

2. TRANSFORMACJE LINIOWE W OBWODACH MASZYN ELEKTRYCZNYCH I KONWENCJE ZAPISÓW

2.1. UWAGI OGÓLNE

Wielkości fizyczne (np. prądy, napięcia, strumienie skojarzone, impedancje) występujące w równaniach równowagi (bilansu sił) opisujących maszynę elektryczną w jednym układzie osi (np. układzie osi naturalnych, którymi np. w maszynach trójfazowych są osie fazowe) transformuje się często na odpowiednie wielkości fizyczne w innym układzie osi (np. układzie osi prostokątnych, występujących w modelu ogólnym maszyny elektrycznej).

Celem tych transformacji jest ułatwienie rozwiązania równań równowagi. Rozwiązuje się równania równowagi w nowym układzie osi, a wielkości uzyskane w ten sposób transformuje się na wielkości fizyczne w pierwotnym układzie osi.

Transformacja liniowa polega na zastąpieniu układu zmiennych (wielkości fizycznych) w równaniach

$$[x_{a,b,c}] = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

układem nowych zmiennych

$$[x_{\alpha,\beta,\gamma}] = \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \\ x_\gamma \end{bmatrix}$$

liniowo związanych ze zmiennymi pierwotnymi zależnością

$$[x_{a,b,c}] = [b][x_{\alpha,\beta,\gamma}]$$

albo

$$[x_{\alpha,\beta,\gamma}] = [b]^{-1}[x_{a,b,c}]$$

przy czym macierz współczynników

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{a\alpha} & b_{a\beta} & b_{a\gamma} \\ b_{b\alpha} & b_{b\beta} & b_{b\gamma} \\ b_{c\alpha} & b_{c\beta} & b_{c\gamma} \end{bmatrix}$$

Liczba zmiennych przy transformacji liniowej nie ulega zmianie. Dla zachowania jednoznacznej odpowiedniości między zmiennymi w dwóch układach wyznacznik

macierzy współczynników musi być różny od zera, czyli musi być

$$\begin{bmatrix} b_{aa} & b_{a\beta} & b_{a\gamma} \\ b_{ba} & b_{b\beta} & b_{b\gamma} \\ b_{ca} & b_{c\beta} & b_{c\gamma} \end{bmatrix} \neq 0$$

Poszczególne wyrazy macierzy współczynników $[b]$ mogą być także funkcjami czasu. Niekiedy dogodnie jest jedną z wielkości w nowym układzie osi wybrać jako tak zwaną *składową zerową* określoną zależnością

$$x_0 = x_\gamma = \frac{1}{3} (x_a + x_b + x_c)$$

wynikającą z przyjęcia wartości współczynników

$$b_{ca} = b_{c\beta} = b_{c\gamma} = \frac{1}{3}$$

Jeżeli wielkościami transformowanymi są prądy, to tak określona składowa zerowa prądu nie ma wpływu na moment elektromagnetyczny maszyny.

Przy jednoczesnym transformowaniu napięć i prądów zachodzi często potrzeba spełnienia *warunku inwariantności mocy*:

|| Moc przy przejściu z zapisu w jednym układzie osi do zapisu w drugim układzie osi nie ulega zmianie.

W układzie osi a, b, c napięcia, prądy i moc są wyrażone wzorami

$$[u_{a,b,c}] = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$[i_{a,b,c}] = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$p_{a,b,c} = [u_{a,b,c}]^T [i_{a,b,c}] = [u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c] \quad (2.3)$$

przy czym macierz transponowana napięć

$$[u_{a,b,c}]^T = [u_a \ u_b \ u_c] \quad (2.4)$$

Z wyrażenia (2.3) wynika, że iloczynem macierzy $[u_{a,b,c}]^T [i_{a,b,c}]$ jest macierz o jednym wierszu i jednej kolumnie, czyli macierz równa własnej transpozycji, z czego wynika

$$[u_{a,b,c}]^T [i_{a,b,c}] = ([u_{a,b,c}]^T [i_{a,b,c}])^T = [i_{a,b,c}]^T ([u_{a,b,c}]^T)^T$$

czyli

$$[u_{a,b,c}]^T [i_{a,b,c}] = [i_{a,b,c}]^T [u_{a,b,c}] \quad (2.5)$$

oraz

$$p_{a,b,c} = [i_{a,b,c}]^T [u_{a,b,c}] = [u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c] \quad (2.6)$$

