Funkcje f_q / $q = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots m_2$ / rozważane w 2.34 oraz 2.35m są zwykłymi funkcjami dotychczas rozważanymi w rozdziale 1. W ten sposób matematycznego opisu układów z tzw. liniami opóźniającymi, oraz z tzw. sprzężeniami zwrotnymi dokonujemy przy pomocy funkcji rozważanych w rozdziale 1, narzucając im tzw. warunki początkowe i końcowe.

Rozdział 3. Algebra trzyelementowa

3.0 Uwagi wstępne

Tematem tego rozdziału jest algebra trzyelementowa, jej własności i jej interpretacja przekaźnikowo-stykowa. Rozważana tutaj trzyelementowa algrebra jest odpowiednikiem Łukasiewicza trój-wartosciowego rachunku zdań [9] . Algebrę tą wprowadzamy dla jednolitości rozważań, zamiast mówić o trójwartosciowym rachunku zdań.

Funkcje uniwersalne zostały wyrażone w sposób analogiczny jak w rozdziale 1,przy pomocy trzech funkcji podstawowych, sumy , iloczynu i identyfikacji.

Interpretacja przekaźnikowo-stykowa kilku funkcji trójwartosciowego rachunku zdań została podana po raz pierwszy przez M.Greniewskiego i Gr.C. Moisila [7] . Pokazane w tym rozdziale układy / odpowiadające funkcjom algebry trójelementowej / jak dotąd nie posiadają zastosowań praktycznych ponieważ w istniejących dotychczas urządzeniach przekaźnikowo-stykowych,nie stosuje się układów zbudowanych z samych przekaźników / elementów / trzypozycyjnych, natomiast stosuje się często urządzenia zbudowane z przekaźników dwu i trzypozycyjnych . Przeprowadzone w tym rozdziale rozważania mają charakter przygotowania dla następnego rozdziału w którym omówimy ogólną teorię układów zbudowanych z przekaźników dwu i trzypozycyjnych.

3.1 Suma, iloczyn,identyfikacja elementów

Rozważmy obecnie szczególny przypadek struktury rozdzielnej, dla której $m = 3$ / m-ilość elementów struktury / .

Wyrażenia pierwotne:

1/ stałe: i, j, k

2/ zmienne: $a, b, c, \ldots$ przebiegające zbiór $\{i, j, k\}$

3/ funkcje: $a+b$ /suma/

$a.b$ /iloczyn /

$a:b$ /identyfikacja /

Tezy pierwotne / postulaty /

3.101 $\quad i \neq j \neq k \neq i$

3.102 $\quad a=i$ lub $a=j$ lub $a=k$

3.103 a. $\quad a+i=a$ $\qquad$ 3.103 b. $\quad a.i=i$

3.104 a. $\quad a+a=a$ $\qquad$ 3.104 b. $\quad a.a=a$

3.105 a. $\quad a+b=b+a$ $\qquad$ 3.105 b. $\quad a.b=b.a$

3.106 a. $\quad j+k=k$ $\qquad$ 3.106 b. $\quad j.k=j$

3.107 Jeżeli $a=b$ to $a:b=k$

3.108 jeżeli $a \neq b$ to $a:b=i$

Dowiedziemy obecnie kilku elementarnych twierdzeń dla sumy, iloczynu i identyfikacji.

3.111 $\quad a.k=a$

1/ Niech $a=i$, wtedy

$a.k=ik$

$=i$ / postulat 3.103 b. /

$=a$ / z założenia /

2/ Niech $a=j$, wtedy

$= j$ / postulat 3.106 b. /

$= a$ / z założenia /

3/ Niech $a = k$, wtedy

$a.k = k.k$

$= k$ / postulat 3.104 b /

$= a$ / z założenia /

Na mocy

$$(a=i) \longrightarrow (a.k = a)$$
$$(a=j) \longrightarrow (a.k = a)$$
$$(a=k) \longrightarrow (a.k = a)$$

oraz aksjomatu 3.107 mamy

$a.k = a$ c.b.d.o.

Powyższe rozważania możemy przedstawić krótko przy pomocy tabelki:

a	$a.k$	$\mathrm{II} = a$
I	II	III
i	i	prawda
j	j	— " —
k	k	— " —

Wszystkie dalej podane twierdzenia można dowieść metodą tabelkową.

