

otrzymuje się komplet równań w wartościach bezwzględnych w postaci

$$\left. \begin{aligned} -[u_B] &= [Z_{Bt}] [i_B] \\ M &= J \frac{d\omega}{dt} + D_r \omega + \frac{3}{2} [(L_d i_d + M_{ld} i_f + M_{ld} i_D) i_q - (L_q i_q + M_{lq} i_Q) i_d] \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

albo w postaci

$$\left. \begin{aligned} -[u_B] &= [Z_{Bt}] [i_B] \\ M &= J \frac{d\omega}{dt} + D_r \omega + \frac{3}{2} (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) \end{aligned} \right\} \quad (7.71)$$

## 7.5. WSPÓŁCZYNNIKI SPRĘŻENIA I ROZPROSZENIA OBWODÓW

W niektórych postaciach równań równowagi, a zwłaszcza w rozwiązaniach dla stanów dynamicznych występują zespoły oznaczeń poszczególnych indukcyjności, które można interpretować fizycznie jako współczynniki sprzężenia magnetycznego pewnych obwodów  $\mu$  albo współczynniki rozproszenia magnetycznego  $\sigma$ . Po wprowadzeniu tych oznaczeń uzyskuje się większą przejrzystość zapisu równań i odpowiedzi.

Jeśli w maszynie płynie tylko prąd  $i_d$  (wszystkie inne prądy są równe zero), to na podstawie (7.37) strumień magnetyczny skojarzony z obwodem podłużnym stojana (w tym przypadku tylko od prądu  $i_d$ ) i strumień magnetyczny skojarzony z podłużnym obwodem wzbudzenia (wirnika) są następujące:

$$\begin{aligned} \Psi_d &= \Psi_{dd} = L_d i_d \\ \Psi_f &= \Psi_{fd} = \frac{3}{2} M_{lf} i_d \end{aligned} \quad (7.72)$$

Strumień magnetyczny skojarzony przypadający na jeden zwój, czyli tak zwany średni strumień magnetyczny od prądu  $i_d$  skojarzony z jednym zwojem obwodu podłużnego stojana

$$\Phi_{dd} = \frac{\Psi_{dd}}{z_s} = \frac{L_d i_d}{z_s}$$

Średni strumień magnetyczny od prądu  $i_d$  skojarzony z jednym zwojem obwodu wzbudzenia (wirnika)

$$\Phi_{fd} = \frac{\Psi_{fd}}{z_r} = \frac{3}{2} \frac{M_{lf} i_d}{z_r}$$

Średni strumień rozproszony od prądu  $i_d$

$$\Phi_{dt} = \Phi_{dd} - \Phi_{fd} = \left( \frac{L_d}{z_s} - \frac{3}{2} \frac{M_{lf}}{z_r} \right) i_d$$

Współczynnik sprzężenia obwodu podłużnego stojana z obwodem wzbudzenia

$$\mu_{df} = \frac{\Phi_{fd}}{\Phi_{dd}} = \frac{3}{2} \frac{M_{lf}}{L_d} \frac{z_s}{z_r} \quad (7.73)$$

Współczynnik rozproszenia obwodu podłużnego stojana

$$\sigma_{df} = \frac{\Phi_{dl}}{\Phi_{dd}} = 1 - \mu_{df} = 1 - \frac{3}{2} \frac{M_{lf}}{L_d} \frac{z_s}{z_r} \quad (7.74)$$

Jeśli w maszynie płynie tylko prąd  $i_f$ , to

$$\left. \begin{aligned} \Psi_d &= \Psi_{df} = M_{lf} i_f \\ \Psi_f &= \Psi_{ff} = L_f i_f \end{aligned} \right\} \quad (7.75)$$

Średni strumień od prądu  $i_f$  skojarzony z jednym zwojem obwodu wzbudzenia

$$\Phi_{ff} = \frac{\Psi_{ff}}{z_r} = \frac{L_f i_f}{z_r}$$

Średni strumień od prądu  $i_f$  skojarzony z jednym zwojem obwodu podłużnego stojana

$$\Phi_{df} = \frac{\Psi_{df}}{z_s} = \frac{M_{lf} i_f}{z_s}$$

Średni strumień rozproszony od prądu  $i_f$

$$\Phi_{fl} = \Phi_{ff} - \Phi_{df} = \left( \frac{L_f}{z_r} - \frac{M_{lf}}{z_s} \right) i_f$$