przy czym macierz transponowana prądów

$$[i_{a,b,c}]^T = [i_a \ i_b \ i_c] \quad (2.7)$$

W układzie osi α, β, γ napięcia, prądy i moc są wyrażone wzorami

$$[u_{\alpha,\beta,\gamma}] = \begin{bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \\ u_\gamma \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$[i_{\alpha,\beta,\gamma}] = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_\gamma \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$p_{\alpha,\beta,\gamma} = [u_{\alpha,\beta,\gamma}]^T [i_{\alpha,\beta,\gamma}] = [u_\alpha \ i_\alpha + u_\beta \ i_\beta + u_\gamma \ i_\gamma] \quad (2.10)$$

przy czym macierz transponowana napięć

$$[u_{\alpha,\beta,\gamma}]^T = [u_\alpha \ u_\beta \ u_\gamma] \quad (2.11)$$

albo

$$p_{\alpha,\beta,\gamma} = [i_{\alpha,\beta,\gamma}]^T [u_{\alpha,\beta,\gamma}] = [u_\alpha \ i_\alpha + u_\beta \ i_\beta + u_\gamma \ i_\gamma] \quad (2.12)$$

przy czym macierz transponowania prądów

$$[i_{\alpha,\beta,\gamma}]^T = [i_\alpha \ i_\beta \ i_\gamma] \quad (2.13)$$

Związki między napięciami i prądami zapisanymi w postaci macierzowej w rozpatrywanych układach osi mogą być wyrażone w postaci

$$\begin{cases} [u_{a,b,c}] = [B] [u_{\alpha,\beta,\gamma}] \\ [u_{\alpha,\beta,\gamma}] = [B]^{-1} [u_{a,b,c}] \end{cases} \quad (2.14)$$

oraz

$$\begin{cases} [i_{a,b,c}] = [C] [i_{\alpha,\beta,\gamma}] \\ [i_{\alpha,\beta,\gamma}] = [C]^{-1} [i_{a,b,c}] \end{cases} \quad (2.15)$$

Macierze $[B]$ i $[C]$ zawierające współczynniki nazywa się *macierzami transformacyjnymi*.

Z warunku inwariantności mocy wynika $p_{a,b,c} = p_{\alpha,\beta,\gamma}$, czyli

$$[u_{a,b,c}]^T [i_{a,b,c}] = [u_{\alpha,\beta,\gamma}]^T [i_{\alpha,\beta,\gamma}]$$

skąd po uwzględnieniu wzorów (2.14) i (2.15)

$$[[B] [u_{\alpha,\beta,\gamma}]]^T [[C] [i_{\alpha,\beta,\gamma}]] = [u_{\alpha,\beta,\gamma}]^T [i_{\alpha,\beta,\gamma}]$$

czyli

$$[u_{\alpha,\beta,\gamma}]^T [B]^T [C] [i_{\alpha,\beta,\gamma}] = [u_{\alpha,\beta,\gamma}]^T [i_{\alpha,\beta,\gamma}]$$

i ostatecznie

$$[B]^T [C] = 1 \quad (2.16)$$

Wzór (2.16) oznacza warunek, jaki muszą spełniać macierz transformacyjna napięć $[B]$ i macierz transformacyjna prądów $[C]$ dla zachowania warunku inwariantności mocy.

Często do transformacji napięć i prądów korzystnie jest wybrać macierz o takich samych współczynnikach, czyli

$$[B] = [C]$$

Wtedy dla zachowania warunku inwariantności mocy należy wybrać macierz transformacyjną spełniającą warunek

$$\text{czyli } \begin{cases} [C]^T [C] = 1 \\ [C]^T = [C]^{-1} \end{cases} \quad (2.17)$$

Występujące w wyrażeniu (2.5) prądy i napięcia mogą oznaczać rzeczywiste wartości tych wielkości. W takim ujęciu wzór (2.5) odnosi się do prądu stałego albo do wartości chwilowych prądu przemiennego.

