

a po uwzględnieniu zależności (7.277)

$$\underline{U}_u = \underline{U}_{if1} - jX_1 \underline{I}_1 - R_l \underline{I}_u - jX_2 \underline{I}_2 - jX_0 \underline{I}_0 \quad (7.278b)$$

Pomijając napięcia na rezystancjach, otrzymuje się

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_u &= \underline{U}_{if1} - jX_1 \underline{I}_1 - jX_2 \underline{I}_2 - jX_0 \underline{I}_0 \\ \underline{U}_v &= a^2 \underline{U}_{if1} - ja^2 X_1 \underline{I}_1 - jaX_2 \underline{I}_2 - jX_0 \underline{I}_0 \\ \underline{U}_w &= a \underline{U}_{if1} - jaX_1 \underline{I}_1 - ja^2 X_2 \underline{I}_2 - jX_0 \underline{I}_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.279)$$

Wprowadza się pojęcie *napięcia za reaktancją* dla składowych zerowych i przeciwnych $\underline{U}_i = \underline{U}_{if1} - jX_1 \underline{I}_1$. Takie napięcia w trzech fazach tworzą symetryczną trójkę napięć. Wtedy

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_u &= \underline{U}_i - jX_2 \underline{I}_2 - jX_0 \underline{I}_0 \\ \underline{U}_v &= a^2 \underline{U}_i - aX_2 \underline{I}_2 - jX_0 \underline{I}_0 \\ \underline{U}_w &= a \underline{U}_i - ja^2 X_2 \underline{I}_2 - jX_0 \underline{I}_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.280)$$

Uwzględniając także rezystancje, otrzymuje się układ równań

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_u &= (\underline{U}_{if1} - \underline{Z}_1 \underline{I}_1) - \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_0 \underline{I}_0 \\ \underline{U}_v &= a^2 (\underline{U}_{if1} - \underline{Z}_1 \underline{I}_1) - a \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_0 \underline{I}_0 \\ \underline{U}_w &= a (\underline{U}_{if1} - \underline{Z}_1 \underline{I}_1) - a^2 \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_0 \underline{I}_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.281)$$

Układy równań (7.271), (7.272) i (7.275) stanowią zespół dziewięciu równań z dwunastoma niewiadomymi. Dla rozwiązania takiego układu równań należy w każdym konkretnym przypadku zestawić dodatkowo równania więzów.

7.10.2. Zwarcie ustalone asymetryczne

Na rysunku 7.57a podano schemat połączeń uzwojeń twornika wzbudzonej i wirującej prądnicy, będącej w stanie zwarcia jednofazowego. Równaniami więzów są równania

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_u &= 0 \\ \underline{I}_v &= \underline{I}_w = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.282)$$

Ponieważ $1 + a + a^2 = 0$, wobec tego z równań (7.271) i (7.282) otrzymuje się

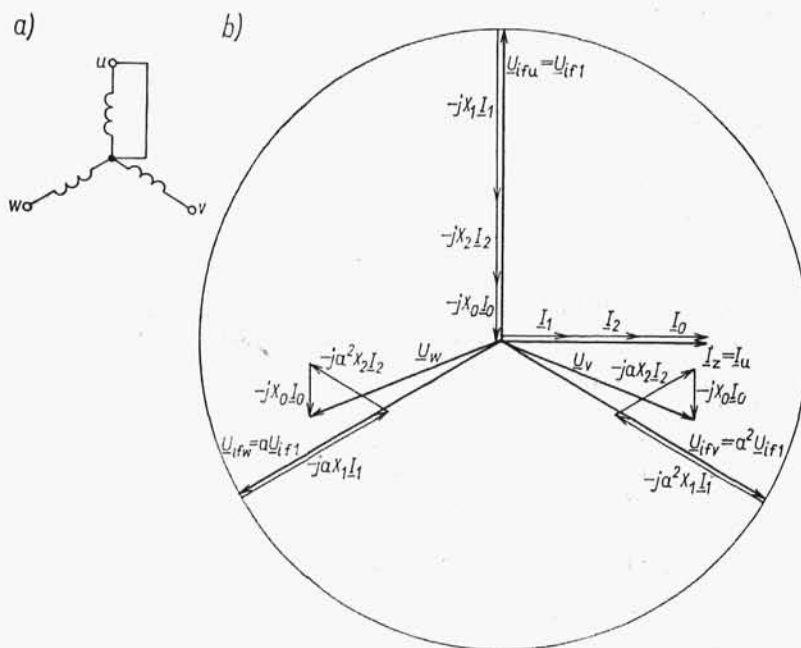
$$\underline{I}_u = 3 \underline{I}_0 \quad (7.283)$$

Po wyznaczeniu $(\underline{I}_u - \underline{I}_w)$ z równań (7.271) i uwzględnieniu równania (7.282) okazuje się, że

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \quad (7.284)$$

Podstawiając (7.283) i (7.284) w pierwsze równanie układu (7.271), otrzymuje się

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}_0 = \frac{1}{3} \underline{I}_u \quad (7.285)$$



Rys. 7.57. Zwarcie jednofazowe prądnicy synchronicznej: a) schemat połączeń; b) wykres wektorowy

Na podstawie równań (7.275), (7.272), (7.282) i (7.285) wyznacza się

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{if1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}$$

a oznaczwszy prąd zwarciovowy zwarcia jednofazowego przez $\underline{I}_{z1} = \underline{I}_u$ można napisać

$$\underline{I}_{z1} = \underline{I}_u = \frac{3\underline{U}_{if1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} \quad (7.286)$$