Współczynnik sprzężenia obwodu wzbudzenia z podłużnym obwodem stojana

$$\mu_{fd} = \frac{\Phi_{df}}{\Phi_{ff}} = \frac{z_r}{z_s} \frac{M_{lf}}{L_f} \quad (7.76)$$

Współczynnik rozproszenia obwodu wzbudzenia

$$\sigma_{fd} = \frac{\Phi_{fl}}{\Phi_{ff}} = 1 - \mu_{fd} = 1 - \frac{z_r}{z_s} \frac{M_{lf}}{L_f} \quad (7.77)$$

Współczynnik sprzężenia układu złożonego z obwodu podłużnego stojana i obwodu wzbudzenia

$$\mu_d = \mu_{df} \mu_{fd} = \frac{3}{2} \frac{M_{lf}^2}{L_d L_f} \quad (7.78)$$

Współczynnik rozproszenia układu złożonego z obwodu podłużnego stojana i obwodu wzbudzenia

$$\sigma_d = 1 - \mu_d = 1 - \frac{3}{2} \frac{M_{lf}^2}{L_d L_f} \quad (7.79)$$

Analogicznie określa się:

- współczynnik sprzężenia układu złożonego z obwodu podłużnego stojana i obwodu podłużnego tłumienia

$$\mu_D = \frac{3}{2} \frac{M_{ID}^2}{L_d L_D} \quad (7.80)$$

- współczynnik rozproszenia układu złożonego z obwodu podłużnego stojana i obwodu podłużnego tłumienia

$$\sigma_D = 1 - \mu_D = 1 - \frac{3}{2} \frac{M_{ID}^2}{L_d L_D} \quad (7.81)$$

- współczynnik sprzężenia układu złożonego z obwodu poprzecznego stojana i obwodu poprzecznego tłumienia

$$\mu_Q = \frac{3}{2} \frac{M_{IQ}^2}{L_q L_Q} \quad (7.82)$$

- współczynnik rozproszenia układu złożonego z obwodu poprzecznego stojana i obwodu poprzecznego tłumienia

$$\sigma_Q = 1 - \mu_Q = 1 - \frac{3}{2} \frac{M_{IQ}^2}{L_q L_Q} \quad (7.83)$$

- współczynnik sprzężenia układu złożonego z obwodu wzbudzenia i obwodu podłużnego tłumienia

$$\mu_{kf} = \frac{M_{fD}^2}{L_f L_D} \quad (7.84)$$

- współczynnik rozproszenia układu złożonego z obwodu wzbudzenia i obwodu podłużnego tłumienia

$$\sigma_{kf} = 1 - \mu_{kf} \quad (7.85)$$

Ponadto wprowadza się w sposób formalny współczynniki

$$k_1 = \sqrt{\frac{\mu_d \mu_{kf}}{\mu_D}} = \frac{M_{If} M_{fD}}{L_f M_{ID}} \quad (7.86)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\mu_D \mu_{kf}}{\mu_d}} = \frac{M_{ID} M_{fD}}{L_D M_{If}} \quad (7.87)$$

Oczywista jest także słuszność związku

$$k_1 k_2 = \mu_{kf} \quad (7.88)$$

Analogicznie określa się:

- współczynnik sprzężenia układu złożonego z obwodu podłużnego stojana i obwodu podłużnego tłumienia

$$\mu_D = \frac{3}{2} \frac{M_{ID}^2}{L_d L_D} \quad (7.80)$$

- współczynnik rozproszenia układu złożonego z obwodu podłużnego stojana i obwodu podłużnego tłumienia

$$\sigma_D = 1 - \mu_D = 1 - \frac{3}{2} \frac{M_{ID}^2}{L_d L_D} \quad (7.81)$$

- współczynnik sprzężenia układu złożonego z obwodu poprzecznego stojana i obwodu poprzecznego tłumienia

$$\mu_Q = \frac{3}{2} \frac{M_{IQ}^2}{L_q L_Q} \quad (7.82)$$

- współczynnik rozproszenia układu złożonego z obwodu poprzecznego stojana i obwodu poprzecznego tłumienia

$$\sigma_Q = 1 - \mu_Q = 1 - \frac{3}{2} \frac{M_{IQ}^2}{L_q L_Q} \quad (7.83)$$

- współczynnik sprzężenia układu złożonego z obwodu wzbudzenia i obwodu podłużnego tłumienia

