

Analogicznie, jak w przypadku energii potencjalnej, $\dot{\xi}$ oznacza prędkość, a $\left(\frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} + \frac{1}{\dot{\xi}} \frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} \ddot{\xi}\right)$ – siłę całkowitą, przy czym $\frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}}$ oznacza siłę zewnętrzną. Z wyrażenia na energię kinetyczną $E = \frac{1}{2}mv^2$ wynika, że $\frac{\partial E}{\partial v} = mv = p$, czyli

$$\frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} - \text{oznacza pęd}.$$

Wyrażenie $\frac{1}{v} \frac{\partial E}{\partial v} = m$, czyli wyrażenie

$$\frac{1}{\dot{\xi}} \frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} - \text{oznacza masę}.$$

Wyrażenie $\frac{1}{v} \frac{\partial E}{\partial v} a = ma = F$ oznacza siłę inercji, czyli odpowiednio

$$\frac{1}{\dot{\xi}} \frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} \ddot{\xi} - \text{oznacza siłę inercji}.$$

1.4. ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

1.4.1. Energia całkowita

Całkowita energia układu łącznie z energią doprowadzoną z zewnątrz (albo odprowadzoną na zewnątrz) i energią źródeł zewnętrznych jest określona zależnością

$$E(\xi, \dot{\xi}, t) = E_p(\xi) + E_k(\xi, \dot{\xi}) + E_d(\xi, \dot{\xi}, t) \quad (1.38)$$

w której:

– całkowita energia potencjalna

$$E_p(\xi) = \sum_i E_{pu}(\xi_i) + \sum_i E_{pz}(\xi_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.39)$$

przy czym: $\sum_i E_{pu}(\xi_i)$ – energia potencjalna wszystkich magazynów konserwatywnych układu; $E_{pu}(\xi_i)$ – energia potencjalna i -tego magazynu konserwatywnego układu; $\sum_i E_{pz}(\xi_i)$ – energia potencjalna wszystkich magazynów konserwatywnych zewnętrznych zasilających układ; $E_{pz}(\xi_i)$ – energia potencjalna i -tego magazynu konserwatywnego zewnętrznego;

– całkowita energia kinetyczna

$$E_k(\xi, \dot{\xi}) = \sum_i E_{ku}(\xi_i, \dot{\xi}_i) + \sum_i E_{kz}(\xi_i, \dot{\xi}_i) \quad (1.40)$$

przy czym: $\sum_i E_{ku}(\xi_i, \dot{\xi}_i)$ – energia kinetyczna wszystkich magazynów konserwatywnych układu; $E_{ku}(\xi_i, \dot{\xi}_i)$ – energia kinetyczna i -tego magazynu konserwatywnego układu; $\sum_i E_{kz}(\xi_i, \dot{\xi}_i)$ – energia kinetyczna wszystkich magazynów

konserwatywnych zewnętrznych zasilających układ; $E_{kz}(\xi_i, \dot{\xi}_i)$ – energia kinetyczna i -tego magazynu zewnętrznego;
całkowita energia dyssypacji

$$E_d(\xi, \dot{\xi}, t) = \sum_i E_{du}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t) + \sum_i E_{dz}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t) \quad (1.41)$$

przy czym: $\sum_i E_{du}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t)$ – energia dyssypacji wszystkich magazynów dyssypatywnych układu; $E_{du}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t)$ – energia dyssypacji i -tego magazynu dyssypatywnego układu; $\sum_i E_{dz}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t)$ – energia dyssypacji wszystkich magazynów dyssypatywnych zewnętrznych; $E_{dz}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t)$ – energia dyssypacji i -tego magazynu dyssypatywnego zewnętrznego.

Poszczególne rodzaje energii, wchodzące do wzoru (1.38) są scharakteryzowane następującymi zależnościami:

– energia i koenergia potencjalna

$$E_p(\xi_i) = \int_0^{\xi_i} F_i(\xi_i) d\xi_i \quad (1.42)$$

$$E_{po}(\xi_i) = \int_0^{F_i(\xi_i)} \xi_i dF_i(\xi_i) \quad (1.43)$$

przy czym

$$E_p(\xi_i) + E_{po}(\xi_i) = F_i(\xi_i) \xi_i \quad (1.44)$$

– energia i koenergia kinetyczna

$$E_k(\xi_i, \dot{\xi}_i) = \int_0^{p_i(\xi_i, \dot{\xi}_i)} \dot{\xi}_i dp_i(\xi_i, \dot{\xi}_i) \quad (1.45)$$

$$E_{ko}(\xi_i, \dot{\xi}_i) = \int_0^{\dot{\xi}_i} p_i(\xi_i, \dot{\xi}_i) d\dot{\xi}_i \quad (1.46)$$

przy czym

$$E_k(\xi_i, \dot{\xi}_i) + E_{ko}(\xi_i, \dot{\xi}_i) = \dot{\xi}_i p_i(\xi_i, \dot{\xi}_i) \quad (1.47)$$

