

działania maszyn elektrycznych. Różnią się te schematy kierunkami prądów w obwodach wirnika. Na rysunku 8.5 kierunek prądu wirnika wynika z przyjętej konwencji, że moc doprowadzona do każdej z bram jest dodatnia. Rysunek 3.80 odpowiada przypadkowi pracy maszyny indukcyjnej, typowemu dla silnika indukcyjnego, kiedy maszyna jest zasilana tylko przez jedną bramę – bramę elektryczną stojana.

Wielkości odnoszące się do obwodu stojana w praktyce oznaczane są najczęściej indeksem 1, a wielkości odnoszące się do obwodu wirnika – indeksem 2.

### 8.3.3. Bieg jałowy

Biegiem jałowym silnika indukcyjnego nazywa się taki stan jego pracy, w którym obwód wirnika jest zamknięty, do uzwojeń stojana jest doprowadzone napięcie, a moment zewnętrzny (hamujący) przyłożony do wału silnika jest równy zeru ( $M_z = 0$ ). W stanie ustalonym przy pominięciu momentu tarcia  $M_t$  moment elektromagnetyczny  $M_e$  jest równy momentowi hamującemu  $M_z$ . Moment elektromagnetyczny i prąd wirnika przy biegu jałowym są więc bardzo małe, poślizg  $s_0$  jest bardzo mały, a prędkość  $n_0$  jest bliska prędkości synchronicznej  $n_1$ . Częstotliwość przemagnesowywania blach wirnika  $f_0 = s_0 f$  jest bardzo mała i straty w rdzeniu wirnika  $P_{Fe2}$  są pomijalnie małe. Straty w uzwojeniu wirnika  $P_{Cu2}$  przy bardzo małym prądzie wirnika są pomijalnie małe. Wobec tego moc doprowadzona do stojana przy biegu jałowym

$$P_{10} = P_{Cu1} + P_{Fe1} + P_m \quad (8.91)$$

przy czym:  $P_{Cu1}$  – straty w uzwojeniu wirnika;  $P_{Fe1}$  – straty w rdzeniu stojana;  $P_m$  – straty mechaniczne.

Straty w rdzeniu stojana  $P_{Fe1}$  są w przybliżeniu równe stratom całkowitym w rdzeniu  $P_{Fe} = P_{Fe1} + P_{Fe2}$  w zakresie pracy od biegu jałowego od obciążenia znamionowego, ponieważ w tym zakresie pracy poślizg zmienia się tylko w zakresie od  $s_0 \approx 0,002$  do  $s_N = 0,02 \div 0,05$ .

Prąd stojana przy biegu jałowym  $I_{10}$  ma zwykle wartość od  $0,3I_N$  do  $0,5I_N$  (tylko w silnikach dźwigowych jego wartość dochodzi do  $0,9I_N$ ). Straty w uzwojeniu stojana  $P_{Cu1} = 3R_1 I_{10}^2$  są więc znacznie mniejsze niż przy obciążeniu znamionowym.

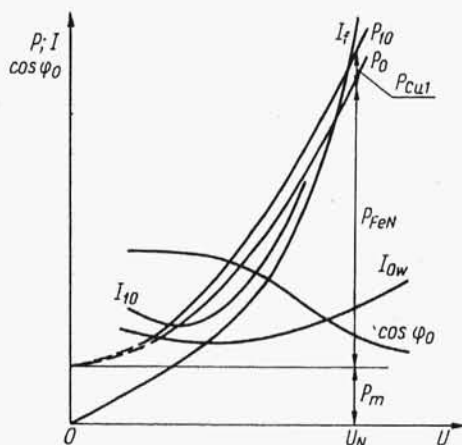
Wprowadza się pojęcie strat jałowych

$$P_0 = P_m + P_{Fe} \quad (8.92)$$

czyli

$$P_0 = P_1 - P_{Cu1} \quad (8.93)$$

*Charakterystykami biegu jałowego* silnika indukcyjnego nazywa się zależności mocy, strat, prądów i współczynnika mocy od napięcia (rys. 8.8). Straty w rdzeniu są proporcjonalne do kwadratu indukcji, więc  $P_{Fe} \approx cU^2$ . Krzywa  $P_{Fe} = f(U)$  jest w przybliżeniu parabolą, przesuniętą wzdłuż osi rzędnych o  $P_m = \text{const.}$  Przy małych napięciach przeważają straty mechaniczne, więc poczynając od pewnej wartości  $U$  zmniejszeniu napięcia towarzyszy wzrost prądu czynnego  $I_{0w}$ . Zależność  $I_f = f(U)$



Rys. 8.8. Charakterystyki biegu jałowego silnika indukcyjnego

odpowiada krzywej magnesowania obwodu magnetycznego z żelaza ze szczeliną powietrzną. Prąd  $I_{10} = \sqrt{I_{0w}^2 + I_f^2}$  przy dużych wartościach napięć niewiele różni się od prądu magnesującego  $I_f$ . Przebieg  $\cos \varphi_0$  wynika z przebiegu  $I_{0w}$  oraz  $I_f$ . Przy bardzo małych napięciach silnik zatrzymuje się i charakterystyki biegu jałowego przechodzą w charakterystyki zwarcia.

### 8.3.4. Stan zwarcia

Stanem zwarcia maszyny indukcyjnej nazywa się taki stan, w którym uzwojenie nieruchomego (zahamowanego) wirnika jest zwarte, a do uzwojenia stojana jest doprowadzone napięcie. Przy zwarcu jest  $n = 0$ ,  $s = 1$ ,  $f_2 = sf = f$ ,  $R'_d = R'_2 \frac{1-s}{s} = 0$ . Prąd wirnika