Z równań (7.281) otrzymuje się

$$\underline{U}_u = 0$$

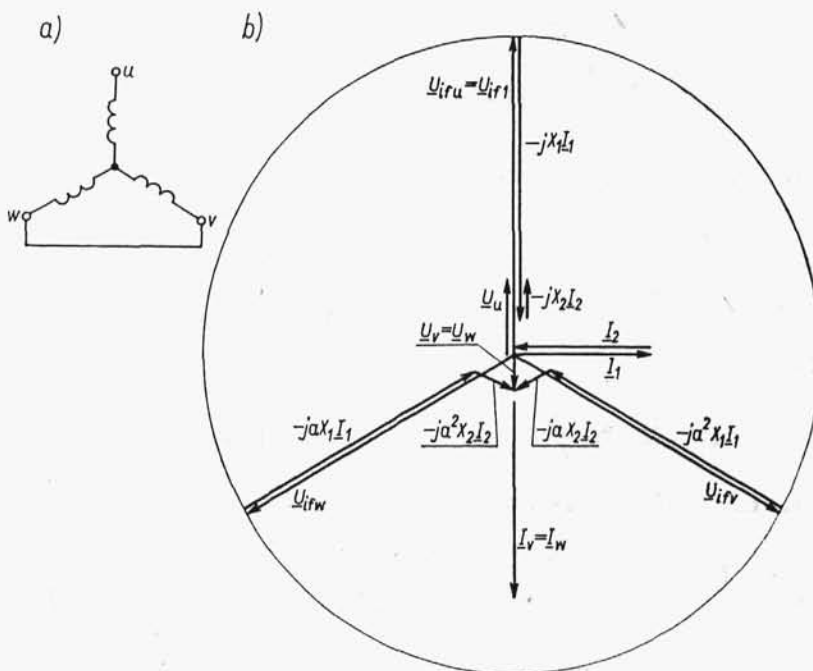
$$\underline{U}_v = -\frac{3}{2} \underline{U}_{if1} \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} - j\sqrt{3} \underline{U}_{if1} \frac{\frac{\underline{Z}_0}{2} + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}$$

$$\underline{U}_w = -\frac{3}{2} \underline{U}_{if1} \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0} + j\sqrt{3} \underline{U}_{if1} \frac{\frac{\underline{Z}_0}{2} + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}$$

Na rysunku 7.57b przedstawiono wykres wektorowy prądnicy synchronicznej w stanie zwarcia jednofazowego wykonany zgodnie z układem równań (7.281) przy pominięciu rezystancji.

Na rysunku 7.58a pokazano schemat połączeń uzwojeń twornika wzbudzonej i wirującej prądnicy, będącej w stanie zwarcia dwufazowego. Równania więzów mają postać

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_u &= 0 \\ \underline{I}_v &= -\underline{I}_w \\ \underline{U}_{vw} &= \underline{U}_v - \underline{U}_w = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.287)$$



Rys. 7.58. Zwarcie dwufazowe prądnicy synchronicznej: a) schemat połączeń; b) wykres wektorowy

Z równań (7.271) i (7.287) otrzymuje się

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_0 &= 0 \\ \underline{I}_1 + \underline{I}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.288)$$

Z układu równań (7.272) oblicza się $\underline{U}_v - \underline{U}_w$, a po wykorzystaniu ostatniego równania układu (7.287) otrzymuje się

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \quad (7.289)$$

Z równań (7.289), (7.288) i (7.275) wyznacza się

$$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{if1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (7.290)$$

Z równania (7.290) i z drugiego równania układu (7.271) wynika

$$\underline{I}_v = -j\sqrt{3} \underline{I}_1 \quad (7.291)$$

Wobec tego prądy fazowe są następujące:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_u &= 0 \\ \underline{I}_v &= \frac{-j\sqrt{3} \underline{U}_{if1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \approx \frac{-\sqrt{3} \underline{U}_{if1}}{X_1 + X_2} \\ \underline{I}_w &= \frac{j\sqrt{3} \underline{U}_{if1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \approx \frac{+\sqrt{3} \underline{U}_{if1}}{X_1 + X_2} \end{aligned} \right\} \quad (7.292)$$

Składowe napięcia na zaciskach wynoszą

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_0 &= 0 \\ \underline{U}_1 = \underline{U}_2 &= -\underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2 \underline{U}_{if1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{aligned} \right\} \quad (7.293)$$

albo

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \frac{j\underline{Z}_2 \underline{I}_v}{\sqrt{3}}$$

Z równań (7.272) i (7.293) wyznacza się napięcia

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_u &= 2\underline{U}_1 = \frac{j2\underline{Z}_2 \underline{I}_v}{\sqrt{3}} = \frac{2\underline{Z}_2 \underline{U}_{if1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \underline{U}_v = \underline{U}_w &= (a^2 + a) \underline{U}_1 = -\underline{U}_1 = \frac{-j\underline{Z}_2 \underline{I}_v}{\sqrt{3}} = -\frac{\underline{Z}_2 \underline{U}_{if1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \underline{U}_{uv} &= \underline{U}_u - \underline{U}_v = j\sqrt{3} \underline{Z}_2 \underline{I}_v = \frac{3\underline{Z}_2 \underline{U}_{if1}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{aligned} \right\} \quad (7.294)$$