– energia i koenergia dyssypacji

$$E_d(\xi_i, \dot{\xi}_i, t) = \int_0^{p_{di}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t)} \dot{\xi}_i dp_{di}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t) \quad (1.48)$$

$$E_{do}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t) = \int_0^{\dot{\xi}_i} p_{di}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t) d\dot{\xi}_i \quad (1.49)$$

Powyższe wyrażenia zawierają współrzędną położenia ξ_i i jej pochodną $\dot{\xi}_i$. Drugą współrzędną (pęd p_i albo pęd dyssypacji p_{di}) i jej pochodną (siłę F_i) określa się z charakterystyki danego magazynu energii.

Można wyprowadzić następujące związki, potrzebne do dalszych rozważań:

– odpowiednio do wzoru (1.19)

$$F_i(\xi_i) = \frac{\partial E_p}{\partial \xi_i} \quad (1.50)$$

– odpowiednio do wzoru (1.4)

$$p_i(\xi_i, \dot{\xi}_i) = \frac{\partial E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i} \quad (1.51)$$

Ponadto

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}_i} = \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i^2} \quad (1.52)$$

oraz

$$\frac{\partial E_k}{\partial \xi_i} = \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \xi_i \partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial E_{ko}}{\partial \xi_i} \quad (1.53)$$

ponieważ zgodnie ze słusznym dla ruchu postępowego wyrażeniem

$$E_k = vp - E_{ko}, \quad \text{także ogólnie}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}_i} &= \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i} [\dot{\xi}_i p_i(\xi_i, \dot{\xi}_i)] - \frac{\partial E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i} = \\ &= p_i(\xi_i, \dot{\xi}_i) + \dot{\xi}_i \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i} p_i(\xi_i, \dot{\xi}_i) - p_i(\xi_i, \dot{\xi}_i) = \\ &= \dot{\xi}_i \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i} \frac{\partial E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i} = \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i^2} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial}{\partial \xi_i} [\dot{\xi}_i p_i(\xi_i, \dot{\xi}_i)] - \frac{\partial E_{ko}}{\partial \xi_i} = \\ &= \dot{\xi}_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} [p_i(\xi_i, \dot{\xi}_i)] - \frac{\partial E_{ko}}{\partial \xi_i} = \\ &= \dot{\xi}_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[\frac{\partial E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i} \right] - \frac{\partial E_{ko}}{\partial \xi_i} = \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \xi_i \partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial E_{ko}}{\partial \xi_i} \end{aligned}$$

Analogicznie

$$p_{di}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t) = \frac{\partial E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i} \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{\xi}_i} = \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i^2} \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \xi_i} = \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \xi_i \partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial E_{do}}{\partial \xi_i} \quad (1.56)$$

1.4.2. Zasada zachowania energii z zastosowaniem funkcji Lagrange'a

Zasada zachowania energii z uwzględnieniem energii magazynów zewnętrznych może być przedstawiona formułą

$$E(\xi, \dot{\xi}, t) = \text{const} \quad (1.57)$$

albo formułą

$$\frac{d}{dt} E(\xi_i, \dot{\xi}_i, t) = 0 \quad (1.58)$$

Wzór (1.58) można przekształcić do postaci

$$\left[\frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i} (E_p - E_{ko} - E_{do}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i} (E_p - E_{ko} - E_{do}) \right] \dot{\xi}_i = \frac{\partial E_{do}}{\partial t} \quad (1.59)$$

Przekształcenie wzoru (1.58) do postaci wzoru (1.59).