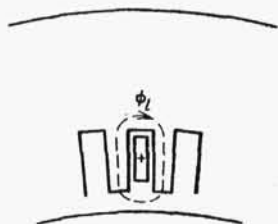
$$I_2 = \frac{U_{i2}}{\sqrt{\left(\frac{R_2}{s}\right)^2 + X_{i2}^2}} = \frac{U_{i2}}{\sqrt{R^2 + X_{i2}^2}} \quad (8.94)$$

przy czym  $U_{i2}$  – napięcie indukowane w uzwojeniu stojana przy poślizgu  $s = 1$ . Przy pracy znamionowej poślizg znamionowy ma zwykle wartość  $s_N = 0,02 \div 0,05$ , a przy zwarcu  $s = 1$ , więc  $R_2/s_N$  jest znacznie większe od  $R_2$  i prąd przy zwarcu jest znacznie większy od  $I_N$ . Podobnie jak w transformatorze przy zwarcu można (wprawdzie z większym błędem) w schemacie zastępczym maszyny indukcyjnej pominąć gałąź poprzeczną, przewodzącą prąd  $I_0$ . Wtedy prąd stojana

$$I_1 = \frac{U}{Z_z} \quad (8.95)$$

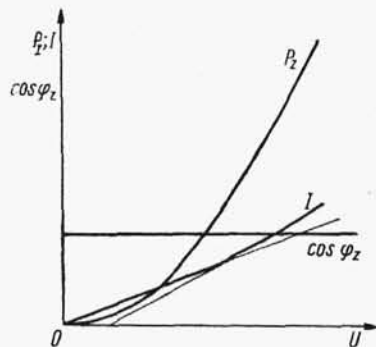
przy czym:  $Z_z = \sqrt{R_z^2 + X_z^2}$  – impedancja zwarciowa;  $R_z = R_1 + R'_2$  – rezystancja zwarciowa;  $X_z = X_{l1} + X'_{l2}$  – reaktancja zwarciowa.

Reaktancje  $X_{11}$  i  $X_{12}$  mają tylko w przybliżeniu wartości stałe, niezależnie od nasycenia obwodu magnetycznego. Spowodowane to jest stosunkowo szybkim nasycaniem się zębów, mających mały przekrój, a stanowiących stosunkowo dużą część drogi strumienia rozproszonego (rys. 8.9).



Rys. 8.9. Droga strumienia rozproszonego maszyny indukcyjnej

Charakterystykami zwarcia nazywa się zależności mocy pobranej przy zwarcu  $P_z$ , prądu płynącego przy zwarcu  $I$  oraz współczynnika mocy  $\cos \varphi_z$  od napięcia (rys. 8.10). Z powodu nasycenia zębów zależność  $I = f(U)$  nie jest zupełnie prostoliniowa, jednak w przybliżonych rozważaniach przyjmuje się często, że  $I = cU$ . W stanie zwarcia straty w rdzeniu są pomijalnie małe w porównaniu ze stratami w uzwojeniu, więc  $P_z = cI^2 \approx c_1 U^2$ . Przy tym uproszczeniu jest  $X_z = \text{const}$ , więc  $\cos \varphi_z = \text{const}$ . Z zależności  $P_z = 3R_z I_{ph}^2$  ( $I_{ph}$  – prąd fazowy) można wyznaczyć  $R_z = \frac{P_z}{3I_{ph}^2}$ . Z pomiarów rezystancji uzwojeń przy użyciu prądu stałego



Rys. 8.10. Charakterystyki zwarcia maszyny indukcyjnej

można wyznaczyć  $R_{z-} = R_{1-} + R_{2-}$ , przy czym  $R_z > R_{z-}$ . Wynika to stąd, że przy zwarcu płynie prąd przemienny, więc

$$P_z = P_{obc} = P_{CuP} + P_{obcd} \quad (8.96)$$

przy czym:  $P_{obc}$  – straty obciążeniowe;  $P_{CuP}$  – straty podstawowe w uzwojeniu, występujące w uzwojeniu przy przepływie prądu stałego, płynącego przy jednakowej gęstości prądu w całym uzwojeniu;  $P_{obcd}$  – straty dodatkowe przy obciążeniu. Straty dodatkowe przy obciążeniu można podzielić na straty dodatkowe w uzwojeniu  $P_{Cud}$  wywołane nierównomierną gęstością prądu, straty w częściach konstruk-

cyjnych  $P_{ld}$  wywołane strumieniami rozproszonymi oraz straty pulsacyjne i powierzchniowe  $P_{pd}$  wywołane wyższymi harmonicznymi w wypadkowej krzywej napięcia magnetycznego. Wobec tego

$$P_{obcd} = P_{Cu d} + P_{ld} + P_{pd} \quad (8.97)$$

Można (z dużym uproszczeniem) przyjąć, że straty obciążeniowe dodatkowe w stojanie  $P_{obcd1}$  są równe stratom dodatkowym w wirniku  $P_{obcd2}$ , czyli

$$P_{obcd1} = P_{obcd2} = \frac{1}{2} P_{obcd} \quad (8.98)$$

Wprowadza się pojęcia:

- *napięcie zwarcia maszyny indukcyjnej  $U_z$* , tj. napięcie, przy którym przez uzwojenie stojana maszyny indukcyjnej, będącej w stanie zwarcia, płynie prąd znamionowy  $I_N$ ;
- *prąd zwarcia maszyny indukcyjnej  $I_z$* , tj. prąd płynący przez uzwojenie stojana maszyny indukcyjnej, będącej w stanie zwarcia, jeżeli do uzwojeń jej stojana jest doprowadzone napięcie znamionowe  $U_N$ .

Wartości względne

$$U_{zrel} = \frac{U_z}{U_N} = 0,125 \div 0,25$$

$$I_{zrel} = \frac{I_z}{I_N} = \frac{1}{U_{zrel}} = 4 \div 8$$

### 8.3.5. Bilans mocy i sprawność silnika indukcyjnego

Moc pobrana przez silnik indukcyjny z sieci zasilającej

$$P_1 = 3U_{ph} I_{ph} \cos \varphi = \sqrt{3} UI \cos \varphi$$

przy czym:  $U_{ph}$ ,  $I_{ph}$  – napięcie i prąd fazowe;  $U$ ,  $I$  – napięcie międzyprzewodowe i prąd przewodowy.

W stojanie występują:

- straty podstawowe w uzwojeniu stojana  $P_{Cu p1} = 3R_1 I_{ph}^2$ ;
- straty w rdzeniu stojana  $P_{Fe}$ ;
- straty obciążeniowe dodatkowe w stojanie  $P_{obcd1}$

Łączne straty w stojanie

$$P_{1t} = P_{Cu p1} + P_{Fe} + P_{obcd1}$$

Moc elektromagnetyczną przeniesioną przez strumień magnetyczny w szczelinie ze stojana do wirnika

$$P_e = P_1 - P_{1t} \quad (8.99)$$

Mocy  $P_e$  odpowiada moment elektromagnetyczny  $M_e$ . Moc  $P_e$  jest często nazywana *mocą idealną* i oznaczana  $P_i$ .