Przy stosowaniu metody symbolicznej prąd i napięcie są wyrażone liczbami zespolonymi. Wtedy moc czynna jest częścią rzeczywistą iloczynu jednej z tych liczb zespolonych (np. napięcia) i liczby sprzężonej z drugą liczbą zespoloną (np. prądu), czyli

$$\operatorname{Re}([u]^T [i]^*) = \operatorname{Re}([i]^T * [u]) \quad (2.18)$$

a moc bierna równa się

$$\operatorname{Im}([u]^T [i]^*) = \operatorname{Im}([i]^T * [u]) \quad (2.19)$$

Przy transformacji z zachowaniem warunku inwariantności mocy (czynnej i biernej)

$$[i_{\alpha, \beta, \gamma}]^T * [u_{\alpha, \beta, \gamma}] = [i_{a, b, c}]^T * [u_{a, b, c}] \quad (2.20)$$

Wobec zależności (2.15)

$$[i_{a, b, c}]^T = [i_{\alpha, \beta, \gamma}]^T [C]^T \quad (2.21)$$

oraz

$$[i_{a, b, c}]^T * = [i_{\alpha, \beta, \gamma}]^T * [C]^T * \quad (2.22)$$

Po uwzględnieniu równości (2.22) we wzorze (2.20) otrzymuje się

$$[i_{\alpha, \beta, \gamma}]^T * [u_{\alpha, \beta, \gamma}] = [i_{\alpha, \beta, \gamma}]^T * [C]^T * [u_{a, b, c}] \quad (2.23)$$

oraz

$$[u_{\alpha, \beta, \gamma}] = [C]^T * [u_{a, b, c}] \quad (2.24)$$

Oznacza to, że w metodzie symbolicznej przy transformacji prądów z jednego układu do drugiego przez zastosowanie macierzy transformacyjnej $[C]$ dla zachowania warunku inwariantności mocy należy napięcie pomnożyć przez macierz $[C]^T *$, tzn. przez macierz transponowaną współczynników sprzężonych.

Równanie napięć w układzie osi a, b, c można zapisać w postaci

$$[u_{a, b, c}] = [Z_{a, b, c}] [i_{a, b, c}] \quad (2.25)$$

a w układzie osi α, β, γ w postaci

$$[u_{\alpha, \beta, \gamma}] = [Z_{\alpha, \beta, \gamma}] [i_{\alpha, \beta, \gamma}] \quad (2.26)$$

Korzystając z zależności (2.24), (2.25) i (2.15) otrzymuje się

$$[u_{\alpha,\beta,\gamma}] = ([C]^T [Z_{\alpha,b,c}] [C]) [i_{\alpha,\beta,\gamma}] \quad (2.27)$$

Z równań (2.26) i (2.27) wynika wzór

$$[Z_{\alpha,\beta,\gamma}] = [C]^T [Z_{a,b,c}] [C] \quad (2.28)$$

określający sposób transformacji impedancji przy określonym przez macierz $[C]$ sposobie transformacji prądów i przy zachowaniu warunku inwariantności mocy.

W teorii maszyn elektrycznych stosuje się różne transformacje wielkości z jednego układu osi do innego układu osi, czyli różne formy macierzy transformacyjnych. Najczęściej są to transformacje z układu osi naturalnych do układu takich osi, w których rozwiązanie problemu jest łatwiejsze. Odpowiedź otrzymaną transformuje się z powrotem do układu osi naturalnych, aby uzyskać właściwą interpretację fizyczną odpowiedzi.

2.2. TRANSFORMACJA WIELKOŚCI Z UKŁADU TRZECH OSI FAZOWYCH u, v, w DO UKŁADU TRZECH OSI SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH 1, 2, 0

Przyjmuje się, że poszczególne indeksy oznaczają:

- u – wielkość w fazie u ;
- v – wielkość w fazie v ;
- w – wielkość w fazie w ;
- 1 – składową zgodną (pozytywną);
- 2 – składową przeciwną (negatywną);
- 0 – składową zerową.

Macierze napięć i prądów w obydwóch układach osi są określone następująco

$$[u_{u,v,w}] = \begin{bmatrix} u_u \\ u_v \\ u_w \end{bmatrix}; \quad [i_{u,v,w}] = \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$[u_{1,2,0}] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_0 \end{bmatrix}; \quad [i_{1,2,0}] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Wprowadza się pojęcie operatora obrotu a o $2\pi/3$ (czyli o 120°), przy czym

$$\left. \begin{aligned} a &= e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 &= -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^3 &= 1 \\ a^2 + a + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Prądy fazowe można wyrazić za pomocą prądów składowych symetrycznych

$$i_u = i_{1u} + i_{2u} + i_{0u} = i_1 + i_2 + i_0$$

$$i_v = i_{1v} + i_{2v} + i_{0v} = a^2 i_1 + a i_2 + i_0$$

$$i_w = i_{1w} + i_{2w} + i_{0w} = a i_1 + a^2 i_2 + i_0$$

czyli

$$[i_{u,v,w}] = [C] [i_{1,2,0}] \quad (2.32)$$

przy czym

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Wyznacznik macierzy

$$D_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = j3\sqrt{3} \quad (2.34)$$