Ze wzoru (1.58) otrzymuje się

$$\dot{\xi}_i \frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}_i} + \dot{\xi}_i \frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (a)$$

Energia potencjalna i energia kinetyczna nie są jawnymi funkcjami czasu, czyli

$$\frac{\partial E_p}{\partial t} = \frac{\partial E_k}{\partial t} = 0$$

więc zgodnie ze wzorem (1.38)

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E_d}{\partial t}$$

i zamiast wzoru (a) można napisać

$$\dot{\xi}_i \frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}_i} + \dot{\xi}_i \frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial E_d}{\partial t} = 0 \quad (b)$$

Ponieważ

$$E_d + E_{do} = \dot{\xi} p_d$$

wobec tego na podstawie wzoru (1.54)

$$E_d + E_{do} = \dot{\xi} \frac{\partial E_{do}}{\partial \dot{\xi}}$$

czyli

$$\dot{\xi} \frac{\partial E_{do}}{\partial \dot{\xi}} - E_{do} = E_d$$

skąd po zróżniczkowaniu cząstkowym względem t

$$\frac{\partial E_d}{\partial t} = \dot{\xi} \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi} \partial t} - \frac{\partial E_{do}}{\partial t} \quad (c)$$

Ponieważ

$$\frac{\partial E_p}{\partial \dot{\xi}_i} = 0$$

wobec tego

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{\xi}_i}$$

a po uwzględnieniu wzorów (1.52) i (1.55)

$$\dot{\xi}_i \frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}_i} = \dot{\xi}_i \left[\dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i^2} + \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i^2} \right] \quad (d)$$

Oczywista jest zależność

$$\dot{\xi}_i \frac{\partial E}{\partial \dot{\xi}_i} = \dot{\xi}_i \left[\frac{\partial E_p}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{\xi}_i} \right] \quad (e)$$

Podstawiając do wzoru (b) wielkości określone wzorami (c), (d) i (e) otrzymuje się

$$\dot{\xi}_i \left[\frac{\partial E_p}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{\xi}_i} \right] + \dot{\xi}_i \left[\dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i^2} + \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i^2} \right] + \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i \partial t} - \frac{\partial E_{do}}{\partial t} = 0 \quad (f)$$

Do lewej strony równania (f) dodaje się i odejmuje wyrażenia

$$\dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_i} \quad \text{oraz} \quad \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_i} \quad \text{oraz odejmuje się}$$

$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_p}{\partial \dot{\xi}_i} = 0$, w wyniku czego otrzymuje się

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i \left[\frac{\partial E_p}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\xi}_i} - \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{\xi}_i} - \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial E_p}{\partial \dot{\xi}_i} + \ddot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i^2} + \right. \\ \left. + \ddot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_i} + \ddot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i^2} + \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i \partial t} \right] = \frac{\partial E_{do}}{\partial t} \end{aligned} \quad (g)$$

Ponieważ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i} = \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i^2} + \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_i}$$

oraz

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i} = \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i^2} + \dot{\xi}_i \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i \partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial^2 E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i \partial t}$$

wobec tego po uwzględnieniu wzorów (1.53) i (1.56) ze wzoru (g) otrzymuje się

$$\dot{\xi}_i \left[\frac{\partial E_p}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{\partial E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial E_p}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{ko}}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial E_{do}}{\partial \dot{\xi}_i} \right] = \frac{\partial E_{do}}{\partial t} \quad (h)$$

co jest identyczne ze wzorem (1.59).

Wprowadza się nowe pojęcie: *potencjał kinetyczny* (funkcja Langrange'a, lagrangian)

$$L(\xi_i, \dot{\xi}_i, t) = E_p(\xi_i) - E_{ko}(\xi_i, \dot{\xi}_i) - E_{do}(\xi_i, \dot{\xi}_i, t) \quad (1.60)$$

Odpowiednie pochodne cząstkowe potencjału kinetycznego wynoszą

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = \frac{\partial (E_p - E_{ko} - E_{do})}{\partial \dot{\xi}_i} \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_i} = - \frac{\partial (E_{ko} + E_{do})}{\partial \xi_i} \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial E_{do}}{\partial t} \quad (1.63)$$

Korzystając ze wzorów (1.60)÷(1.63) otrzymuje się wzór (1.59) w postaci

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \xi_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial L}{\partial t} \right] \xi_i = 0 \quad (1.64)$$

albo

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} = - \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial L}{\partial t} \quad (1.65)$$

Wzór (1.65) oznacza układ n równań różniczkowych.