W wirniku występują:

- straty podstawowe w uzwojeniu wirnika o  $m_2$  fazach  $P_{Cu p2} = m_2 R_2 I_2^2$ ;
- straty obciążeniowe dodatkowe  $P_{obc d2}$ ;
- straty mechaniczne  $P_m$ .

Łączne straty w wirniku

$$P_{2t} = P_{Cu p2} + P_{obc d2} + P_m \quad (8.100)$$

Straty całkowite silnika indukcyjnego

$$P_t = P_{1t} + P_{2t} \quad (8.101)$$

Moc oddana

$$P = P_1 - P_t \quad (8.102)$$

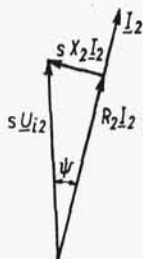
albo

$$P = P_e - P_{2t}$$

Całkowite straty obciążeniowe wirnika

$$P_{obc2} = P_{Cu p2} + P_{obc d2} = m_2 R_2 I_2^2 \quad (8.103)$$

przy czym  $R_2$  – umyślona rezystancja uzwojenia fazowego stojana, uwzględniająca także straty dodatkowe.



Rys. 8. 11. Wykres napięć wirnika maszyny indukcyjnej

Na podstawie wykresu napięć wirnika (rys. 8.11) można napisać

$$R_2 I_2 = s U_{i2} \cos \psi \quad (8.104)$$

Kąt  $\psi$  jest kątem między wektorem napięcia indukowanego  $\underline{U}_{i2}$  i wektorem prądu płynącego w uzwojeniu wirnika. Moc elektromagnetyczna może więc być wyrażona następująco:

$$P_e = m_2 U_{i2} I_2 \cos \psi \quad (8.105)$$

Na podstawie wzorów (8.103), (8.104) i (8.105) otrzymuje się

$$P_{obc2} = s P_e \quad (8.106)$$

Moc  $s P_e$ , zwana *mocą poślizgu*, równa się stratom obciążeniowym wirnika. Jest to bardzo ważny związek, ponieważ:

- pozwala wyznaczyć  $P_{obc2}$ , przy nieznannej wartości  $R_2$  (np. w silnikach klatkowych) na podstawie wyznaczonych  $s$  oraz  $P_e$ ;

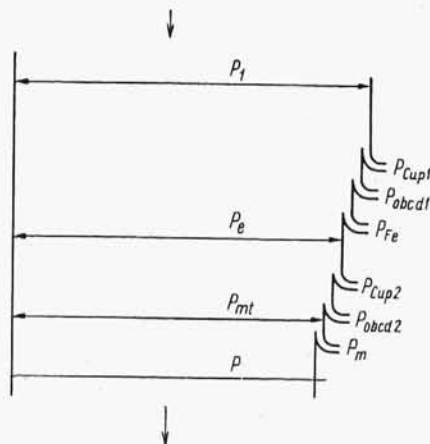
– wskazuje na możliwość regulacji poślizgu  $s$  (a więc także prędkości obrotowej  $n$ ) przez zmianę strat  $P_{obc2}$  czyli przez zmianę mocy poślizgu  $sP_e$ .

*Całkowita moc mechaniczna*, czyli ta część mocy elektrycznej, która w silniku indukcyjnym została przetworzona na moc mechaniczną

$$P_{mt} = P_e - sP_e = (1-s)P_e \quad (8.107)$$

Moc oddana (na wale) odpowiadająca momentowi na wale

$$P = P_{mt} - P_m \quad (8.108)$$



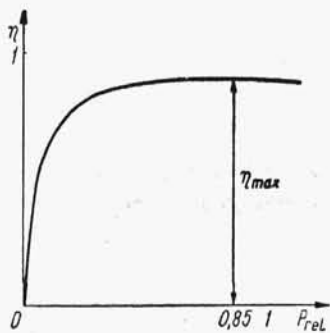
Rys. 8.12. Bilans mocy silnika indukcyjnego

Na rysunku 8.12 pokazano bilans mocy silnika indukcyjnego. Straty żelowe  $P_0$  przy stałej wartości napięcia są praktycznie stałe, niezależne od obciążenia (mocy i prądu). Straty obciążeniowe  $P_{obc}$  są proporcjonalne do kwadratu prądu.

Sprawność

$$\eta = \frac{P}{P_1}$$

ma w funkcji mocy oddanej przebieg, jak na rys. 8.13. Sprawność osiąga wartość maksymalną  $\eta_{max}$ , kiedy straty stałe są równe stratom zmiennym, czyli przy takim



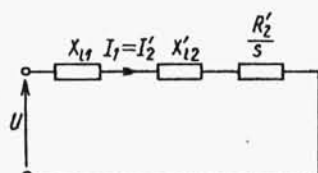
Rys. 8.13. Sprawność silnika indukcyjnego

obciążeniu, kiedy  $P_0 = P_{\text{obc}}$ . Zwykle buduje się silniki indukcyjne tak, aby  $\eta = \eta_{\text{max}}$  było przy  $P_{\text{rel}} = P/P_N \approx 0,85$ . Ponadto krzywa  $\eta = f(P)$  powinna mieć płaski przebieg w stosunkowo dużym zakresie zmienności mocy.

### 8.3.6. Moment elektromagnetyczny przy pracy symetrycznej

#### 8.3.6.1. Moment elektromagnetyczny od pierwszej harmonicznej indukcji i okładu

Moment elektromagnetyczny przy pracy symetrycznej od pierwszej harmonicznej indukcji i okładu jest określony przybliżonym wzorem (8.87) albo (8.88). Znak minus w tych wzorach odpowiada przyjętej konwencji mocy dodatniej, doprowadzonej do bram elektrycznych maszyny. Do analogicznego wyrażenia można dojść



Rys. 8.14. Uproszczony schemat zastępczy maszyny indukcyjnej

na podstawie schematu zastępczego z rys. 3.80 albo z rys. 8.5. Ponieważ prąd  $I_0$  jest mały oraz  $R'_2/s \gg R_1$ , zatem schemat zastępczy można uprościć do postaci podanej na rys. 8.14. Na tej podstawie

$$I_1 = I_2' = \frac{U}{\sqrt{(X_{l1} + X'_{l2})^2 + \left(\frac{R'_2}{s}\right)^2}} \quad (8.109)$$