Macierz $[C]^{-1}$ odwrotna do macierzy $[C]$ ma postać

$$[C]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

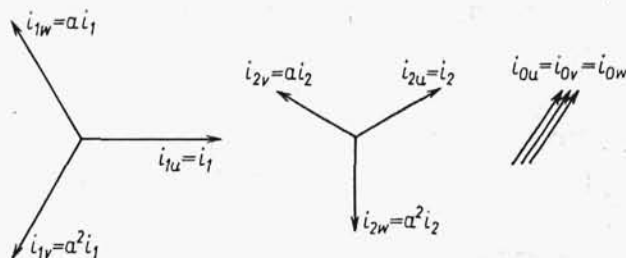
Wtedy

$$[i_{1,2,0}] = [C]^{-1} [i_{u,v,w}] \quad (2.36)$$

a zgodnie ze wzorem (2.24)

$$[u_{1,2,0}] = [C]^T [u_{u,v,w}] \quad (2.37)$$

Przy zastosowaniu tego sposobu transformacji można każdorazowo zastąpić wielkości układu osi fazowych wielkościami układu osi składowych symetrycznych i na odwrót. Na rysunku 2.1 pokazano przykładowo składowe symetryczne prądy.



Rys. 2.1. Składowe symetryczne trójfazowe

Wielkości $a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ są wielkościami sprzężonymi, więc macierz transponowana sprzężona macierzy $[C]$ jest następująca

$$[C]^{T*} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Macierz $[C]^{-1}$, którą należy mnożyć przez macierz prądów układu pierwszego dla otrzymania macierzy prądów układu drugiego, różni się tylko współczynnikiem $1/3$ od macierzy $[C]^{T*}$, którą należy mnożyć przez macierz napięć układu pierwszego dla otrzymania macierzy napięć układu drugiego przy zachowaniu warunku inwariantności mocy.

Celowe jest więc stosowanie takiej samej macierzy przy przekształceniu prądów i napięć, mianowicie macierzy ortogonalnej

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Wtedy

$$[C]^{-1} = [C]^{T*} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

2.3. TRANSFORMACJA WIELKOŚCI POMIĘDZY DWOMA UKŁADAMI OSI NIERUCHOMYCH

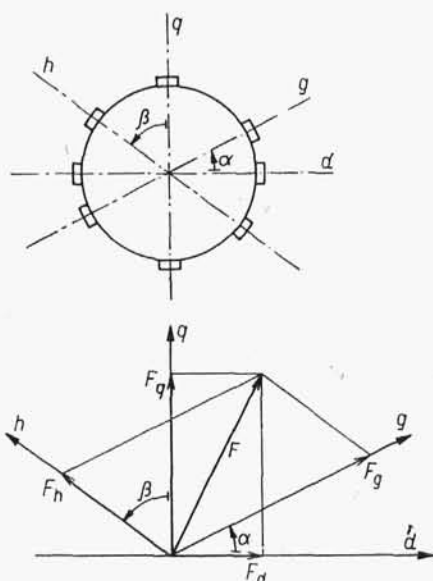
Zasada transformacji wielkości pomiędzy dwoma układami osi nieruchomych, zwanej także *transformacją przesunięcia szczotek*, widoczna jest z rys. 2.2. Maszyna elektryczna z komutatorem z jedną parą biegunów może mieć w ogólnym przypadku dwie pary szczotek ustawionych w osiach g, h , które w ogólnym przypadku nie są względem siebie ustawione prostopadle (elektrycznie). Wprowadza się osie prostopadłe d, q , z których oś d pokrywa się z osią biegunów magnetycznych stojana, a oś q jest ustawiona prostopadle (elektrycznie) do osi d . Napięcie magnetyczne od prądu twornika jest oznaczone literą F . Pomędzy składowymi tego napięcia, skierowanymi zgodnie z poszczególnymi osiami, istnieją związki

$$[F_{d,q}] = [C] [F_{g,h}] \quad (2.41)$$

$$[F_{d,q}] = \begin{bmatrix} F_d \\ F_q \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$[F_{g,h}] = \begin{bmatrix} F_g \\ F_h \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$