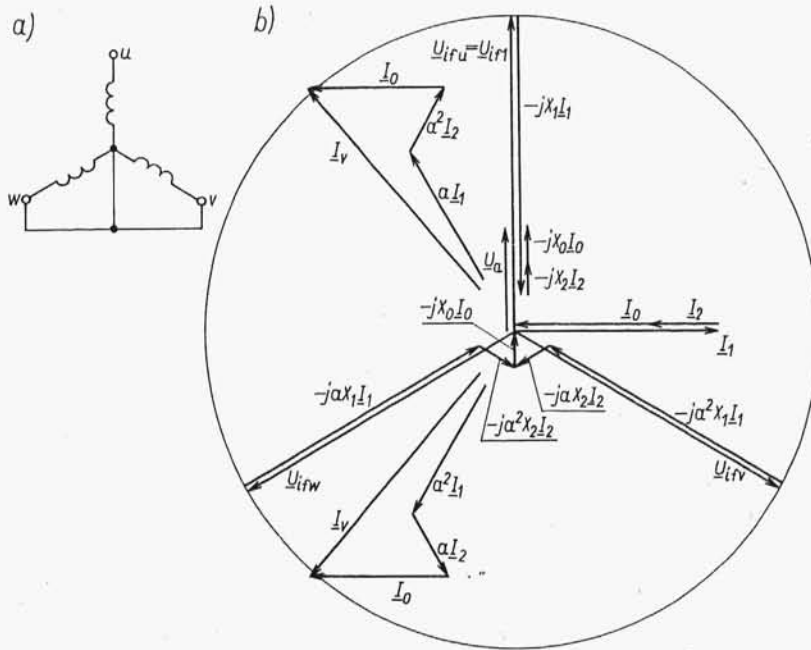
Na rysunku 7.58b przedstawiono wykres napięć i prądów prądnicy synchronicznej przy zwarcu dwufazowym.

Na rysunku 7.59a pokazano schemat połączeń uzwojeń twornika wzbudzonej i wirującej prądnicy będącej w stanie zwarcia jednofazowego podwójnego. Równania więzów mają postać

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_u &= 0 \\ \underline{U}_v = \underline{U}_w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.295)$$

Z równań (7.272) i (7.295) otrzymuje się

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}_0 = \frac{1}{3} \underline{U}_u \quad (7.296)$$



Rys. 7.59. Zwarcie jednofazowe podwójnej prądnicy synchronicznej: a) schemat połączeń; b) wykres wektorowy

Ze wzorów (7.275), (7.271) i (7.296) otrzymuje się

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}_0 = \frac{\underline{Z}_0 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_0} \underline{U}_{if1} \quad (7.297)$$

Ze wzorów (7.275) i (7.297) określa się

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_{if1} - \underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_0)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_0} \underline{U}_{if1} \\ \underline{I}_2 &= -\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = -\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_0} \underline{U}_{if1} \\ \underline{I}_0 &= -\frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_0} \underline{U}_{if1} \end{aligned} \right\} \quad (7.298)$$

Ze wzorów (7.271) i (7.298) otrzymuje się

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_v &= \frac{(a^2 - 1) \underline{Z}_2 + (a^2 - a) \underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_0} \underline{U}_{if1} \\ \underline{I}_w &= \frac{(a - 1) \underline{Z}_2 + (a - a^2) \underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_0} \underline{U}_{if1} \end{aligned} \right\} \quad (7.299)$$

albo

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_v &= \frac{j\sqrt{3} \left[j \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{Z}_2 - \left(\frac{1}{2} \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0 \right) \right]}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_0} \underline{U}_{if1} \\ \underline{I}_w &= \frac{j\sqrt{3} \left[j \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{Z}_2 + \left(\frac{1}{2} \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0 \right) \right]}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_0} \underline{U}_{if1} \end{aligned} \right\} \quad (7.300)$$

Prąd w przewodzie zerowym (zwierającym)

$$\underline{I}_{01} = \underline{I}_v + \underline{I}_w - 3\underline{I}_0 = - \frac{3\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_0} \underline{U}_{if1} \quad (7.301)$$

Na podstawie wzorów (7.271), (7.297) i (7.301) napięcie na zaciskach uzwojenia fazowego u (nie zwartego)

$$\underline{U}_u = 3\underline{U}_1 = \frac{3\underline{Z}_2 \underline{Z}_0}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_0 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_0} \underline{U}_{if1} = -\underline{Z}_0 \underline{I}_{01} \quad (7.302)$$

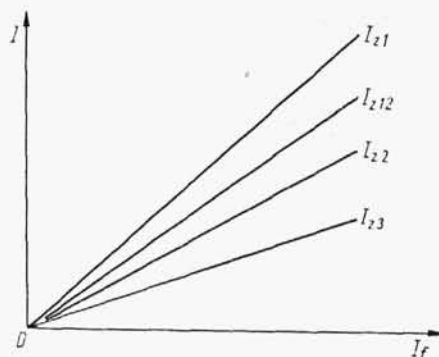
Na rysunku 7.59b przedstawiono wykres wektorowy prądów i napięć prądnic będącej w stanie zwarcia jednofazowego podwójnego wykonany w uproszczeniu, polegającym na przyjęciu $R_1 = R_2 = R_0 = 0$.

Charakterystyki zwarcia ustalonego: I_{z3} – trójfazowego, I_{z2} – dwufazowego, I_{z12} – jednofazowego podwójnego, I_{z1} – jednofazowego pokazano na rys. 7.60. Wszystkie charakterystyki zwarcia ustalonego mają przy małych nasyceniach przebieg prostoliniowy.