Moc elektromagnetyczna przeniesiona ze stojana do wirnika

$$P_e = m_1 \frac{R'_2}{s} (I_2')^2 \quad (8.110)$$

Na podstawie wzorów (8.109) i (8.110)

$$P_e = m_1 \frac{R'_2 U^2}{s (X_{l1} + X'_{l2})^2 + \frac{(R'_2)^2}{s}} \quad (8.111)$$

Przyjmując znak momentu elektromagnetycznego w zakresie pracy silnikowej za dodatni (tj. za przeciwny do znaku momentu przyjętego w poprzednich rozważaniach ogólnych), otrzymuje się

$$M_e = \frac{P_e}{2\pi n_1} \quad (8.112)$$

czyli

$$M_e = \frac{m_1}{2\pi n_1} \cdot \frac{R'_2 U^2}{s(X_{11} + X'_{12}) + \frac{(R'_2)^2}{s}} \quad (8.113)$$

Analogicznie do wzoru (8.86), moment elektromagnetyczny krytyczny

$$M_{ek} = \frac{m_1}{2\pi n_1} \frac{U^2}{2(X_{11} + X'_{12})} \quad (8.114)$$

występuje przy poślizgu krytycznym

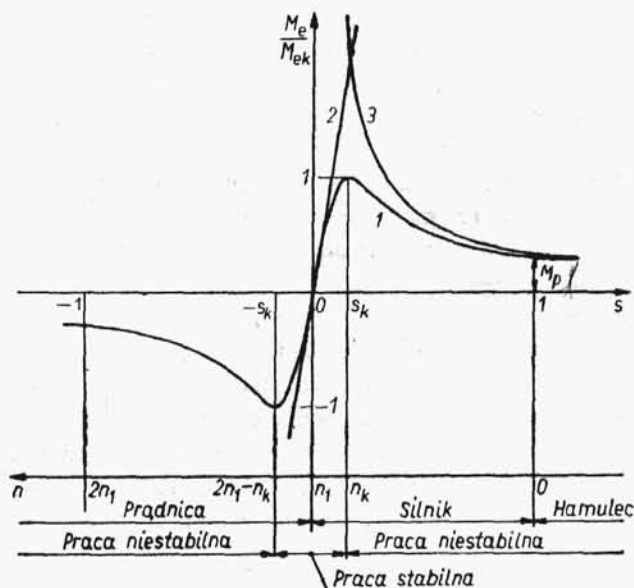
$$s_k = \frac{R'_2}{X_{11} + X'_{12}} \quad (8.115)$$

Ze wzorów (8.113) i (8.114) otrzymuje się tzw. wzór Klossa

$$\frac{M_e}{M_{ek}} = \frac{2}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \quad (8.116)$$

Jeśli przyjąć moment  $M_{ek}$  za moment jednostkowy to wartość względna momentu elektromagnetycznego wynosi  $M_{rel} = M_e/M_{ek}$ . Zależność  $M_e/M_{ek} = f(s)$  pokazana jest na rys. 8.15 (krzywa 1). Przy małych poślizgach, czyli przy  $s \ll s_k$ , co odpowiada zakresowi zwykłej pracy silnika indukcyjnego, ze wzoru (8.116) otrzymuje się

$$\frac{M_e}{M_{ek}} \approx 2 \frac{s}{s_k} \quad (8.117)$$



Rys. 8.15. Zależność momentu elektromagnetycznego od poślizgu maszyny indukcyjnej



czemu odpowiada prosta 2 na rys. 8.15. Przy dużych poślizgach ( $s \gg s_k$ ) ze wzoru (8.116) otrzymuje się

$$\frac{M_e}{M_{ek}} \approx 2 \frac{s_k}{s} \quad (8.118)$$

czemu odpowiada hiperbola 3 na rys. 8.15.

W zakresie poślizgów  $0 < s < 1$ , czyli w zakresie prędkości obrotowych  $0 < n < n_1$ , wirnik wiruje w kierunku zgodnym z kierunkiem wirowania pola magnetycznego z prędkością mniejszą od prędkości synchronicznej  $n_1$ . Wirnik wiruje pod wpływem momentu elektromagnetycznego. Jest to *zakres pracy silnikowej* maszyny indukcyjnej. Przy  $s > 1$ , czyli przy  $n < 0$ , silnik wiruje w kierunku przeciwnym do kierunku wirowania pola i przeciwnym do kierunku działania momentu elektromagnetycznego. Wirnik wiruje pod wpływem działania momentu zewnętrznego. Jest to *zakres pracy hamulcowej* maszyny indukcyjnej. Przy  $s < 0$ , czyli przy  $n > n_1$  wirnik wiruje w kierunku wirowania pola magnetycznego pod wpływem momentu zewnętrznego z prędkością nadsynchroniczną. Moment elektromagnetyczny zmienia znak, moc elektromagnetyczna zmienia kierunek przepływu i płynie od wirnika do stojana. Jest to *zakres pracy prądnicowej* maszyny indukcyjnej.

W zakresie poślizgów  $-s_k < s < s_k$ , czyli w zakresie prędkości obrotowych  $n_k < n < 2n_1 - n_k$  jest  $\frac{dM_e}{dn} < 0$ . Jest to *zakres pracy stabilnej* maszyny indukcyjnej, do której wału jest przyłożony moment zewnętrzny o stałej wartości. Każdemu zwiększeniu (zmniejszeniu) momentu zewnętrznego w tym zakresie poślizgów przy pracy silnikowej odpowiada zmniejszenie (zwiększenie) prędkości obrotowej i zwiększenie (zmniejszenie) momentu elektromagnetycznego aż do zrównania się momentów i osiągnięcia nowego stanu ustalonego. Analogicznie jest dla pracy prądnicowej w zakresie stabilnym.

Poza obszarem poślizgów  $-s_k < s < s_k$  jest przy stałej wartości momentu zewnętrznego *zakres pracy niestabilnej*. Przy  $s = 1$ , czyli przy  $n = 0$ , jest stan zwarcia maszyny indukcyjnej, czyli pierwsza chwila rozruchu silnika indukcyjnego. Wytworzony wtedy moment elektromagnetyczny nazywa się *momentem elektromagnetycznym początkowym*  $M_p$ . Moment elektromagnetyczny  $M_p$  określa możliwości rozruchowe silnika indukcyjnego.