Na przykład

3.112 $a + k = k$

a	$a+k$	$\overline{\text{II}}=k$
I	II	III
i	k	prawda
j	k	—"—
k	k	—"—

3.113 $$a+(b+c)=(a+b)+c$$

3.114 $$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

3.115 $$a+b\cdot c=(a+b)(a+c)$$

3.116 $$a\cdot(b+c)=a:b+a\cdot c$$

3.121 $$(a+i)\cdot(a+j)\cdot(a+k)=a$$

3.122 $$a\cdot i+a\cdot j+a\cdot k=a$$

3.130 $$(a:i)+(a:j)+(a:k)=k$$

3.131 $$(a:i)\cdot(a:j)=i$$

3.132 $$(a:i)\cdot(a:k)=i$$

3.133 $$(a:j)\cdot(a:k)=i$$

3.134 $$(a:i)+(b:i)=(a\cdot b):i$$

3.135 $$(a:i)\cdot(b:i)=(a+b):i$$

3.136 $$(a:j)+(b:j)=[(a+b):j]+[(a\cdot b):j]$$

3.137 $$(a:j)\cdot(b:j)=[(a+b):j]\cdot[(a\cdot b):j]$$

3.138 $$(a:k)+(b:k)=(a+b):k$$

3.139 $$(a:k)\cdot(b:k)=(a\cdot b):k$$

3.140 $$(a:c)+(b:c)=[(a+b):c]+[(a\cdot b):c]$$

~~3.141~~

3.141 $$(a:c).(b:c) = [(a+b):c].[(a.b):c]$$

3.142 $$(a:b).(a:c) = (a:c)(b:c)$$

W trójwartościowym rachunku zdań J.Łukasiewicza [9], ważną rolę odgrywa funkcja zwana negacją / symbol a'/

3.150

a	a'
i	k
j	j
k	i

Wprowadzenie negacji pozwoli nam na znaczne ~~uproszczenie~~ szeregu wyrażeń trójelementowej algebry . Można sprawdzić, że negacja wyraża się przy pomocy sumy, iloczynu i identyfikacji w następujący sposób.

3.151 $$a' = (a:i) + j.(a:j)$$

Obecnie przytoczymy kilka twierdzeń dla negacji

3.152 $$(a:i) + (a:j) = (a:k)'$$

3.153 $$(a:i) + (a:k) = (a:j)'$$

3.154 $$(a:j) + (a:k) = (a:i)'$$

3.155 $$(a:b) + c.(a:b)' = (a:b) + c$$

3.156 $$(a:b)' + c.(a:b) = (a:b)' + c$$

3.157 $$a' + b' = (a.b)'$$ / I prawo De Morgana /

3.158 $$(a+b)' = a'.b'$$ /II prawo De Morgana /

3.2 Funkcje uniwersalne

Funkcja uniwersalna jednej zmiennej / patrz paragraf 1.1/ jest w wypadku m = 3 postaci

3.20 $$(a * c_0, c_1, c_2) = c_0.(a:i) + c_1.(a:j) + c_2.(a:k)$$

C_0, C_1, C_2 - parametry na które podstawiamy wartości ze zbioru $\{i,j,k\}$

Jak łatwo widać / patrz 3.150 / negacji odpowiada następujący układ stałych

3.21 $$a' = (a * k, j, i)$$

Znaną funkcję trójwartościowego rachunku zdań J. Łukasiewicza możliwość / symbol Ma / możemy wyrazić przy pomocy funkcji uniwersalnej

3.22 $$Ma = (a * i, k, k)$$

Podstawiając inne wartości na parametry C_0, C_1, C_2 możemy otrzymać każdą z 27 funkcji jednej zmiennej naszej trójwartościowej algebry.

Funkcja uniwersalna dwóch zmiennych / patrz paragraf 1.1 / jest w wypadku m = 3 postaci

3.23 $$\left(a, b * \left\| \begin{matrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} \end{matrix} \right\| \right) =$$

$$C_{00}(a:i)(b:i) + C_{01}(a:i).(b:j) + C_{02}(a:i).(b:k) +$$
$$+ C_{10}(a:j)(b:i) + C_{11}(a:j).(b:j) + C_{12}(a:j).(b:k) +$$
$$+ C_{20}(a:k)(b:i) + C_{21}(a:k).(b:j) + C_{22}(a:k)(b:k)$$

gdzie C_{pq} - / $p,q = 0,1,2$ / parametry na które podstawiamy wartości ze zbioru $\{i,j,k\}$.