Wzory (1.59) i (1.65) wyprowadzono przy użyciu współrzędnych uogólnionych. Dla elementów jakiegoś układu można napisać r równań równowagi oraz m równań więzów istniejących między elementami tego układu. Równania więzów eliminują odpowiednio równania równowagi, więc liczba niezależnych równań równowagi jest równa liczbie stopni swobody

$$n = r - m$$

Przy takiej liczbie równań równowagi nie można już napisać żadnego równania więzów, łączących elementy układu. Współrzędne uogólnione są od siebie niezależne, tzn. nie można napisać równania więzów istniejących między elementami układu, łączących współrzędne uogólnione.

Inaczej mówiąc liczba równań równowagi zapisanych przy użyciu współrzędnych uogólnionych jest już liczbą równań zredukowaną o liczbę równań więzów między elementami.

Redukowanie liczby równań przez równania więzów jest możliwe stosunkowo łatwo w przypadku więzów holonomicznych. Wzory (1.59) i (1.65) mogą być stosowane dla przypadków, kiedy elementy układu są związane więzami holonomicznymi. W przypadku więzów anholonomicznych stan energetyczny układu może być opisany przy użyciu innych, bardziej skomplikowanych funkcji.

Jeśli koenergia dyssypacji nie jest jawną funkcją czasu, to potencjał kinetyczny także nie jest jawną funkcją czasu. Wtedy

$$\frac{\partial E_{do}}{\partial t} = 0 \quad (1.66)$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (1.67)$$

i wzór (1.65) przyjmuje postać

$$\frac{\partial L(\xi_i, \dot{\xi}_i)}{\partial \xi_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\xi_i, \dot{\xi}_i)}{\partial \dot{\xi}_i} = 0 \quad (1.68)$$

Jeśli koenergia dyssypacji nie jest jawną funkcją czasu, to ze wzoru (1.49) wynika, że i pęd dyssypacji p_{di} nie jest jawną funkcją czasu. Wtedy także $\frac{\partial p_{di}}{\partial t} = 0$. Ponieważ zaś $\frac{\partial p_{di}}{\partial t} = F_{di}$, zatem przy $\frac{\partial E_{do}}{\partial t} = 0$ także $F_{di} = 0$, czyli siła dyssypacji jest

równa zero. Stąd wniosek, że warunek $\frac{\partial E_{do}}{\partial t} = 0$ jest spełniony wtedy, kiedy siła dyssypacji (a więc i zjawisko dyssypacji) nie występuje ani w rozpatrywanym układzie, ani w układzie zasilającym.

W rzeczywistych układach zjawisko dyssypacji występuje zawsze, jakkolwiek często może być pomijane, gdyż energia dyssypacji często ma małą wartość w porównaniu z wartością innych rodzajów energii. W obwodach elektrycznych elementem dyssypatywnym jest rezystancja R .

Po zróżniczkowaniu drugiego członu lewej strony równania (1.68) względem czasu otrzymuje się

$$\frac{d}{dt} \frac{L(\xi_i, \dot{\xi}_i)}{\dot{\xi}_i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i^2} \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \partial \dot{\xi}_i} \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial t} \quad (1.69)$$

Po oznaczeniu $\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial t} = v_i$ oraz $\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial t} = \dot{v}_i$ z równania różniczkowego drugiego rzędu (1.68) otrzymuje się układ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i^2} \dot{v}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \partial \dot{\xi}_i} v_i - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} &= 0 \\ \dot{\xi}_i - v_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

Pierwsze równanie układu (1.70) jest równaniem sił. Zmienna $v_i = \dot{\xi}_i$ oznacza prędkość, a $\dot{v}_i = \ddot{\xi}_i$ – przyspieszenie. Można więc następująco zinterpretować współczynniki w tym równaniu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i^2} &- \text{współczynnik inercji;} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i \partial \dot{\xi}_i} &- \text{współczynnik tłumienia;} \\ - \frac{\partial L}{\partial \xi_i} &- \text{siła zewnętrzna.} \end{aligned}$$

Układ równań (1.70) można także sprowadzić do postaci

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi_i^2} \dot{v}_i &= \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i} v_i \right) \\ \dot{\xi}_i &= v_i \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

1.4.3. Zasada najmniejszego działania

Działanie S (wielkość fizyczna) jest zdefiniowane wyrażeniem

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^t L dt \quad (1.72)$$

gdzie L oznacza lagrangian określony wzorem (1.70). Działanie jest więc funkcjonalem lagrangianu. Równanie (1.68) ma postać równania Eulera. W rachunku wariacyjnym równanie Eulera uzyskuje się dzięki lematowi Lagrange'a, jako konieczny warunek, aby funkcjonal S miał wartość minimalną, czyli aby wariacja funkcjonala działania miała wartość równą zero. Stąd zależność