Przy  $s = 0$ , czyli przy  $n = n_1$  wirnik wiruje z prędkością synchroniczną; wtedy  $M_e = 0$ . Tak wyznaczona zależność  $M_e = f(s)$  nie uwzględnia wpływu wyższych harmonicznych, może być więc stosowana tylko do przybliżonej analizy zjawisk w takim zakresie, w którym mogą być pominięte momenty od wyższych harmonicznych. Moment na wale  $M$  różni się od momentu elektromagnetycznego  $M_e$  o moment tarcia  $M_t$ . Przyjmując  $M_t \ll M_e$  można wyprowadzoną tutaj zależność  $M_e = f(s)$  traktować w przybliżeniu jako  $M = f(s)$ .

### 8.3.6.2. Momenty pasożytnicze

Momentami pasożytniczymi nazywa się takie momenty elektromagnetyczne, które w niekorzystny sposób zniekształcają przebieg  $M_e = f(s)$  od pierwszej harmonicznej

nej. Momenty pasożytnicze wywołane są odpowiednimi harmonicznymi stojana i wirnika.

Do wyznaczenia momentów pasożytniczych można posłużyć się wyrażeniem na moment elektromagnetyczny, uzyskany z prawa Biota-Sawarta [wzór (3.114)].

Występujący w tym wzorze okład prądu  $a$  jest określony wzorem (3.109), a indukcja  $B$  – wzorem (3.99). Napięcie magnetyczne  $f$ , od którego zależy indukcja  $B$ , jest zaś określone wzorem (3.98). Wzór (3.98) wyraża napięcie magnetyczne wywołane prądem w danym uzwojeniu (np. stojana), a wzór (3.109) okład prądu w tym samym uzwojeniu. Jeśli odległość  $x$  występująca we wzorach (3.98) i (3.109) jest mierzona od tego samego punktu na obwodzie maszyny (np. od osi fazowej), to rozkład napięcia magnetycznego na obwodzie maszyny jest sinusoidą, a rozkład okładu prądu kosinusoidą. W rzeczywistości w maszynie indukcyjnej indukcja jest wywoływana napięciem magnetycznym wypadkowym, będącym sumą napięć magnetycznych od prądu stojana i odpowiednio przesuniętego w fazie na obwodzie maszyny napięcia magnetycznego od prądu wirnika. Oznacza to, że krzywa okładu jest względem indukcji przesunięta o kąt różny od  $\pi/2$ . Można to uwzględnić np. w ten sposób, że okład prądu określa się nie wzorem (3.109), lecz wzorem

$$a(x, t) = \sum_v A_{vm} \cos \left[ \omega t - v \left( \frac{\pi}{\tau} x - \varphi \right) \right] \quad (8.119)$$

Korzystając z tego wzoru, przy wyznaczaniu momentu według wzoru (3.114) należy wykonać całkowanie typu

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx - \varphi) dx$$

Całka tego typu ma wartość różną od 0 tylko przy  $m = n$ . Oznacza to, że moment elektromagnetyczny powstanie tylko od harmonicznym strefowych indukcji i okładu tego samego rzędu. Na tej podstawie wyrażenie na moment elektromagnetyczny od harmonicznym strefowych upraszcza się do postaci

$$M_e = p \frac{D}{2} l \int_0^{2\pi} [B_1(x, t) a_1(x, t) + B_5(x, t) a_5(x, t) + \dots + B_v(x, t) a_v(x, t) + \dots] dx \quad (8.120)$$

Moment od pierwszej harmonicznym

$$M_{e1} = p \frac{D}{2} l \int_0^{2\pi} B_{1m} \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right) A_{1m} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{\tau} x + \varphi \right) dx \quad (8.121)$$

Przy wyznaczaniu momentu nie jest istotne, dla jakiej wartości  $t$  wykonuje się całkowanie, ponieważ ze zmianą czasu zmienia się tylko miejsce, w którym występuje amplituda indukcji i okładu, ale wartości tych amplitud i rozkład fal nie ulegają

zmianie. Dlatego można całkowanie wykonać dla  $t = 0$ . Ponadto, zamiast obliczać całkę od 0 do  $2\tau$  można obliczyć równoważną dwukrotną wartość całki od 0 do  $\tau$ . Wobec tego

$$M_{e1} = pDl \int_0^{\tau} B_{1m} \sin \frac{\pi}{\tau} x A_{1m} \cos \left( \frac{\pi}{\tau} x - \varphi \right) dx \quad (8.122)$$

albo

$$M_{e1} = pDl \int_0^{\tau} B_{1m} \sin \frac{\pi}{\tau} x A_{1m} \sin \left( \frac{\pi}{\tau} x - \psi \right) dx \quad (8.123)$$

przy czym

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Po wykonaniu całkowania

$$M_{e1} = pDl A_{1m} B_{1m} \frac{\tau}{2} \cos \psi \quad (8.124)$$

Ponieważ

$$\frac{2}{\pi} B_{1m} \tau l = \Phi_1$$

przy czym  $\Phi_1$  – strumień od pierwszej harmonicznej indukcji, więc

$$M_{e1} = \frac{\pi}{4} pD A_{1m} \Phi_1 \cos \psi \quad (8.125)$$

Przy  $\psi = 0$  jest maksymalna wartość momentu

$$M_{e1} = \frac{\pi}{4} pD A_{1m} \Phi_1 \quad (8.126)$$

Okład  $A_{1m}$  jest proporcjonalny do prądu  $I_2$ . Jeśli oznaczyć przez  $\psi'$  kąt fazowy między strumieniem  $\Phi_1$  i prądem  $I_2$ , to

$$M_{e1} = c \Phi_1 I_2 \sin \psi' \quad (8.127)$$

skąd przy  $\psi' = \pi/2$  otrzymuje się maksymalną wartość momentu elektromagnetycznego

$$M_{e1} = c \Phi I_2 \quad (8.128)$$

Odpowiednio, moment od  $v$ -tej harmonicznej indukcji i okładu

$$M_{ev} = \frac{1}{v} \left( \frac{\xi_v}{\xi_1} \right)^2 M_{e1} \quad (8.129)$$

Pierwsza harmoniczna okładu i indukcji wiruje synchronicznie niezależnie od prędkości (asynchronicznej) wirowania wirnika, tworząc moment  $M_{e1}$ . Taki moment nazywa się *momentem asynchronicznym*, którego przebieg w funkcji poślizgu poka-

zono na rys. 8.15. Podobny przebieg mają także momenty od wyższych harmonicznych indukcji i okładu wirujące z jednakową prędkością (względem nieruchomego punktu stojana) niezależnie od prędkości wirnika.