Prąd zwarcia zwarcia symetrycznego ustalonego trójfazowego I_{z3} , omówiony w p. 7.8.5, wyraża się wzorem

$$I_{z3} = \frac{U_{if}}{X_d} = \frac{U_{if}}{X_1}$$

Prąd zwarcia zwarcia dwufazowego jest określony wzorem (7.292), jednofazowego podwójnego – wzorem (7.300), jednofazowego – (7.286). Przy danych war-



Rys. 7.60. Charakterystyki zwarcia ustalonego symetrycznego i asymetrycznego

tościach reaktancji X_1, X_2, X_0 równych w przybliżeniu impedancjom Z_1, Z_2, Z_0 można na podstawie tych wzorów wyznaczyć wartości liczbowe poszczególnych prądów zwarciovych.

Wzrost wartości prądów przy zwarciach asymetrycznych w porównaniu z wartością prądu przy zwarcu symetrycznym spowodowany jest zmniejszoną reakcją twornika przy mniejszej liczbie faz zwartych.

7.11. STABILNOŚĆ

7.11.1. Uwagi ogólne

Typowym (uproszczonym) stanem pracy maszyny synchronicznej jest jej współpraca z siecią sztywną. Wszystkie stany takiej pracy maszyny synchronicznej można podzielić na stabilne i niestabilne.

Stabilnym stanem ustalonym nazywa się taki stan, który ustala się ponownie po zniknięciu małego zakłócenia. *Niestabilnym stanem ustalonym* nazywa się taki stan, który zostaje naruszony nieodwracalnie przy wystąpieniu dowolnie małego zakłócenia.

Stabilnością statyczną maszyny synchronicznej nazywa się jej stabilność w stanie ustalonym, albo inaczej – zdolność maszyny do zachowania stanu ustalonego przy dowolnie małych zmianach parametrów tego stanu. Stabilność statyczna zależy tylko od parametrów stanu ustalonego. Parametrami na poszczególnych bramiach maszyny, określającymi stan ustalony są: moment obrotowy (na bramie wału), napięcie wzbudzenia (na bramie uzwojenia wzbudzającego), napięcie twornika albo impedancja sieci (na bramie twornika). Zmiana każdego z tych parametrów powoduje zmianę stanu ustalonego maszyny synchronicznej.

Jeśli nowy stan ustalony jest stanem niestabilnym, to uzyskanie tego nowego stanu jest niemożliwe. Jeżeli nowy stan ustalony jest stanem stabilnym, to uzyskanie go może być możliwe albo nie. Możliwość uzyskania nowego stanu ustalonego zależy zarówno od parametrów stanu ustalonego, jak i od wartości zakłócenia, czyli od wartości przyrostów jednego parametru lub większej liczby parametrów.

Stabilnością dynamiczną maszyny synchronicznej nazywa się jej zdolność do przejścia od jednego stanu ustalonego do nowego stanu ustalonego przy nagłych zmianach parametrów stanu ustalonego o wartości skończone.

7.11.2. Badanie stabilności statycznej metodą małych przyrostów

7.11.2.1. Układ równań

Stałe czasowe związane z obwodami tłumienia mają bardzo małe wartości w porównaniu ze stałymi czasowymi związanymi z obwodem wzbudzenia. Dlatego dla ułatwienia rozważań można w przybliżeniu przyjąć, że zjawiska w obwodach tłumienia nie mają wpływu na stabilność statyczną.

Równania równowagi maszyny synchronicznej z obwodami tłumienia tworzą układ (7.127). Po prawej stronie w równaniach napięciowych występują napięcia zewnętrzne, które mogą być zastąpione napięciami na zaciskach maszyny, mającymi znaki przeciwne do napięć zewnętrznych. Wtedy po wykorzystaniu równań (7.152) i układu równań (7.127) otrzymuje się dla maszyny synchronicznej bez obwodów tłumienia układ ¹⁾ równań w wartościach względnych

$$\left. \begin{aligned} (\varrho_d + s) u_q^x + (1 + s) u_d^x + s u_f^x &= u \sin \vartheta \\ -(1 + s) u_q^x + (\varrho_q + s) u_d^x - (1 + s) u_f^x &= -u \cos \vartheta \\ \mu_d s u_q^x &+ (\varrho_f + s) u_f^x = \varrho_f u_f \\ s \vartheta - s &= 0 \\ u_f^x u_d^x + \lambda u_d^x u_q^x &+ H_f X_q \omega_s s = X_q M \end{aligned} \right\} \quad (7.303)$$

przy czym $\lambda = 1 - \frac{X_s}{X_d}$.

Jest to układ równań różniczkowych nieliniowych niejednorodnych. Dla doprowadzenia go do układu równań liniowych można zastosować metodę małych przyrostów. Wprowadza się oznaczenia

$$u_q^x = u_{q0}^x + \Delta u_q^x; \quad u_d^x = u_{d0}^x + \Delta u_d^x; \quad u_f^x = u_{f0}^x + \Delta u_f^x$$

oraz

$$M = M_0 + \Delta M; \quad u = u_0 + \Delta u; \quad u_f = u_{f0} + \Delta u_f; \quad \vartheta = \vartheta_0 + \Delta \vartheta$$

Układ równań dla początkowego stanu ustalonego przybiera postać

$$\left. \begin{aligned} \varrho_d u_{q0}^x + u_{d0}^x &= u_0 \sin \vartheta_0 \\ -u_{q0}^x + \varrho_q u_{d0}^x - u_{f0}^x &= -u_0 \cos \vartheta_0 \\ u_{f0}^x &= u_{f0} \\ u_{f0}^x + \lambda u_{d0}^x u_{q0}^x &= X_q M_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.304)$$

Układy równań (7.303) i (7.304) zawierają wartości względne współrzędnych, więc wartości te mogą być szacowane względem 1. Można uważać, że układ równań (7.304) zawiera wielkości małe zerowego rzędu, przyrosty poszczególnych wielkości są wielkościami małymi pierwszego rzędu, a iloczyny przyrostów wielkościami małymi drugiego rzędu. Poślizg $s = \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{d(\Delta\vartheta)}{d\tau}$ jest wielkością małą pierwszego rzędu.