Na przykład

3.24 $$a + b = \left(a, b * \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ j & j & k \\ k & k & k \end{matrix} \right\| \right)$$ / suma /

3.25 $$a . b = \left(a, b * \left\| \begin{matrix} i & i & i \\ i & j & j \\ i & j & k \end{matrix} \right\| \right)$$ / iloczyn /

3.26 $$a : b = \left(a, b * \left\| \begin{matrix} k & i & i \\ i & k & i \\ i & i & k \end{matrix} \right\| \right)$$ / identyfikacja /

3.27 $$a \dot{-} b = \left(a, b * \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ j & i & j \\ k & j & i \end{matrix} \right\| \right)$$ / różnica symetryczna /

3.28 $$a \div b = \left(a, b * \left\| \begin{matrix} k & j & i \\ j & k & j \\ i & j & k \end{matrix} \right\| \right)$$ / iloraz symetryczny /

Uwaga. Warto zwrócić uwagę, że zachodzi następujące twierdzenie dla funkcji uniwersalnej, / podajemy dla wypadków funkcji jednej zmiennej /

3.29 $$(a * c_0, c_1, c_2)' = (a * c_0', c_1', c_2')$$

Szczególnym przykładem tego twierdzenia jest znany związek

$$(a \div b)' = (a \div b)$$

3.3 Realizacja przekaźnikowo-stykowa pewnych funkcji algebry trójelementowej

Zajmiemy się obecnie przyporządkowaniem stanom obwodu elektrycznego elementów zbioru $\{i, j, k\}$, a następnie znajdziemy układy stykowe realizujące pewne podstawowe funkcje naszej algebry.

W automatyce kolejowej znajduje duże zastosowanie przekaźnik trójpołożeniowy / na prąd stały tz.w. przekaźnik polaryzowany na zmienny tzw. przekaźnik indukcyjny/. Przekaźnik polaryzowany posiada wyróżnione trzy stany, mianowicie

1/ brak przepływu prądu

2/ przepływ prądu przez uzwojenie w jednym kierunku

3/ przepływ prądu przez uzwojenie w przeciwnym kierunku do stanu 2/ x/

W naszych rozważaniach ograniczymy się do trzypołożeniowych przekaźników polaryzowanych, w wypadku przekaźników indukcyjnych wystarczy zmienić w otrzymanych przez nas schematach źródło prądu stałego na źródło prądu zmiennego.

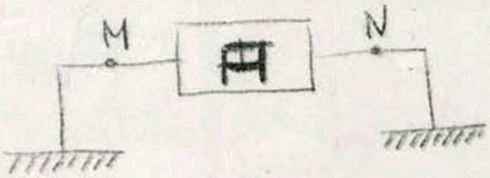
---

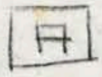
x/ Analogicznie trzy stany posiada przekaźnik indukcyjny prądu zmiennego

1'/ brak przepływu prądu

2'/ przepływ prądu zmiennego przez uzwojenie przekaźnika

3'/ przepływ prądu zmiennego przez uzwojenie przekaźnika przesunięty w fazie w stosunku do stanu 2'/.



 - przekaźnik polaryzowany trzypołożeniowy.

rys. 3.301

Oznaczmy stany obwodu przekaźnika A przedstawionego na rys. 3.301 przez φ.

a/ jeżeli brak przepływu prądu pomiędzy punktami M, N / rys. 3.301 / to $\varphi = i$

b/ jeżeli prąd przepływa od punktu M do punktu N / rys. 3.301/ to $\varphi = j$

c/ jeżeli prąd przepływa od punktu N do punktu M / rys. 3.301/ to $\varphi = k$

Przekaźnik A posiada styki trzech rodzajów

a/ styki zamknięte gdy stan obwodu przekaźnika A / rys. 3.301/ $\varphi = i$ oznaczymy je przez $a:i$

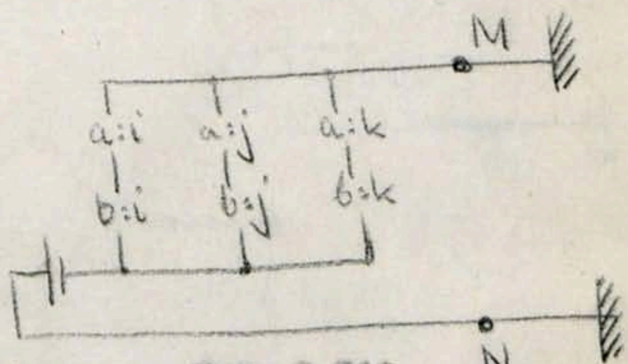
b/ styki zamknięte gdy stan obwodu przekaźnika A / rys. 3.301/ $\varphi = j$ oznaczymy je przez $a:j$

c/ styki zamknięte gdy stan obwodu przekaźnika A / rys. 3.301/ $\varphi = k$ oznaczymy je przez $a:k$