Harmoniczna (np. indukcji) stojana rzędu  $v$  indukuje w uzwojeniu wirnika napięcie o częstotliwości

$$f_{2v} = (n_v - n) p_v$$

Po podstawieniu do tego wzoru  $n_v = n_1/v$ ,  $n = (1-s)n_1$  oraz  $p_v = pv$  otrzymuje się

$$f_{2v} = [1 - v(1-s)]f \quad (8.130)$$

Wprowadzając pojęcie poślizgu względem prędkości  $v$ -tej harmonicznej

$$s_v = 1 - v(1-s) = \frac{n_v - n}{n_v} \quad (8.131)$$

otrzymuje się

$$f_{2v} = s_v f \quad (8.132)$$

Każda z harmoniczných czasowych napięcia wirnika o częstotliwości  $f_{2v}$  wywołuje harmoniczne strefowe rzędu  $\mu$ .

Jeśli liczba par biegunów i liczba faz stojana i wirnika są sobie równe, tzn. jeśli  $p_1 = p_2$ ,  $m_1 = m_2$ , to w uzwojeniu stojana i wirnika występują harmoniczne tego samego rzędu, każdorazowo  $\mu = v$ .

W uzwojeniach, w których  $p_1 = p_2$ , ale  $m_1 \neq m_2$  (np. w maszynie z wirnikiem uzwojonym dwufazowo) rząd harmonicznej wirnika  $\mu$  od harmonicznej stojana  $v$  jest określony wyrażeniem

$$\mu = v + k_2 m_2 \quad (8.133)$$

gdzie  $m_2 \geq 2$ , a  $k_2$  jest dowolną liczbą całkowitą (dodatnią lub ujemną) albo zerem.

W maszynie indukcyjnej z wirnikiem klatkowym (liczba par biegunów nieustalona oraz  $m_1 \neq m_2$ ) rząd harmonicznej wirnika  $\mu$  od harmonicznej stojana  $v$  jest określony wyrażeniem

$$\mu = v + \frac{k_2 m_2}{p_1} \quad (8.134)$$

przy czym liczba faz wirnika jest równa liczbie żłobków wirnika. Częstotliwość dowolnej harmonicznej wirnika jest określona wzorem (8.132), a jej liczba par biegunów wynosi  $p_\mu = \mu p$ . Prędkość obrotowa dowolnej harmonicznej wirnika względem wirnika

$$n_\mu = \frac{f_{2v}}{\mu p} \quad (8.135)$$

skąd po wykorzystaniu wzoru (8.130) otrzymuje się

$$n_\mu = \frac{1}{\mu} [1 - v(1-s)] n_1 \quad (8.136)$$

Prędkość wirowania tej harmoniczej względem stojana wynosi

$$n_{\mu} + n = \frac{1}{\mu} [1 - (v - \mu)(1 - s)] n_1 \quad (8.137)$$

Dla określenia tych harmoniczych, które tworzą momenty asynchroniczne należy stwierdzić, które z harmoniczych stojana i wirnika wirują względem stojana z jednakową prędkością przy dowolnej prędkości wirnika  $n$ , czyli przy dowolnym poślizgu wirnika względem stojana.

Dana jest harmoniczna stojana  $v'$  o prędkości względem stojana

$$n_{v'} = \frac{n_1}{v'} \quad (8.138)$$

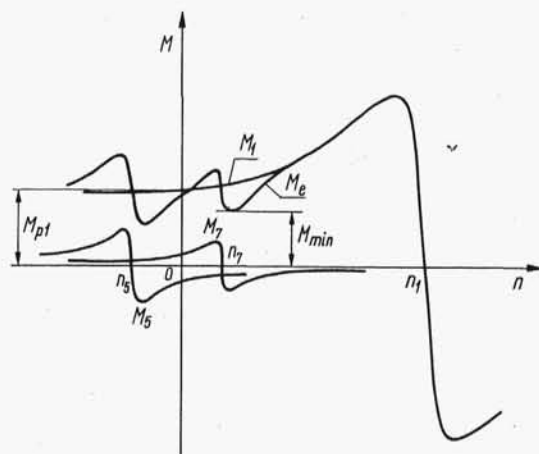
i harmoniczna przestrzenna wirnika  $\mu'$  tego samego rzędu, co harmoniczna  $v'$ , czyli  $\mu' = v'$ . Harmoniczna przestrzenna wirnika  $\mu'$  może być, ogólnie biorąc, wywołana jakąś dowolną harmoniczną stojana rzędu  $v''$ , więc ma częstotliwość  $f_{2v''} = s_{v''} f$  i zgodnie ze wzorem (8.137) wiruje względem stojana z prędkością

$$n_{\mu'} + n = \frac{1}{\mu'} [1 - (v'' - \mu')(1 - s)] n_1 \quad (8.139)$$

Wzory (8.138) i (8.139) wyrażają prędkości równe, więc

$$\frac{1}{v'} = \frac{1}{\mu'} [1 - (v'' - \mu')(1 - s)] \quad (8.140)$$

Ponieważ rozpatruje się przypadek  $v' = \mu'$ , więc aby była spełniona równość (8.140) przy dowolnym  $s$  konieczne jest  $v'' = \mu'$  co przy równości  $\mu' = v'$  daje równość  $v' = v''$ . Oznacza to, że przy dowolnym poślizgu z taką samą prędkością co dana harmoniczna stojana wiruje w przestrzeni tylko harmoniczna wirnika tego samego rzędu i wywołana przez tę właśnie rozpatrywaną harmoniczną stojana. Takie harmoniczne wywołują momenty asynchroniczne o wartości określonej wzorem (8.129) i o przebiegu podobnym do przebiegu  $M_e = f(s)$  od pierwszej harmoniczej (jak na rys. 8.15). Najważniejszymi z tych momentów są momenty od pierwszej, piątej i siódmej harmoniczej. Prędkości synchroniczne odpowiednich harmoniczych wynoszą:  $n_1 = f/p$ ;  $n_5 = -n_1/5$ ;  $n_7 = n_1/7$ . Na rysunku 8.16 pokazano przebiegi momentów asynchronicznych w funkcji prędkości obrotowej wirnika: od pierwszej harmoniczej  $M_1$ , od piątej harmoniczej  $M_5$ , od siódmej harmoniczej  $M_7$  i momentu wypadkowego  $M_e$ . Największe zniekształcenia krzywej momentu pod wpływem momentów od wyższych harmoniczych występują przy prędkościach wirnika nie zbyt wiele różnych od zera. W wyniku tych zniekształceń moment minimalny  $M_{\min}$  jest mniejszy od momentu początkowego od pierwszej harmoniczej  $M_{p1}$ . Utrudnia to rozruch, ponieważ moment hamujący  $M_h$  przyłożony do silnika w czasie rozruchu musi spełniać warunek  $M_h < M_{\min}$ . W zakresie pracy silnikowej największe zniekształcenia powoduje moment od siódmej harmoniczej. Można tak dobrać skrót uzwojenia (rys. 3.71), aby współczynnik skrótu dla danej harmoniczej [wzór (3.84)]