Pomija się wielkości małe drugiego rzędu.

Funkcje trygonometryczne rozwija się w szereg Taylora

$$\sin(\vartheta_0 + \Delta\vartheta) = \sin \vartheta_0 + \Delta\vartheta \cos \vartheta_0 - \frac{1}{2!} (\Delta\vartheta)^2 \sin \vartheta_0 \approx \sin \vartheta_0 + \Delta\vartheta \cos \vartheta_0$$

$$\cos(\vartheta_0 + \Delta\vartheta) = \cos \vartheta_0 - \Delta\vartheta \sin \vartheta_0 + \frac{1}{2!} (\Delta\vartheta)^2 \cos \vartheta_0 \approx \cos \vartheta_0 - \Delta\vartheta \sin \vartheta_0$$

¹⁾ W układzie równań występuje litera s oznaczająca poślizg i litera s zastępująca formalnie symbol $\frac{d}{d\tau}$.

Do równań (7.303) wprowadza się zmienne zapisane w postaci $x = x_0 + \Delta x$. Od tak otrzymanego układu równań odejmuje się układ równań dla początkowego stanu ustalonego (7.304), pomija się wielkości małe drugiego rzędu i otrzymuje się układ równań przyrostowych dla stanu nieustalonego

$$\left. \begin{aligned} (\varrho_d + s) \Delta u_q^x + \Delta u_d^x + s \Delta u_f^x - u_0 \cos \vartheta_0 \Delta \vartheta + u_{d0}^x s &= \Delta u \sin \vartheta_0 \\ \Delta u_q^x + (\varrho_q + s) \Delta u_d^x - \Delta u_f^x - u_0 \sin \vartheta_0 \Delta \vartheta - (u_{q0}^x + u_{f0}^x) s &= -\Delta u \cos \vartheta_0 \\ \mu_d s \Delta u_q^x + (\varrho_f + s) \Delta u_f^x &= \varrho_f \Delta u_f \\ s \Delta \vartheta &= -s = 0 \\ \lambda u_{d0}^x \Delta u_q^x + (u_{f0}^x + \lambda u_{q0}^x) \Delta u_d^x + u_{d0}^x \Delta u_f^x + X_q \omega_s H_J s s &= X_q \Delta M \end{aligned} \right\} \quad (7.305)$$

Układ równań (7.305) jest układem równań różniczkowych liniowych niejednorodnych, należy więc doprowadzić ten układ do układu równań różniczkowych liniowych jednorodnych. W chwili $t = 0$ współrzędne układu równań (7.305) są równe zero, ponieważ $t = 0$ odpowiada początkowemu stanowi ustalonemu.

Przy małych zmianach „sił wymuszających” Δu , Δu_f , ΔM oraz przy stałych wartościach tych zmian nowy stan ustalony może być określony stałymi parametrami

$$u_0 + \Delta u; \quad u_{f0} + \Delta u_f; \quad M_0 + \Delta M$$

Dla tak przyjętych parametrów przyrosty „sił wymuszających” są równe zero, prawe strony układu równań (7.305) są równe zero i układ ten staje się układem równań jednorodnych. Przyrosty wielkości występujących w lewych stronach równań układu (7.305) względem nowego stanu ustalonego należy brać ze znakami przeciwnymi w stosunku do znaków przyrostów wchodzących do układu równań (7.305). Przyrostami początkowymi współrzędnych wymuszanych są więc teraz przyrosty $-\Delta u_{q0}^x$, $-\Delta u_{d0}^x$, $-\Delta u_{f0}^x$, $-\Delta \vartheta_0$, przy czym u_{q0}^x , u_{d0}^x , u_{f0}^x , ϑ_0 stanowią cząstkowe rozwiązanie układu równań niejednorodnych (7.305) przy przyjęciu $s = 0$ oraz $s = 0$.

W ten sposób otrzymuje się układ równań różniczkowych liniowych jednorodnych

$$\left. \begin{aligned} (\varrho_d + s) \Delta u_q^x + \Delta u_d^x + s \Delta u_f^x - u_0 \cos \vartheta_0 \Delta \vartheta + u_{d0}^x s &= 0 \\ -\Delta u_q^x + (\varrho_q + s) \Delta u_d^x - \Delta u_f^x - u_0 \sin \vartheta_0 \Delta \vartheta - (u_{q0}^x + u_{f0}^x) s &= 0 \\ \mu_d s \Delta u_q^x + (\varrho_f + s) \Delta u_f^x &= 0 \\ s \Delta \vartheta &= -s = 0 \\ \lambda u_{d0}^x \Delta u_q^x + (u_{f0}^x + \lambda u_{q0}^x) \Delta u_d^x + u_{d0}^x \Delta u_f^x + X_q \omega_s H_J s s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.306)$$

Należy rozwiązać układ równań (7.306). Początkowymi wartościami współrzędnych tego układu są wzięte z przeciwnym znakiem współrzędne układu równań (7.304) dla stanu ustalonego.