3.31 Identyfikacja.

$a:b$

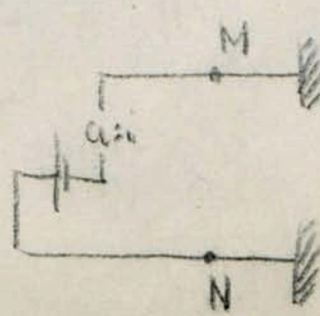
b\a	i	j	k
i	k	i	i
j	i	k	i
k	i	i	k



rys. 3.311

w szczególności

a	a:i
i	k
j	i
k	i

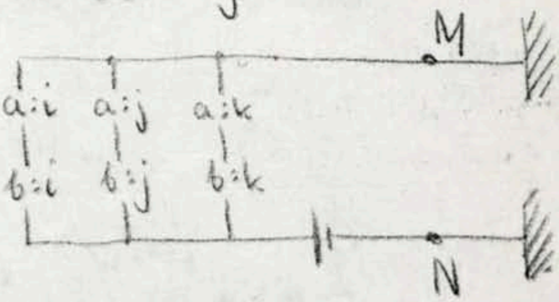


rys. 3.312

analogicznie możemy zrealizować funkcję $a:j$ oraz $a:k$

$j\cdot(a:b)$

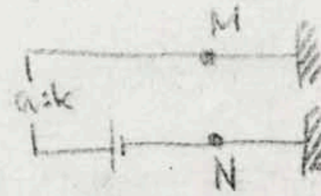
$b \backslash a$	i	j	k
i	j	i	i
j	i	j	i
k	i	i	j



rys. 3.313

w szczególności

a	$j\cdot(a:k)$
i	i
j	i
k	j



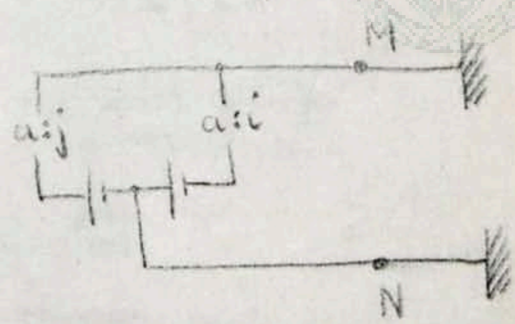
rys. 3.314

analogicznie możemy zrealizować funkcję $j\cdot(a:i)$ oraz $j\cdot(a:j)$

Dotychczas omówione funkcje i ich odpowiedniki sieciowe przyjmowały tylko dwie z pośród trzech wartości zbioru $\{i,j,k\}$. Obecnie omówimy funkcję które przyjmują wszystkie trzy wartości zbioru $\{i,j,k\}$.

3.32 Negacja.

a	a'
i	k
j	i
k	j

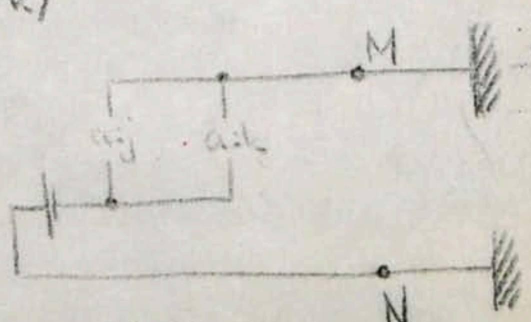


rys. 3.321

w szczególności

$$(a:i)' = (a:j) + (a:k)$$

a	$(a:i)'$
i	i
j	k
k	k



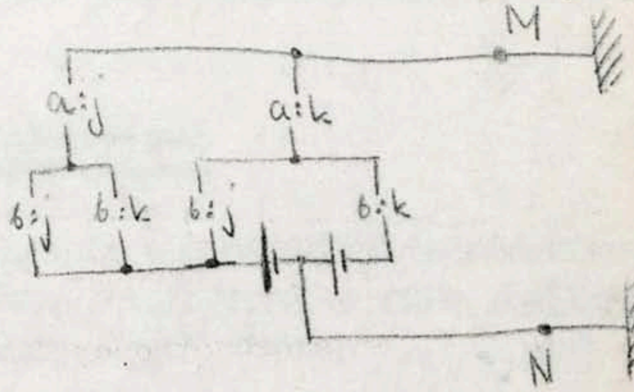
rys. 3.322

analogicznie możemy zrealizować funkcje $(x:j)'$ oraz $(x:k)'$.