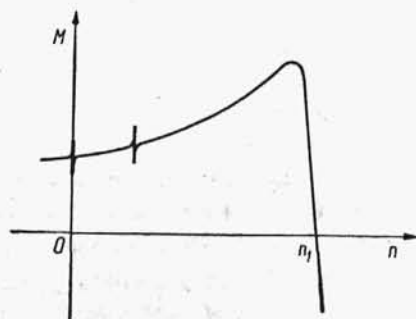


Rys. 8.16. Momenty asynchroniczne maszyny indukcyjnej

miął wartość bliską zeru, co eliminuje moment asynchroniczny od danej harmonicznej.

Oprócz momentów asynchronicznych, wywołanych przez harmoniczne stojana i wirnika, wirujące z tymi samymi prędkościami przy dowolnym poślizgu, mogą powstać *momenty synchroniczne*, czyli momenty od takich harmonicznych stojana i wirnika, które wirują z takimi samymi prędkościami tylko przy pewnej wartości  $s$ .

W maszynie z wirnikiem klatkowym powstaje [wzór (8.134)] wiele harmonicznych wirnika wywołanych daną harmoniczną stojana. Może powstać harmoniczna wirnika  $\mu'$  wywołana harmoniczną stojana  $\nu'$ , przy czym harmoniczna wirnika  $\mu'$  jest tego samego rzędu (ma tyle samo par biegunów), co harmoniczna stojana  $\nu'$ , z którą tworzy moment (wiruje z taką samą prędkością). Wtedy przy  $\nu' = \mu'$ , ale przy  $\nu' \neq \mu'$  równość (8.140) spełniona jest przy  $s = 1$ . Oznacza to, że przy poślizgu  $s = 1$  może powstać moment synchroniczny. Gdyby rozważyć harmoniczne żłobkowe, okazałoby się, że momenty synchroniczne mogą powstać także przy innych wartościach poślizgu (np. przy  $s = 0,75$ ). Przykładowe momenty synchroniczne pokazano na rys. 8.17. Momenty synchroniczne także ograniczają możliwości roz-



Rys. 8.17. Momenty synchroniczne maszyny indukcyjnej

ruchowe maszyny indukcyjnej. Momenty synchroniczne nie mogą być wyeliminowane przez dobór skrótu uzwojenia. Można je ograniczać przez stosowanie skosu żłobka wirnika i przez dobór liczb żłobków stojana i wirnika.

Oprócz harmoniczných wywołujących momenty pasożytnicze mogą powstać takie harmoniczne, które wywołują drgania wirnika.

### 8.3.6.3. Zależność momentu od rezystancji wirnika, napięcia i częstotliwości

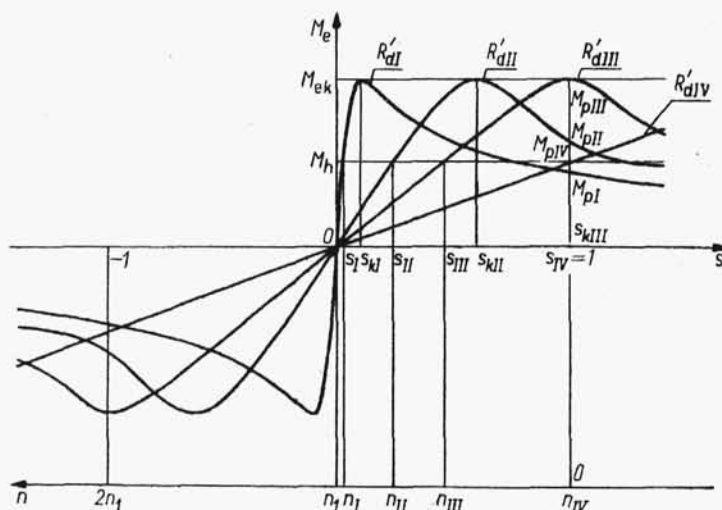
W maszynach indukcyjnych pierścieniowych można przez pierścienie włączać opornik dodatkowy o rezystancji  $R_d$  tak, że przy rezystancji własnej wirnika  $R_2$  rezystancja całkowita wirnika

$$R_{2t} = R_2 + R_d$$

Zgodnie ze wzorem (8.114) moment elektromagnetyczny krytyczny nie ulega zmianie, natomiast zgodnie ze wzorem (8.115) poślizg krytyczny

$$s_k = \frac{R'_2 + R'_d}{X_{l1} + X'_{l2}} \quad (8.141)$$

Na rysunku 8.18 pokazano przebiegi  $M_e = f(s)$  dla różnych wartości rezystancji dodatkowych w obwodzie wirnika  $R_{dIV} > R_{dIII} > R_{dII} > R_{dI} = 0$ .