Spełnienie układu równań (7.304) przez zespół współrzędnych stanowi warunek możliwości istnienia stanu ustalonego. Dla maszyny z biegunami utajonymi ($\lambda = 0$; $X_q = X_d = X$) z tego układu równań otrzymuje się

$$\frac{M_0}{u_{f0} u_0} Z - \frac{u_{f0}}{u_0} \sin \xi = \sin (\vartheta_0 - \xi) \quad (7.307)$$

przy czym

$$\xi = \arctg \varrho_d$$

$$Z = \frac{X}{\cos \xi} = \sqrt{X^2 + R_l^2}$$

Ponieważ zawsze jest $|\sin (\vartheta_0 - \xi)| \leq 1$, wobec tego stan ustalony jest możliwy tylko przy spełnionym warunku

$$\frac{u_{f0}^2}{Z} \sin \xi - \frac{u_{f0} u_0}{Z} \leq M_0 \leq \frac{u_{f0}^2}{Z} \sin \xi + \frac{u_{f0} u_0}{Z} \quad (7.308)$$

W przypadku dużej maszyny z biegunami utajonymi, np. dużego turbogeneratorsa jest $\varrho_d \approx 0$, $\sin \xi \approx 0$, $Z \approx X_d$, więc

$$\frac{-u_{f0} u_0}{X_d} \leq M_0 \leq \frac{u_{f0} u_0}{X_d} \quad (7.309)$$

Ponieważ wartość względna napięcia wzbudzenia w stanie ustalonym u_{f0} jest równa wartości względnej napięcia indukowanego od strumienia wzbudzenia w stanie ustalonym u_{if0} , zatem warunek zaistnienia stanu ustalonego dużej maszyny cylindrycznej może być zapisany w postaci

$$\frac{-u_{if0} u_0}{X_d} \leq M_0 \leq \frac{u_{if0} u_0}{X_d} \quad (7.310)$$

co jest zgodne z rozważaniami prowadzonymi w p. 7.87 i z rys. 7.21.

Podobnie można uzyskać warunki zakresu pracy stabilnej maszyny synchronicznej z biegunami wydajnymi.

7.11.2.2. Równanie charakterystyczne i jego pierwiastki

Równanie charakterystyczne układu równań (7.306) ma postać

$$D(s) = \begin{vmatrix} \varrho_d + s & 1 & s & -u_0 \cos \vartheta_0 & \Delta u_{d0} \\ -1 & \varrho_q + s & -1 & -u_0 \sin \vartheta_0 & -(u_{q0}^x + u_{f0}^x) \\ \mu_d s & 0 & \varrho_f + s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ \lambda u_{d0}^x & u_{f0}^x + \lambda u_{q0}^x & u_{d0}^x & 0 & Ks \end{vmatrix} = 0 \quad (7.311)$$

przy czym

$$K = X_q \omega_s H_f$$

W formie rozwiniętej równanie charakterystyczne ma postać

$$s^5 + a_1 s^4 + a_2 s^3 + a_3 s^2 + a_4 s + a_5 = 0 \quad (7.312)$$

Współczynniki równania (7.312) dla maszyn z biegunami utajonymi ($\lambda = 0$, $q_d = q_a$) są następujące:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= q'_f + q_d + q'_d \\ a_2 &= 1 + \chi^2 + q_d q'_d + 2q_d q'_f \\ a_3 &= (1 + q_d^2 + A) q'_f + (q_d + q'_d) \chi^2 - q'_d (\mu_d B + \sigma_d E) \\ a_4 &= (1 + q_d q'_d) \chi^2 - (\mu_d B + E) q_d q'_d + q_d q'_f (2A - E) \\ a_5 &= q'_f [(1 + q_d^2) A - q_d^2 E] \end{aligned} \right\} \quad (7.313)$$

przy czym

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{u_{f0}^x (u_{q0}^x + u_{f0}^x)}{K} \\ B &= \frac{\mu_d}{\sigma_d} \frac{(u_{d0}^x)^2}{K} \\ E &= \frac{(u_{f0}^x)^2}{K} \\ \chi^2 &= A + B \end{aligned} \right\} \quad (7.314)$$

W równaniu (7.312) można przyjąć następujący podział wielkości małych:

- wielkości małe pierwszego rzędu χ , $q_d'^2$, q_d^2 , q_d , q_d' ;
- wielkości małe drugiego rzędu q'_f , χ^2 , A , B , E .

Pierwiastki równania (7.312) są następujące:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \alpha \\ s_{2,3} &= \beta \pm j\gamma \\ s_{4,5} &= \delta \pm j\nu \end{aligned} \right\} \quad (7.315)$$

przy czym przy pominięciu wielkości małych wyższego rzędu

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\approx -q'_f \frac{(1 + q_d^2) A - q_d^2 E}{(1 + q_d q'_d) \chi^2 - q_d q'_d (\mu_d B + E)} \\ \beta &\approx \frac{1}{2} \frac{u_0^2}{K} \left[q_d \varepsilon^2 - \frac{\mu_d}{\sigma_d} \Phi (\Phi + 2q_d \varepsilon) \left(\frac{q'_f}{\chi} - \frac{\mu_d}{\sigma_d} q_d \right) \right] \\ \gamma &\approx \sqrt{\chi^2 - \frac{q_d q'_d}{1 + q_d q'_d} (\mu_d B + E)} \approx \chi \\ \delta &\approx -\frac{1}{2} (q_d + q'_d) \\ \nu &\approx \sqrt{1 - \frac{(q_d - q'_d)^2}{4}} \end{aligned} \right\} \quad (7.316)$$

gdzie oznaczono

$$q'_f = \frac{q'_f}{\chi}; \quad \varepsilon = \frac{u_{f0}}{u_0}; \quad \Phi = \sin \vartheta_0 - q_d \cos \vartheta_0$$

Wielkość α , czyli pierwiastek s_1 , jest małą tego samego rzędu co wielkość $\varrho'_f = \frac{1}{\omega_s T_d}$, czyli wielkością rzędu jednej tysięcznej. Z grubym przybliżeniem można przyjmować $s_1 = \alpha \approx \varrho'_f \approx 0$.