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^t L dt = 0 \quad (1.73)$$

Rozwiązanie zagadnienia polega na znalezieniu funkcji L , czyli całki równania (1.68) mającego postać równania Eulera. Całka L równania Eulera nazywa się *ekstremalą funkcjonala* S (1.72). Zależność wyrażoną wzorem (1.73), sformułowaną przez Hamiltona, nazywa się *zasadą najmniejszego działania*. Głosi ona:

|| W przemianach energetycznych działanie przyjmuje wartość minimalną. Przy założeniu określonym wzorami (1.66) i (1.67) zasada zachowania energii jest równoważna zasadzie najmniejszego działania.

W dokładnej analizie przemian energetycznych w rzeczywistych układach często nie można pomijać zjawiska dyssypacji, a więc nie można przyjmować $F_{di} = 0$, czyli nie można przyjmować warunków określonych wzorami (1.66) i (1.67). Wtedy bardzo często można przyjmować, że siła dyssypacji F_{di} nie jest jawną funkcją czasu (np. w obwodzie elektrycznym $F_d = u = Ri$). W takich przypadkach obowiązuje nie zasada najmniejszego działania, lecz zasada stacjonarnego działania, co jest zgodne z warunkiem $\delta S = \text{const}$.

1.4.4. Zasada zachowania energii z zastosowaniem funkcji Hamiltona

Funkcja Hamiltona, hamiltonian, jest zdefiniowana formalnie jako

$$\mathcal{H}(\xi, p) \stackrel{\text{def}}{=} L(\xi, \dot{\xi}) + \xi p \quad (1.74)$$

Na podstawie zależności (1.60) i (1.47) przy pominięciu zjawiska dyssypacji ($E_{do} = 0$), czyli przy uwzględnieniu warunków (1.66) i (1.67), otrzymuje się

$$\mathcal{H} = E_p + E_k \quad (1.75)$$

to znaczy funkcja Hamiltona zdefiniowana według (1.74) formalnie jako suma funkcji Lagrange'a i iloczynu pędu i prędkości jest równa sumie energii potencjalnej i kinetycznej.

Dla elementów (magazynów) liniowych w wyrażeniu $F = \frac{1}{K_l} x$ dla ruchu postępowego, w wyrażeniu $M = \frac{1}{K_r} \gamma$ dla ruchu obrotowego i dla elementu pojemnościowego (ruchu elektrycznego) w wyrażeniu $u = \frac{1}{C} q$ współczynniki K oraz C są stałe, więc energię potencjalną można wyrazić za pomocą jednej tylko współrzędnej x , otrzymując wyrażenie typu $E_p = \frac{1}{2} \frac{1}{K} \xi^2$. Podobnie wobec stałych

współczynników, wyrażających odpowiednio masę m , moment inercji J i indukcyjność L , energia kinetyczna jest opisana wyrażeniem typu $E_k = \frac{1}{2} \frac{1}{m} p^2$. Energia potencjalna może być wyrażona za pomocą tylko pierwszej współrzędnej (tj. położenia ξ), energia kinetyczna może być wyrażona za pomocą tylko drugiej współrzędnej (tj. pędu p). Funkcja Hamiltona, jako suma energii kinetycznej i potencjalnej może być wyrażona za pomocą tylko współrzędnych ξ oraz p , czyli jako funkcja $\mathcal{H}(\xi, p)$, jak zapis lewej strony wzoru (1.74). Hamiltonian nie jest funkcją pochodnej $\dot{\xi}$, czyli

$$\frac{\partial \mathcal{H}(\xi, p)}{\partial \dot{\xi}} = 0 \quad (1.76)$$

Z różniczkowania wzoru (1.74) względem p otrzymuje się

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \quad (1.77)$$

a z różniczkowania względem ξ otrzymuje się

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} + p$$

skąd

$$p = - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \quad (1.78)$$

Z równań (1.68), (1.74) i (1.77) otrzymuje się

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\mathcal{H} - p\dot{\xi}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}} (\mathcal{H} - p\dot{\xi}) = 0 \quad (1.79)$$

Po wykonaniu różniczkowania w równaniu (1.79) i uwzględnieniu równania (1.77) otrzymuje się bardzo ważne związki

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= - \frac{\partial \mathcal{H}(\xi, p)}{\partial \xi} \\ \dot{\xi} &= \frac{\partial \mathcal{H}(\xi, p)}{\partial p} \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

oraz

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}$$

Ostatnie wyrażenie otrzymuje się z różniczkowania stron równania (1.74) względem ξ .