Rys. 8.18. Zależność momentu od rezystancji wirnika

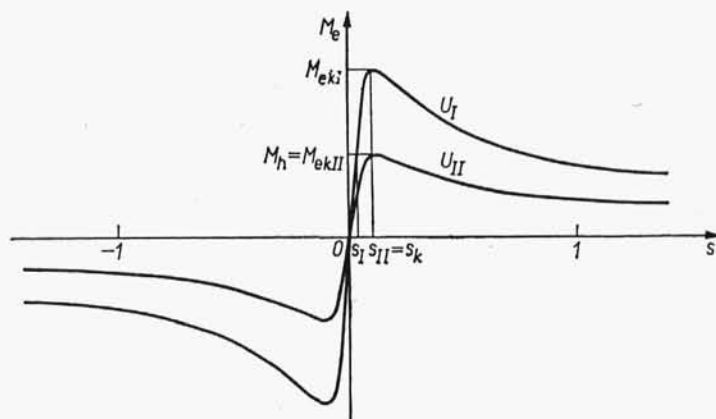
Przy  $R_d = 0$  zależność  $M_e = f(s)$  nazywa się *charakterystyką naturalną*. Punkty przecięcia się poszczególnych charakterystyk  $M_e = f(s)$  z prostą stałego momentu hamującego  $M_h = \text{const}$  wyznaczają punkty pracy silnika w stanach ustalonych przy różnych poślizgach  $s_I, s_{II}, s_{III}, s_{IV}$  i odpowiednio przy różnych prędkościach obrotowych. Przy  $s = 1$  moment elektromagnetyczny  $M_e$  jest równy momentowi

początkowemu  $M_p$ . Przy wartości  $R_d$  dobranej tak, że  $s_k = 1$  (na rys. 8.18  $s_{kIII} = 1$ ) jest  $M_p = M_{ek}$ . Wtedy ze wzoru (8.141)

$$R'_{dk} = X_{I1} + X'_{I2} - R'_2 \approx X_{I1} + X'_{I2} = X_z$$

Przy tak dobranej rezystancji  $R_d = R_{dk}$  moment początkowy osiąga wartość maksymalną.

Poślizg krytyczny [wzór (8.115)] nie zależy od wartości napięcia, natomiast moment krytyczny [wzór (8.114)] jest proporcjonalny do kwadratu napięcia. Na rysunku 8.19 pokazano przebiegi  $M_e = f(s)$  przy  $U_I = U_N$  i przykładowo przy  $U_{II} = U_N/\sqrt{2}$ . Moment początkowy jest także proporcjonalny do kwadratu napięcia. Punkty przecięcia się krzywych  $M_e = f(s)$  z prostą stałego momentu hamującego (tutaj przykładowo  $M_h = M_{ekII}$ ) są punktami pracy w stanach ustalonych, odpowiednio przy poślizgu  $s_I$  i przykładowo  $s_{II} = s_k$ .



Rys. 8.19. Zależność momentu od napięcia

Przy założeniu, że napięcie doprowadzone  $U$  równa się napięciu indukowanemu  $U_i = c\omega B$ , oraz przy uwzględnieniu, że  $\omega = 2\pi n_1$  (przy  $p = 1$ ) ze wzoru (8.114) otrzyma się wyrażenie na moment krytyczny

$$M_{ek} = c \frac{B^2}{(L_{I1} + L'_{I2})} \quad (8.142)$$

w którym

$$L_{I1} = \frac{X_{I1}}{\omega}; \quad L'_{I2} = \frac{X'_{I2}}{\omega}$$

Oznacza to, że moment krytyczny nie zależy od częstotliwości (pulsacji  $\omega = 2\pi f$ ) i jest proporcjonalny do kwadratu indukcji.

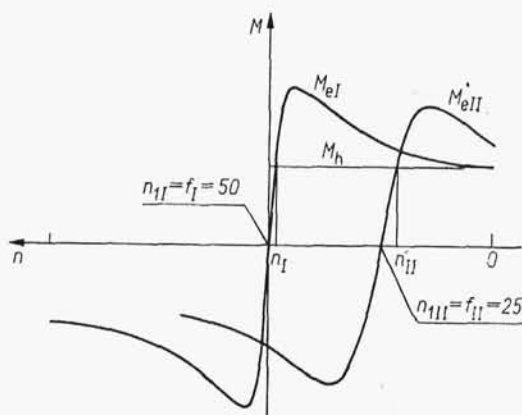
Jest to jednak zależność obarczona dość dużym błędem, ponieważ opiera się na wzorze (8.114), który wyprowadzono na podstawie bardzo uproszczonego schematu zastępczego z rys. 8.14 przede wszystkim na skutek pominięcia rezystancji  $R_1$ . W rzeczywistości moment krytyczny przy stałej wartości indukcji maleje



ze zmniejszaniem się częstotliwości (omówiono to w p. 8.3.11.3). Przy zmianach częstotliwości napięcia na zaciskach maszyny dla zachowania stałej wartości indukcji należy zmieniać wartość napięcia, przy czym wobec zależności  $U_i = c\omega B$  wartość napięcia należy zmieniać w przybliżeniu proporcjonalnie do zmian częstotliwości (tzn. tak, aby  $U_i/f = \text{const}$ ). Zgodnie ze wzorem (8.115) poślizg krytyczny można wyrazić przybliżonym wzorem

$$s_k = \frac{R'_2}{\omega (L_{11} + L'_{12})} \quad (8.143)$$

Poślizg krytyczny jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalny do częstotliwości. Prędkości obrotowe synchroniczne przy  $p = 1$  są równe częstotliwości  $n_1 = f$ , a dla różnych częstotliwości  $n_{1I} = f_I$ ,  $n_{1II} = f_{II}$  itd.



Rys. 8.20. Zależność momentu od częstotliwości

Na rysunku 8.20 dane są przebiegi  $M_e = f(n)$  dla różnych częstotliwości i przy każdorazowo zmienianej wartości napięcia proporcjonalnie do częstotliwości. Ze zmniejszaniem się częstotliwości uzyskuje się przebiegi  $n = f(M_e)$  bardziej opadające (mniej sztywne). Krzywe  $M_e = f(n)$  w przecięciu z prostą stałego momentu hamującego  $M_h = \text{const}$  dają odpowiednie punkty ustalonej pracy przy różnych prędkościach obrotowych.

### 8.3.7. Silniki klatkowe

Uzwojenie jednoklatkowe silnika indukcyjnego (rys. 3.48) jest to uzwojenie wielofazowe o liczbie fazy wirnika równej liczbie żłobków wirnika. Pod wpływem wirującego pola stojana indukuje się wielofazowy prąd wirnika, tworzący pole wirujące z taką samą prędkością, co i pole wirujące stojana i mające taką samą liczbę par biegunów. Taki silnik działa więc podobnie, jak silnik z uzwojeniem trójfazowym wirnika (pierścieniowy). Uzwojenie klatkowe wzniesie więcej różnych harmonicznych niż uzwojenie trójfazowe, więc krzywa  $M_e = f(s)$  silnika klatkowego jest bardziej zniekształcona przez momenty pasożytnicze. Pręty klatki wirnika mogą być nie-