$$\mu_{kf} = \frac{M_{fD}^2}{L_f L_D} \quad (7.84)$$

- współczynnik rozproszenia układu złożonego z obwodu wzbudzenia i obwodu podłużnego tłumienia

$$\sigma_{kf} = 1 - \mu_{kf} \quad (7.85)$$

Ponadto wprowadza się w sposób formalny współczynniki

$$k_1 = \sqrt{\frac{\mu_d \mu_{kf}}{\mu_D}} = \frac{M_{If} M_{fD}}{L_f M_{ID}} \quad (7.86)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\mu_D \mu_{kf}}{\mu_d}} = \frac{M_{ID} M_{fD}}{L_D M_{If}} \quad (7.87)$$

Oczywista jest także słuszność związku

$$k_1 k_2 = \mu_{kf} \quad (7.88)$$

Wprowadza się pojęcie czasu synchronicznego  $\tau = \omega_s t$ . Za jednostkę odniesienia czasu przyjmuje się

$$t_{(J)} = \frac{1}{2\pi f_s} = \frac{1}{\omega_s} \quad (7.97)$$

przy czym:  $f_s, \omega_s$  oznaczają odpowiednio częstotliwość synchroniczną i pulsację synchroniczną, która przy  $2p = 2$  jest równa prędkości kątowej synchronicznej wirnika.

Wobec tego czas synchroniczny

$$\tau = \omega_s t = \frac{t}{t_{(J)}} \quad (7.98)$$

oznacza wartość względną czasu. Na podstawie (7.98) można napisać zależności między różniczkami i symbolami różniczkowania

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{\omega_s} d\tau \\ \frac{d}{dt} &= \omega_s \frac{d}{d\tau} \end{aligned} \quad (7.99)$$

Po zastąpieniu w macierzy impedancji  $[Z_{Bt}]$  określonej wzorem (7.69) symbolu  $\frac{d}{dt}$  symbolem  $\omega_s \frac{d}{d\tau}$ , a wielkości  $\frac{dy}{dt}$  – zgodnie z (7.94) – wielkością  $(1+s)\omega_s$ , otrzyma się iloczyny poszczególnych indukcyjności i prędkości synchronicznej  $\omega_s$ , czyli reaktancje.

Wprowadza się definicje reaktancji:

- $X_0 = \omega_s L_0$  – reaktancja zerowa,
- $X_d = \omega_s L_d$  – reaktancja synchroniczna podłużna,
- $X_q = \omega_s L_q$  – reaktancja synchroniczna poprzeczna,
- $X_f = \omega_s L_f$  – reaktancja wzbudzenia,
- $X_{\mu f} = \omega_s M_{If}$  – reaktancja magnesowania obwodu wzbudzenia,
- $X_{\mu d} = \omega_s M_{Id}$  – reaktancja magnesowania obwodu podłużnego tłumienia,
- $X_{\mu q} = \omega_s M_{Iq}$  – reaktancja magnesowania obwodu poprzecznego tłumienia.

Wtedy otrzymuje się układ równań (przy pominięciu tarcia)

$$\left. \begin{aligned} -[u_{Bt}] &= [Z_{Bt}] [i_B] \\ M &= J\omega_s^2 \frac{ds}{d\tau} + \frac{3}{2} [(L_d i_d + M_{If} i_f + M_{Id} i_D) i_q - (L_q i_q + M_{Iq} i_Q) i_d] \end{aligned} \right\} \quad \text{albo}$$

$$\omega_s M = J\omega_s^2 \frac{ds}{dt} + \frac{3}{2} [(X_d i_d + X_{\mu f} i_f + X_{\mu d} i_D) i_q - (X_q i_q + X_{\mu q} i_Q) i_d] \quad (7.100)$$

przy czym macierz impedancji

$$[Z_{B\tau i}] =$$

$R_i + X_d \frac{d}{d\tau}$	$(1+s) X_q$		$X_{\mu f} \frac{d}{d\tau}$	$X_{\mu D} \frac{d}{d\tau}$	$(1+s) X_{\mu Q}$
$-(1+s) X_d$	$R_i + X_q \frac{d}{d\tau}$		$-(1+s) X_{\mu f}$	$-(1+s) X_{\mu D}$	$X_{\mu Q} \frac{d}{d\tau}$
		$R_i + X_0 \frac{d}{d\tau}$			
$\mu_d X_d \frac{d}{d\tau}$			$\frac{M_{1f}}{L_f} R_f + X_{\mu f} \frac{d}{d\tau}$	$k_1 X_{\mu D} \frac{d}{d\tau}$	
$\mu_D X_d \frac{d}{d\tau}$			$k_2 X_{\mu f} \frac{d}{d\tau}$	$\frac{M_{1D}}{L_D} R_D + X_{\mu D} \frac{d}{d\tau}$	
	$\mu_Q X_q \frac{d}{d\tau}$				$\frac{M_{1Q}}{L_Q} R_Q +$ $+ X_{\mu Q} \frac{d}{d\tau}$