Związki opisane wzorami (1.80) można wyrazić słownie:

- siła, czyli pochodna pędu względem czasu, jest równa pochodnej energii względem położenia (odległości);
- prędkość, czyli pochodna współrzędnej położenia względem czasu, jest równa pochodnej energii względem pędu.

Jeśli uwzględnia się także energię dyssypacji ($E_d \neq 0$, $E_{do} \neq 0$), czyli jeśli nie wprowadza się ograniczeń (1.66) i (1.67), to funkcja Hamiltona oznacza energię całkowitą, wyrażoną wzorem (1.38). Wtedy zgodnie ze wzorem (1.58)

$$\frac{d\mathcal{H}(\xi, p, t)}{dt} = 0 \quad (1.81)$$

a po uwzględnieniu także (1.80)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= 0 \\ \text{oraz} \quad \dot{\xi}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{aligned} \right\} \quad (1.82)$$

co jest zgodne ze wzorami, wyrażającymi elementarne energie magazynów i ze wzorem (1.80). Wobec tego

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\ \dot{\xi}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{aligned} \right\} \quad (1.83)$$

albo

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i} - \frac{1}{\dot{\xi}_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \\ \dot{\xi}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{aligned} \right\} \quad (1.84)$$

Ponadto słuszne są związki: na podstawie definicji (1.74)

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial L}{\partial \xi_i} = \frac{\partial (E_p - E_{ko} - E_{do})}{\partial \xi_i}$$

oraz

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial E_{do}}{\partial t}$$

1.4.5. Interpretacja równań bilansu sił

Pęd całkowity jest sumą pędu energii kinetycznej p_k i pędu dyssypacji p_d , czyli

$$p = p_k + p_d$$

a pochodna pędu dyssypacji względem czasu jest równa sile dyssypacji, czyli

$$\frac{dp_d}{dt} = F_d$$

Na tej podstawie układ równań (1.84) można zapisać w postaci

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{ki} + F_{di} + \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i} &= 0 \\ \dot{\xi}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \end{aligned} \right\} \quad (1.85)$$

przy czym:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{ki} &- \text{siły inercji od pędu energii kinetycznej;} \\ F_{di} + \frac{1}{\xi_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &- \text{siły tłumienia od dyssypacji;} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_i} &- \text{siły zewnętrzne działające na układ.} \end{aligned}$$

Przechodząc od współrzędnych uogólnionych do współrzędnych dla „ruchu elektrycznego” i ruchu mechanicznego obrotowego na podstawie (1.85) otrzymuje się równania bilansu sił maszyny elektrycznej wirującej w następującej postaci

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [\Psi] + [u_d] + [u] &= 0 \\ \frac{d}{dt} l + M_d + M &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.86)$$

W równaniach (1.86) należy przyjmować poniższą interpretację poszczególnych oznaczeń:

- Ψ – strumień skojarzony, stanowiący w „ruchu elektrycznym” odpowiednik pędu;
- l – kręt, stanowiący w ruchu mechanicznym obrotowym odpowiednik pędu;
- u_d – napięcie elektryczne na rezystancji, stanowiące w „ruchu elektrycznym” odpowiednik siły dyssypacji albo siły tłumienia;
- M_d – moment obrotowy tłumiący od elementu dyssypatywnego stanowiący w ruchu mechanicznym obrotowym odpowiednik siły dyssypacji;
- u – napięcie, traktowane jako suma napięć na elementach pojemnościowych maszyny oraz napięcia na wyjściu, stanowiące w „ruchu elektrycznym” odpowiednik siły;
- M – moment obrotowy, traktowany jako suma momentu na konserwatywnym elemencie potencjalnej energii mechanicznej (np. moment sprężystości wału), momentu elektromagnetycznego i momentu na wyjściu, stanowiący w ruchu mechanicznym obrotowym odpowiednik siły.

Pierwsze równanie układu równań (1.86) jest zapisane w postaci macierzowej, ponieważ w maszynach elektrycznych znajduje się najczęściej kilka obwodów elektrycznych. Drugie równanie tego układu jest zapisane nie w formie macierzowej, lecz zwykłej, ponieważ w maszynie elektrycznej występuje tylko jeden „obwód mechaniczny” tj. wał.