3.33 Iloczyn

$a \cdot b$

b\a	i	j	k
i	i	i	i
j	i	j	j
k	0	j	k

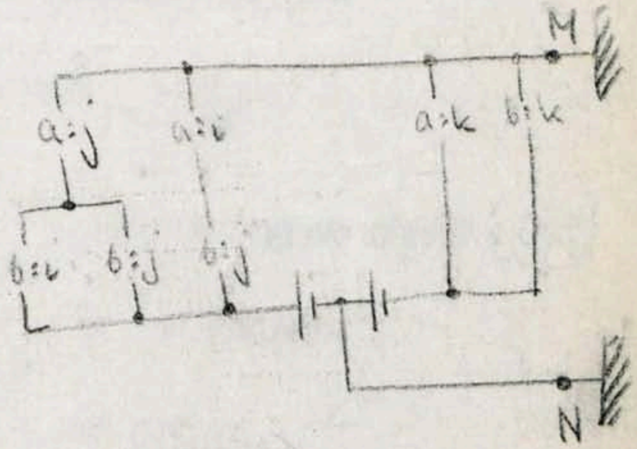


rys. 3.331

3.34 Suma

$a + b$

b\a	i	j	k
i	i	j	k
j	j	j	k
k	k	k	k



rys. 3.341

Rozdział 4. Algebry pięcioelementowe

4.0 Uwagi wstępne

W niektórych urządzeniach automatycznych / np. automatyka kolejowa / stosuje się często elementy / kontakty, przekaźniki / dwupozycyjne i wielopozycyjne / np. w automatyce kolejowej trójpozycyjne /. WE wspomnianej wyżmej automatyce kolejowej występują dwa rodzaje układów o jednym wyjściu, a mianowicie :

1/ układy których część wejść jest dwu-stanowa, część trzy-stanowa o wyjściu dwustanowym ;

2/ układy których część wejsc jest dwustanowa , część trzystanowa o wyjsciu trzystanowym.

W istniejących urządzeniach układy te występują zespołami część wyjsc układów ~~drugiz~~ 2/ - rodzaju jest podłączona na wejcia układów 1/ - rodzaju i odwrotnie.

W tym rozdziale będziemy badali dwie algebry,przy pomocy pierwszej z nich / paragraf 4.1 /, możemy projektować i analizować układy 1/- rodzaju, przy pomocy drugiej z nich / paragraf4.2

możemy projektować i analizować układy 2/ - rodzaju.

Obie te algebry są szczególnym przypadkiem algebr badanych w paragrafach 1.2 i 1.3.

4.1 Algebra 2 + 3 elementowa

Rozważana w niniejszym paragrafie algebra jest dwuelementową / zerojedynkową / algebrą Boole'a , rozszerzoną o pewną funkcje od argumentów przebiegających zbiór trzyelemntowy $\{i, j, k\}$, o wartościach ze zbioru $\{0,1\}$.

Aksjomatykę dwuelementowej algebry Boole'a przyjmiemy za H.Greniewskim, K.Bochenkiem i R.Marczyńskim [5] .

Wyrażenia pierwotne.

1/ stałe $0, 1$

2/ zmienne $x, y, z, \ldots$ przebiegające zbiór $\{0,1\}$

3/ funkcje $\overline{x}$ / dopełnienie /

$x+y$ / suma /

$x.y$ / iloczyn /

Tezy pierwotne / postulaty /

4.110 $0 \neq 1$

4.111 $x=0$ lub $x=1$

4.112 a. $\overline{0}=1$ 4.112 b. $\overline{1}=0$

4.113 a. $0+x=x$ 4.113 b. $1.x=x$

4.114 a. $1+x=1$ 4.114 b. $0.x=0$

4.115 a. $x+y+z=x+(y+z)$ 4.115 b. $x.y.z=x.(y.z)$

Do powyższej aksjomatyki dołączymy następujące :

Wyrażenia pierwotne

1/ stałe i, j, k