Rys. 2.2. Ilustracja transformacji przesunięcia szczotek

Jeżeli $\alpha = \beta$, to

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Wtedy

$$[C]^{-1} = [C]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Analogicznie można przekształcić składowe prądu twornika według zależności

$$[i_{d,q}] = [C] [i_{g,h}] \quad (2.47)$$

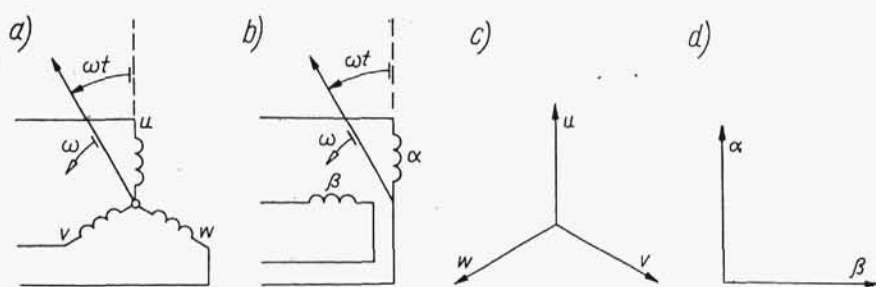
$$[i_{d,q}] = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$$[i_{g,h}] = \begin{bmatrix} i_g \\ i_h \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Pomnożenie lewostronne wektora przez macierz ortogonalną $[C]$, określoną wzorem (2.45), oznacza obrót tego wektora o kąt α w lewo albo obrót osi g, h , czyli obrót szczotek, o kąt α w prawo.

2.4. TRANSFORMACJA WIELKOŚCI Z UKŁADU TRÓJFAZOWEGO OSI u, v, w DO UKŁADU DWUFAZOWEGO OSI $\alpha, \beta, 0$

Na rysunku 2.3 przedstawiono schematy przestrzenne uzwojenia trójfazowego i uzwojenia dwufazowego oraz położenie wektorów wirujących, obrazujących wielkości fizyczne (np. napięcie magnetyczne, prąd itp.). Rzuty wielkości trójfazowych



Rys. 2.3. Układ trójfazowy i dwufazowy: a) schemat przestrzenny uzwojenia trójfazowego i położenie wektora wirującego; b) schemat przestrzenny uzwojenia dwufazowego i położenie wektora wirującego; c) układ wielkości trójfazowych; d) dwufazowych

lub dwufazowych na oś nieruchomą dają wartości chwilowe w poszczególnych fazach.

Poszczególne układy prądów można przedstawić w następującej postaci:

- układ trójfazowy prądów kolejności zgodnej

$$\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} = I_m \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

- układ dwufazowy prądów kolejności zgodnej

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = I_m \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \omega t \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

- układ trójfazowy prądów kolejności przeciwniej

$$\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} = I_m \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

- układ dwufazowy prądów kolejności przeciwniej

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = I_m \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Układy według wzorów (2.51) i (2.53) nie określają prądu zerowego. W układzie dwufazowym prąd zerowy nie ma fizycznego sensu. Brak prądu zerowego w układzie trójfazowym odpowiada stanowi pracy układu trójfazowego z uzwojeniami połączonymi w gwiazdę bez przewodu zerowego. Do analizy układów trójfazowych z uz-

wojeniami połączonymi w trójkąt albo w gwiazdę z przewodem zerowym niezbędne jest wprowadzenie do układu dwufazowego fizycznie fikcyjnego, ale matematycznie określonego prądu zerowego.

Liczba zwojów w jednej fazie uzwojenia trójfazowego wynosi z_3 , a w jednej fazie uzwojenia dwufazowego z_2 . Amplituda napięcia magnetycznego uzwojenia trójfazowego jest proporcjonalna do $\frac{3}{2} z_3 I_m$, a uzwojenia dwufazowego do $z_2 I_m$. Z przyrównania w osiach α oraz β zgodnie z rys. 2.3 napięć magnetycznych wywołanych prądami w układzie dwufazowym i w układzie trójfazowym otrzymuje się

$$\left. \begin{aligned} z_2 i_\alpha &= z_3 i_u + z_3 i_v \cos \frac{2\pi}{3} + z_3 i_w \cos \frac{4\pi}{3} \\ z_2 i_\beta &= z_3 i_v \sin \frac{2\pi}{3} + z_3 i_w \sin \frac{4\pi}{3} \\ z_2 i_0 &= k z_3 i_u + k z_3 i_v + k z_3 i_w \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

skąd

$$\left. \begin{aligned} z_2 i_\alpha &= z_3 i_u - \frac{1}{2} z_3 i_v - \frac{1}{2} z_3 i_w \\ z_2 i_\beta &= \frac{\sqrt{3}}{2} z_3 i_v - \frac{\sqrt{3}}{2} z_3 i_w \\ z_2 i_0 &= k z_3 i_u + k z_3 i_v + k z_3 i_w \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

przy czym k – współczynnik określany z warunków dodatkowych. Traktując prądy w układzie u, v, w jako prądy pierwotne, a prądy w układzie $\alpha, \beta, 0$ jako prądy transformowane, otrzymuje się następujące zależności