Dla maszyn z biegunami wydawnymi współczynniki równania (7.312) są następujące:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \varrho'_f + \varrho_d + \varrho_q \\ a_2 &= 1 + \chi'^2 + \varrho'_d \varrho_q + \varrho'_f (\varrho'_d + \varrho_q) \\ a_3 &= (1 + \varrho_d \varrho_q + A' - \sigma_d \lambda B') \varrho'_f + (\varrho_d + \varrho'_d) A' - \varrho_d E' + 2\varrho_q \eta B' \\ a_4 &= \chi'^2 + \varrho_d \varrho'_d (A' - E') + \eta \varrho_q^2 B' + \varrho'_f [\varrho_d (2A' - E') - 2\lambda \sigma_d B'] \\ a_5 &= \varrho'_f [(1 + \varrho_d^2) A' - \varrho_d^2 E' - \lambda (1 + \varrho_q^2) \sigma_d B'] \end{aligned} \right\} \quad (7.317)$$

przy czym

$$\left. \begin{aligned} A' &= \frac{(u_{f0} + u_{q0})(u_{f0} + \lambda u_{q0})}{K} \\ B' &= \frac{u_{d0}^2}{\sigma_d K} \\ E' &= \frac{u_{f0}(u_{f0} + \lambda u_{q0})}{K} \\ \eta &= \mu_d - \lambda = \frac{X_q}{X_d} - \sigma_d \\ \chi'^2 &= A' + \eta B' \end{aligned} \right\} \quad (7.318)$$

Pierwiastki równania charakterystycznego są wyrażone w takiej postaci jak pierwiastki (7.315) równania charakterystycznego dla maszyn z biegunami utajonymi, lecz składniki tych pierwiastków są następujące:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &\approx -\varrho'_f \frac{A' + \varrho_d^2 (A' - E') - \lambda (1 + \varrho_q^2) \sigma_d B'}{\chi'^2 (1 + \varrho'_d \varrho_q) - \varrho_d \varrho'_d E' - (\varrho_d \varrho'_d - \varrho_q^2) \eta B'} \\ \beta &\approx \frac{1}{2} \frac{u_{d0}^2}{K} \left\{ \varrho_d (1 - \lambda) \varepsilon^2 - \right. \\ &\quad - \left[(1 - \lambda) \frac{\mu_d}{\sigma_d} \frac{\varrho'_f}{\chi'^2} - \frac{\eta^2}{\sigma_d^2} \varrho_q \right] \Phi_d (\Phi_d + 2\varrho_d \varepsilon) + \\ &\quad \left. + \lambda \Phi'_q [2\varrho_d \varepsilon + (\varrho_q - \varrho_d) \Phi'_q] \left[\frac{1 - (\varrho'_d)^2}{1 + \varrho'_d \varrho_q} + \mu_d \varrho'_d \frac{\varrho'_f}{\chi'^2} \right] \right\} \\ \gamma &= \sqrt{\chi'^2 - \frac{\varrho_d \varrho'_d E' + (\varrho_d \varrho'_d - \varrho_q^2) \eta B'}{1 + \varrho'_d \varrho_q}} \approx \chi' \\ \delta &\approx -\frac{1}{2} (\varrho'_d + \varrho_q) \\ \nu &\approx 1 - \frac{1}{8} (\varrho'_d - \varrho_q)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.319)$$

przy czym wprowadzono oznaczenia

$$\Phi_d = \sin \vartheta_0 - \varrho_d \cos \vartheta_0; \quad \Phi'_d = \cos \vartheta_0 + \varrho_d \sin \vartheta_0$$

Do wyznaczenia pierwiastków równania piątego stopnia (7.312) potrzebna jest możliwość oszacowania, jak małe są jedne wielkości w porównaniu z innymi. Wobec trudności rozwiązania tego równania i uzyskania rozwiązania układu równań (7.306) często określa się charakter małych zakłóceń na podstawie odpowiednich kryteriów stabilności.

7.11.2.3. Postać kanoniczna równania charakterystycznego

Układ równań (7.306) można przekształcić wprowadzając zamiast zmiennych u_q^x , u_d^x , u_f^x nowe zmienne

$$\Psi_d = u_q^x + u_f^x$$

$$\Psi_q = u_d^x$$

$$\Psi_f = u_f^x + \mu_d u_q^x$$

Wielkości Ψ_d i Ψ_q oznaczają strumienie magnetyczne skojarzone z uzwojeniami stojana odpowiednio w osi podłużnej i w osi poprzecznej, a wielkość Ψ_f oznacza strumień magnetyczny skojarzony z uzwojeniami wirnika. Układ równań (7.306) napisany dla zmiennych Ψ_d , Ψ_q , Ψ_f uzyskuje postać kanoniczną. Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\Delta \Psi_d = x_1; \quad \Delta \Psi_q = x_2; \quad \Delta \Psi_f = x_3; \quad \Delta \vartheta = x_4; \quad s = x_5$$

otrzyma się układ równań

$$\left. \begin{aligned} (\varrho'_d + s) x_1 + x_2 - \varrho'_d x_3 - u_0 \cos \vartheta_0 x_4 + \Psi_{q0} x_5 &= 0 \\ -x_1 + (\varrho_q + s) x_2 - u_0 \sin \vartheta_0 x_4 - \Psi_{d0} x_5 &= 0 \\ -\mu_d \varrho'_f x_1 + (\varrho'_f + s) x_3 &= 0 \\ s x_4 - x_5 &= 0 \\ -g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + s x_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.320)$$