Dla maszyn elektrycznych liniowych otrzyma się odpowiednio układ równań

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [\Psi] + [u_d] + [u] &= 0 \\ \frac{d}{dt} p + F_d + F &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.87)$$

w którym: p – pęd związany z energią kinetyczną (np. $p = mv^2/2$) F_d – siła dyssypacji (tłumienia); F – siła traktowana jako suma siły na konserwatywnym elemencie potencjalnej energii mechanicznej (np. siła elementu sprężystego), siły elektromagnetycznej i siły na wyjściu.

W układach równań (1.86) i (1.87) równania elektryczne są sprzężone z równaniem mechanicznym, tzn. w równaniu elektrycznym występuje przynajmniej jedna współrzędna mechaniczna (np. prędkość wchodzi do wyrażenia $\frac{d}{dt} [\Psi]$), a w równaniu mechanicznym – przynajmniej jedna współrzędna elektryczna (np. w wyrażenie na moment elektromagnetyczny, będący składnikiem wyrażenia M , wchodzi prąd, albo napięcie).

Przy analizie maszyn elektrycznych korzysta się z układu równań (1.86) albo (1.87), przy czym:

(1) Pomija się pojemności, ponieważ przy częstotliwościach przemysłowych prądy płynące przez pojemności są pomijalnie małe w porównaniu z innymi prądami.

(2) Zakłada się niezmiennosc rezystancji, czyli liniowość zależności $[u_d] = [R][i]$.

(3) Wprowadza się pojęcie *napięcia zasilania* albo *napięcia zewnętrznego* $[u_z]$, które z napięciem na zaciskach maszyny $[u]$ we wzorze (1.87) jest związane zależnością $[u] = -[u_z]$.

(4) Wprowadza się oznaczenie $[\Psi] = [L][i]$ (L – macierz indukcyjności). Korzystając z tych oznaczeń otrzymuje się macierz równań elektrycznych w znanej postaci

$$\frac{d}{dt} ([L][i]) + [R][i] = [u_z] \quad (1.88)$$

Z różniczkowania pierwszego członu równania (1.88) otrzymuje się

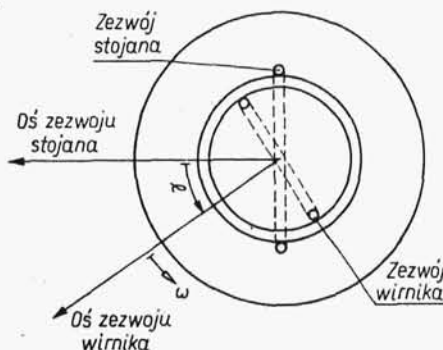
$$\frac{d}{dt} ([L][i]) = [L] \frac{d}{dt} [i] + \left(\frac{d}{dt} [L] \right) \cdot [i] \quad (1.89)$$

Napięcie $[L] \frac{d}{dt} [i]$ nazywa się *napięciem transformacji*, ponieważ jest wywołane zmianą prądu w czasie.

Napięcie $\left(\frac{d}{dt} [L] \right) [i]$ nazywa się *napięciem rotacji*, ponieważ jest wywołane zmianą indukcyjności, w wyniku ruchu (w maszynie wirującej – rotacji) jednego elementu maszyny względem drugiego elementu.

Indukcyjność wzajemna między zezwojem stojana i wirnika, zgodnie z rys. 1.4 jest funkcją kąta γ między osią zezwoju stojana i osią zezwoju wirnika. Kąt γ jest funkcją czasu, przy czym $d\gamma = \omega dt$, czyli $\frac{d\gamma}{dt} = \omega$ (ω – prędkość kątowa). Stąd napięcie rotacji

$$\left(\frac{d}{dt} [L]\right) \cdot [i] = \omega \left(\frac{d}{d\gamma} [L]\right) [i] \quad (1.90)$$



Rys. 1.4. Położenie osi zezwoju wirnika względem osi zezwoju stojana w maszynie symetrycznej magnetycznie

W równaniu mechanicznym kręt

$$l = J\omega$$

Jeśli moment dyssypacji jest liniową funkcją prędkości kątowej, to

$$M_d = D_r \omega \quad (1.91)$$

przy czym D_r – współczynnik tarcia (tłumienia lepkiego) przy ruchu obrotowym.