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix} = [C]^{-1} \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$[C]^{-1} = \frac{z_3}{z_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ k & k & k \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$[C] = \frac{2}{3} \frac{z_2}{z_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2k} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2k} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2k} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$[C]^T = \frac{2}{3} \frac{z_2}{z_3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2k} & \frac{1}{2k} & \frac{1}{2k} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix}$$

Celowe jest dokonanie jednakowej transformacji prądów i napięć przy zachowaniu warunku inwariantności mocy, co – zgodnie z rozważaniami w p. 2.1 – prowadzi do warunku $[C]^T = [C]^{-1}$. Zatem na podstawie wzorów (2.57) i (2.58) otrzymuje się

$$\frac{z_3}{z_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{z_2}{z_3}$$

$$k = \frac{1}{2k}$$

czyli

$$\frac{z_2}{z_3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wobec tego dla omawianej transformacji macierz ortogonalna ma postać

$$[C] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

albo

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Odpowiednio macierz transponowana i odwrotna mają postać

$$[C]^T = [C]^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

albo

$$[C]^T = [C]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Niekiedy dogodniej jest wyrazić elementy macierzy $[C]$, $[C]^{-1}$ oraz $[C]^T$ w postaci funkcji trygonometrycznych. Wtedy

$$[C] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{2\pi}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{4\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$[C]^{-1} = [C]^T = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \\ \sin 0 & \sin \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

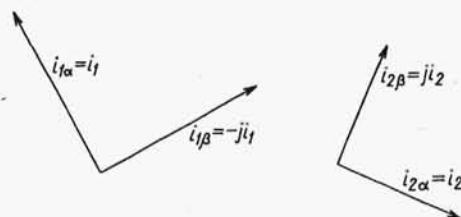
Opisana transformacja wielkości z układu trójfazowego osi do układu dwufazowego osi odpowiada przewinięciu maszyny trójfazowej na maszynę dwufazową. Przy takim przewinięciu:

- liczba zwojów wzrasta w stosunku $\frac{z_2}{z_3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$;
- przekrój przewodu wzrasta w stosunku $\frac{s_2}{s_3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$;
- prąd wzrasta w stosunku $\frac{I_2}{I_3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$;
- napięcie wzrasta w stosunku $\frac{U_2}{U_3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$;

- moc jednej fazy wzrasta w stosunku $\frac{p_{1,2}}{p_{1,3}} = \frac{U_2 I_2}{U_3 I_3} = \frac{3}{2}$;
- liczba faz wzrasta w stosunku $\frac{m_2}{m_3} = \frac{2}{3}$ (tzn. liczba faz maleje);
- moc całkowita pozostaje niezmienną $\frac{m_2 p_{1,2}}{m_3 p_{1,3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$.

2.5. TRANSFORMACJA WIELKOŚCI Z UKŁADU DWUFAZOWEGO OSI α, β DO UKŁADU OSI SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH 1, 2

Na rysunku 2.4 pokazano składowe symetryczne dwufazowe prądu. Związek pomiędzy prądami w rozpatrywanych układach osi ma postać



Rys. 2.4. Składowe symetryczne dwufazowe

$$[i_{\alpha,\beta}] = [C] [i_{1,2}] \quad (2.65)$$

oraz

$$[i_{1,2}] = [C]^{-1} [i_{\alpha,\beta}] \quad (2.66)$$

przy czym

$$[i_{\alpha,\beta}] = \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$[i_{1,2}] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$[C]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$$[C]^{T*} = \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Macierz tej transformacji nie jest macierzą ortogonalną, a więc przy spełnionym warunku inwariantności mocy inaczej są transformowane napięcia, a inaczej prądy. Dla spełnienia warunku identycznej transformacji napięć i prądów należy wybrać macierz ortogonalną

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \quad (2.72)$$