w którym oznaczono

$$g_1 = \frac{\mu_d}{\sigma_d K} \Psi_{q0}; \quad g_2 = \frac{1}{\sigma_d K} (\Psi_{f0} - \mu_d \Psi_{d0}) = \frac{u_{f0}}{K};$$

$$g_3 = \frac{1}{\sigma_d K} \Psi_{q0} = \frac{g_1}{\mu_d}$$

Ogólne rozwiązanie tego układu równań względem dowolnej niewiadomej ma postać

$$x_i = \sum_{k=1}^5 A_{ki} e^{s_k t} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (7.321)$$

przy czym: s_k – k -ty pierwiastek równania charakterystycznego układu równań (7.320)

$$A_{ki} = \frac{1}{\frac{dD(s)}{ds}} \sum_{l=1}^5 x_{l0} M_{li} \Big|_{s=s_k} \quad (7.322)$$

przy czym: M_{li} – minor i -tej kolumny (tzn. kolumny, której numer jest równy numerowi szukanej niewiadomej) i l -tego wiersza równania charakterystycznego (przy założeniu, że nie ma pierwiastków wielokrotnych). Należy zaznaczyć, że wyznacznik charakterystyczny może być rozłożony według elementów i -tej kolumny

$$D(s) = \sum_{l=1}^5 a_{li} M_{li} \quad (7.323)$$

Przy obliczaniu wyrażenia A_{ki} według wzoru (7.322) można korzystać z wyznacznika $\bar{D}_i(s)$, który otrzymuje się z wyznacznika $D(s)$ przez zastąpienie elementów i -tej kolumny początkowymi wartościami odpowiednich zmiennych, czyli przez podstawienie x_{10} zamiast a_{1i} , x_{20} zamiast a_{2i} itd. Wtedy rozwiązaniem układu jednorodnych, liniowych równań różniczkowych o postaci kanonicznej jest wyrażenie

$$x_i = \sum_{k=1}^5 \frac{\bar{D}_i(s)}{\frac{dD(s)}{ds}} e^{s\tau} \Big|_{s=s_k} \quad (7.324)$$

Wyznacznik charakterystyczny kanonicznej postaci rozpatrywanego układu równań różniczkowych ma formę

$$D(s) = \begin{vmatrix} \varrho'_d + s & 1 & -\varrho'_d & -u_0 \cos \vartheta_0 & \psi_{q0} \\ -1 & \varrho'_q + s & 0 & -u_0 \sin \vartheta_0 & -\psi_{d0} \\ -\mu_d \varrho'_f & 0 & \varrho'_f + s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ -\mu_d g_3 & g_2 & g_3 & 0 & s \end{vmatrix} \quad (7.325)$$

Po zamianie zmiennych wyznacznik charakterystyczny nowego układu jest iloczynem wyznacznika starego układu i wyznacznika charakterystycznego transformacji liniowej, określającej zamianę zmiennych. Transformacja ta jest określona układem równań

$$\left. \begin{aligned} u_q^x &= \frac{1}{\sigma_d} \psi_d - \frac{1}{\sigma_d} \psi_f \\ u_d^x &= \psi_q \\ u_f^x &= -\frac{\mu_d}{\sigma_d} \psi_d + \frac{1}{\sigma_d} \psi_f \end{aligned} \right\} \quad (7.326)$$

którego wyznacznikiem jest

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_d} & 0 & -\frac{1}{\sigma_d} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\mu_d}{\sigma_d} & 0 & \frac{1}{\sigma_d} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma_d} \quad (7.327)$$

Wyznacznik charakterystyczny układu równań o postaci kanonicznej jest równy iloczynowi wyznacznika charakterystycznego podstawowego układu równań i stałego współczynnika.

Pierwiastki wyznacznika (7.325) są równe pierwiastkom wyznacznika (7.311), określonym wzorami (7.315) oraz wzorami (7.316) lub (7.319). Dla potrzeb prowadzonych rozważań wystarczy przyjąć następujące wartości składników pierwiastków, określonych wzorami (7.316)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\varrho'_f \frac{A}{\chi^2} \\ \beta &= -\varrho'_f \frac{B}{2\chi^2} \\ \gamma &= \chi \\ \delta &= -\frac{\varrho_d + \varrho'_d}{2} \\ v^2 &= 1 - \frac{(\varrho_d - \varrho'_d)^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad (7.328)$$

Równanie charakterystyczne o pierwiastkach określonych wzorami (7.315) ma postać

$$D(s) = (s - \alpha) [(s - \beta)^2 + \chi^2 (s - \delta)^2 + v^2] = 0$$

skąd

$$\begin{aligned} \frac{dD(s)}{ds} &= [(s - \beta)^2 + \chi^2] [(s - \delta)^2 + v^2] + 2(s - \alpha)(s - \beta) [(s - \delta)^2 + v^2] + \\ &+ 2(s - \alpha)(s - \delta) [(s - \beta)^2 + \chi^2] \end{aligned}$$

Wartości $\frac{dD(s)}{ds}$ dla poszczególnych pierwiastków obliczone przy pominięciu wielkości małych wyższego rzędu są następujące:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=\alpha} &\approx \chi^2 \\ \frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=\beta \pm j\chi} &\approx -2\chi^2 \left(1 \pm j \frac{\alpha - \beta}{\chi} \right) \\ \frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=\delta \pm jv} &\approx 2(1 \pm j3\delta) \end{aligned} \right\} \quad (7.329)$$