,\dots,x_p; a_1,\dots a_q * \| \gamma^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|)$

Niech $x_\mu = \alpha_{h_\mu}$ / dla $\mu = 1,2,\dots,p$ /

$a_\nu = \beta_{r_\nu}$ / dla $\nu = 1,2,\dots,q$ /

$$(\alpha_{h_1},\dots,\alpha_{h_p}; \beta_{r_1},\dots,\beta_{r_q} * \| \gamma^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|) =$$

$$\bigvee^{m}_{j_1,\dots,j_p=1} \bigvee^{n}_{i_1,\dots,i_q=1} \left\{ \gamma^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cap \left[\bigwedge_{l=1}^{p} (\alpha_{h_{l(1)}} \vdots \alpha_{j_l})\right] \cap \left[\bigwedge_{k=1}^{q} (\beta_{r_{k(2)}} \vdots \beta_{i_k})\right]\right\} = \gamma^{r_1,\dots,r_q}_{h_1,\dots,h_p}$$

Przypuśćmy, że

$$g(x_1,\dots,x_p; a_1,\dots,a_q) = (x_1,\dots,x_p; a_1,\dots,a_q * \| C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|)$$

$$g(x_1,\dots,x_p; a_1,\dots,a_q) = (x_1,\dots,x_p; a_1,\dots,a_q * \| C'^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|)$$

przyczem istnieje conajmniej jeden z pośród układów liczb naturalnych h_μ / dla $\mu = 1,2,\dots,p$ /, / $1 \leq h_\mu \leq m$ /, r_ν / dla $\nu = 1,2,\dots,q$ /, / $1 \leq r_\nu \leq m$ / taki, że

$$C^{r_1,\dots,r_q}_{h_1,\dots,h_p} \neq C'^{r_1,\dots,r_q}_{h_1,\dots,h_p}$$

Podstawmy

$$x_\mu = \alpha_{h_\mu}$$
$$a_\nu = \beta_{r_\nu}$$

$$(\alpha_{h_1},\dots,\alpha_{h_p}; \beta_{r_1},\dots,\beta_{r_q} * \| C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|) = C^{r_1,\dots,r_q}_{h_1,\dots,h_p}$$

z drugiej strony

$$(\alpha_{h_1},\dots,\alpha_{h_p}; \beta_{r_1},\dots,\beta_{r_q} * \| C'^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|) = C'^{r_1,\dots,r_q}_{h_1,\dots,h_p}$$

skąd

$$(x_1,\dots,x_p; a_1,\dots,a_q * \| C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|) \neq (x_1,\dots,x_p; a_1,\dots,a_q * \| C'^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|)$$

co sprzeczne z założeniem. c.b.d.o.

1.3 Algebra n-elementowej struktury rozdzielnej i n-elementowego zbioru dowolnego - dokończenie

Zajmiemy się obecnie kilkoma własnościami funkcji uniwersalnych wprowadzonych w paragrafie 1.2.

1.31 Twierdzenie.

$$(x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q*\|C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{\,j_1,\dots,j_p}\|)\cap(x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q*\|C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{\,j_1,\dots,j_p}\|)$$
$$=(x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q*\|C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|)$$

gdzie

$$C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}=C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{\,j_1,\dots,j_p}\cap C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{\,j_1,\dots,j_p}$$

Jak widać z twierdzenia powyższego iloczyn dwóch funkcji uniwersalnych p+q-zmiennych jest funkcją uniwersalną p+q-zmiennych.

Dowód.

$$(x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q*\|C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{\,j_1,\dots,j_p}\|)\cap(x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q*\|C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{\,j_1,\dots,j_p}\|)$$

$$=\left\{\bigvee_{j_1,\dots,j_p=1}^{m}\ \bigvee_{i_1,\dots,i_q=1}^{n}\left\{C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{\,j_1,\dots,j_p}\cap\left[\bigwedge_{l=1}^{p}(x_l\underset{(1)}{:}\alpha_{j_l})\right]\cap\left[\bigwedge_{k=1}^{q}(a_k\underset{(2)}{:}\beta_{i_k})\right]\right\}\right\}\cap$$

$$\cap\left\{\bigvee_{j_1,\dots,j_p=1}^{m}\ \bigvee_{i_1,\dots,i_q=1}^{n}\left\{C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{\,j_1,\dots,j_p}\cap\left[\bigwedge_{l=1}^{p}(x_l\underset{(1)}{:}\alpha_{j_l})\right]\cap\left[\bigwedge_{k=1}^{q}(a_k\underset{(2)}{:}\beta_{i_k})\right]\right\}\right\}=$$