Często można pomijać moment sprężystości wału. Przez $M_e = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \gamma}$ oznacza się moment elektromagnetyczny wytworzony w maszynie elektrycznej, a przez M_z – moment mechaniczny zewnętrzny na sprzęgle, przez które maszyna elektryczna jest zasilana. Wtedy układ równań opisujących stan dynamiczny maszyny elektrycznej wirującej ma postać

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} ([L] [i]) + [R] [i] &= [u_z] \\ J \frac{d\omega}{dt} + D_r \omega + M_e &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (1.92)$$

albo postać

$$\left. \begin{aligned} [L] \frac{d}{dt} [i] + \omega \left(\frac{d}{d\gamma} [L]\right) [i] + [R] [i] &= [u_z] \\ J \frac{d\omega}{dt} + D_r \omega + M_e &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (1.93)$$

Układ równań opisujących stan dynamiczny maszyny elektrycznej liniowej ma odpowiednio postać

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} ([L] [i]) + [R] [i] &= [u_z] \\ m \frac{dv}{dt} + D_l v + F_e &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (1.94)$$

albo postać

$$\left. \begin{aligned} [L] \frac{d}{dt} [i] + v \left(\frac{d}{dx} [L] \right) [i] + [R] [i] &= [u_z] \\ m \frac{dv}{dt} + D_l v + F_e &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (1.95)$$

przy czym: F_e – siła elektromagnetyczna; F_z – siła zewnętrzna; D_l – współczynnik tarcia (tłumienia lepkiego) przy ruchu liniowym.

W maszynie elektrycznej symetrycznej magnetycznie (jak na rys. 1.4) szczelina między stojanem i wirnikiem jest jednakowa na całym obwodzie. Permeancja dla strumienia magnetycznego przenikającego przez stojan i wirnik jest jednakowa niezależnie od położenia wirnika. Strumień skojarzony między zezwojem w stojanie i zezwojem na wirniku można więc wyrazić następująco

$$\Psi_{sr} = L_{sr} i$$

a indukcyjność wzajemną między zezwojem stojana i wirnika następująco

$$L_{sr} = L_m \cos \gamma$$

przy czym L_m – indukcyjność wzajemna między zezwojem stojana i wirnika przy $\gamma = 0$.

Wtedy wyrażenie na napięcie rotacji ma postać

$$\omega \left(\frac{d}{d\gamma} L \right) i = \omega L_m \sin \gamma \cdot i$$

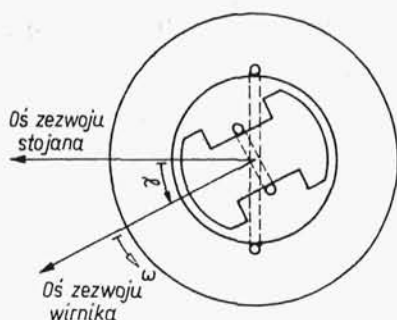
W przypadku maszyny elektrycznej niesymetrycznej magnetycznie, np. w przypadku maszyny synchronicznej z biegunami wydutnymi (rys. 1.5) permeancja dla strumienia magnetycznego przenikającego przez stojan i wirnik zmienia się okresowo w funkcji kąta obrotu γ , przy czym okresem zmienności jest kąt π . Przy założeniu, że zmienność permeancji ma charakter kosinusoidalny, permeancja

$$A_{sr} = A_0 + A_m \cos 2\gamma$$

przy czym: A_0 – wartość średnia permeancji; A_m – amplituda składowej permeancji zmiennej kosinusoidalnie. Wtedy indukcyjność wzajemna między zezwojem stojana i wirnika

$$L_{sr} = (l_0 + l_2 \cos 2\gamma) \cos \gamma$$

przy czym: l_0 – składowa indukcyjności odpowiadająca permeancji A_0 ; l_2 – amplituda składowej indukcyjności, odpowiadająca permeancji A_m .



Rys. 1.5. Położenie osi zezwoju wirnika względem osi zezwoju stojana w maszynie asymetrycznej magnetycznie

Przy takiej indukcyjności wyrażenia na napięcia indukowane mają bardziej skomplikowaną postać.

Zależność indukcyjności od położenia (np. od kąta γ) utrudnia rozwiązanie układu równań różniczkowych. Dlatego trójfazowy układ wielkości fazowych (prądów, napięć, strumieni) przekształca się do innego układu (np. do układu w osiach prostopadłych $d-q$), w którym indukcyjności mają wartości stałe.