$$=\bigvee_{j_1,\dots,j_p=1}^{m}\ \bigvee_{i_1,\dots,i_q=1}^{n}\left\{C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{\,j_1,\dots,j_p}\cap C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{\,j_1,\dots,j_p}\cap\left[\bigwedge_{l=1}^{p}(x_l\underset{(1)}{:}\alpha_{j_l})\right]\cap\left[\bigwedge_{k=1}^{q}(a_k\underset{(2)}{:}\beta_{i_k})\right]\right\}$$

$$=(x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q*\|C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}\|)$$

~~[illegible]~~ gdzie

$$C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} = C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cap C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}$$

c.b.d.o.

1.32 Twierdzenie.

$$(x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q * \| C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \|) \cup (x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q * \| C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \|) = (x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q * \| C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \|)$$

gdzie

$$C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} = C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cup C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}$$

Jak widać z powyższego twierdzenia suma dwóch funkcji uniwersalnych p+q-zmiennych jest funkcją uniwersalną p+q-zmiennych.

Dowód.

$$(x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q * \| C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \|) \cup (x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q * \| C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \|) =$$

$$= \left\{ \bigvee_{j_1,\dots,j_p=1}^{m} \bigvee_{i_1,\dots,i_q=1}^{n} \left\{ C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cap \left[\bigwedge_{l=1}^{p} (x_l \underset{(1)}{:} \alpha_{j_l}) \right] \cap \left[\bigwedge_{k=1}^{q} (a_k \underset{(2)}{:} \beta_{i_k}) \right] \right\} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \bigvee_{j_1,\dots,j_p=1}^{m} \bigvee_{i_1,\dots,i_q=1}^{n} \left\{ C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cap \left[\bigwedge_{l=1}^{p} (x_l \underset{(1)}{:} \alpha_{j_l}) \right] \cap \left[\bigwedge_{k=1}^{q} (a_k \underset{(2)}{:} \beta_{i_k}) \right] \right\} \right\}$$

$$= \bigvee_{j_1,\dots,j_p=1}^{m} \bigvee_{i_1,\dots,i_q=1}^{n} \left\{ \left[C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cup C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \right] \cap \left[\bigwedge_{l=1}^{p} (x_l \underset{(1)}{:} \alpha_{j_l}) \right] \cap \left[\bigwedge_{k=1}^{q} (a_k \underset{(2)}{:} \beta_{i_k}) \right] \right\}$$

$$= (x_1,\dots,x_p;a_1,\dots,a_q * \| C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \|)$$

gdzie $$C^{i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} = C'^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p} \cup C''^{\,i_1,\dots,i_q}_{j_1,\dots,j_p}$$

c.b.d.o.

1.4 Związki z dwuelementową algebrą Boole'a

1.40 Definicja. $$A_1 \underset{df}{=} \{\alpha_1, \alpha_m\}$$

Jeżeli w układzie aksjomatów podanych w paragrafie 1.1 zastąpimy zbiór A przez A_1, to otrzymamy aksjomatykę 2-elementowej algebry Boole'a, w której $\overline{\gamma}$ dla $\gamma \in A_1$ wyrażona jest przez identyfikację.

1.41 Definicja. $$\overline{\gamma} \underset{df}{=} \gamma \underset{(1)}{:} \alpha_1$$

czyli $\overline{\alpha}_1 = \alpha_m$ oraz $\overline{\alpha}_m = \alpha_1$

Funkcja $x \underset{(1)}{:} y$ dla $x, y \in A$ przyjmuje wartości ze zbioru A_1, wobec tego możemy podstawić

1.42 $$\gamma = x \underset{(1)}{:} y$$

wówczas

1.43 $$\overline{x \underset{(1)}{:} \alpha_i} = \bigvee_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (x \underset{(1)}{:} \alpha_j)$$

skąd

1.44 $$\overline{(x \underset{(1)}{:} \alpha_i)} \cup (x \underset{(1)}{:} \alpha_i) = \alpha_m$$

1.45 $$\overline{(x \underset{(1)}{:} \alpha_i)} \cap (x \underset{(1)}{:} \alpha_i) = \alpha_1$$

Pokażemy w dalszych rozważaniach, że ten związek z 2-elementową algebrą Boole'a okazuje się bardzo przydatny.