(7.101)

macierz napięć

$$[u_{B\tau}] = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \\ -\frac{M_{1f}}{L_f} u_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.102)$$

macierz prądów  $[i_B]$  – według wzoru (7.28).

Stosunki poszczególnych rezystancji do odpowiednich reaktancji nazywa się *dekrementami tłumienia*:

$$\varrho_0 = \frac{R_0}{X_0} - \text{obwodu zerowego,}$$

$$\varrho_d = \frac{R_d}{X_d} - \text{obwodu podłużnego twornika (stojana),}$$

$$\varrho_q = \frac{R_q}{X_q} - \text{obwodu poprzecznego twornika (stojana),}$$

$$\varrho_f = \frac{R_f}{X_f} = \frac{R_f}{\omega_s L_f} = \frac{\frac{M_{1f}}{L_f} R_f}{X_{\mu f}} - \text{obwodu wzbudzenia,}$$

$$\varrho_D = \frac{R_D}{X_D} = \frac{R_D}{\omega_s L_D} = \frac{\frac{M_{1D}}{L_D} R_D}{X_{\mu D}} - \text{obwodu podłużnego tłumienia,}$$

$$\varrho_Q = \frac{R_Q}{X_Q} = \frac{R_Q}{\omega_s L_Q} = \frac{\frac{M_{1Q}}{L_Q} R_Q}{X_{\mu Q}} - \text{obwodu poprzecznego tłumienia.}$$

Po wprowadzeniu tych oznaczeń otrzymuje się układ równań równowagi dla bram elektrycznych

$$-[u_{B\tau}] = [Z_{B\tau}] [i_B] \quad (7.103)$$

przy czym macierz impedancji

$$[Z_{B\tau}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\varrho_d + \frac{d}{d\tau}\right) X_d & (1+s) X_q & & X_{\mu f} \frac{d}{d\tau} & X_{\mu D} \frac{d}{d\tau} & (1+s) X_{\mu Q} \\ -(1+s) X_d & \left(\varrho_q + \frac{d}{d\tau}\right) X_q & & -(1+s) X_{\mu f} & -(1+s) X_{\mu D} & X_{\mu Q} \frac{d}{d\tau} \\ & & \left(\varrho_o + \frac{d}{d\tau}\right) X_o & & & \\ \mu_d X_d \frac{d}{d\tau} & & & \left(\varrho_f + \frac{d}{d\tau}\right) X_{\mu f} & k_1 X_{\mu D} \frac{d}{d\tau} & \\ \mu_D X_d \frac{d}{d\tau} & & & k_2 X_{\mu f} \frac{d}{d\tau} & \left(\varrho_D + \frac{d}{d\tau}\right) X_{\mu D} & \\ & \mu_Q X_Q \frac{d}{d\tau} & & & & \left(\varrho_Q + \frac{d}{d\tau}\right) X_{\mu Q} \end{bmatrix} \quad (7.104)$$

Wprowadza się wielkości odniesienia i wyraża się wielkości elektryczne w wartościach względnych. Za jednostkę prądu twornika przyjmuje się amplitudę prądu znamionowego twornika, czyli

$$I_{(j)} = I_{Nm} \quad (7.105)$$

Wtedy wartość względna prądu twornika

$$i_{rel} = \frac{i}{I_{(j)}} = \frac{i}{I_{Nm}} \quad (7.106)$$

Za jednostkę napięcia twornika przyjmuje się amplitudę napięcia znamionowego twornika, czyli

$$U_{(j)} = U_{Nm} \quad (7.107)$$

Wtedy wartość względna napięcia twornika

$$u_{rel} = \frac{u}{U_{(j)}} = \frac{u}{U_{Nm}} \quad (7.108)$$

Jednostka impedancji

$$Z_{(j)} = Z_N = \frac{U_{Nm}}{I_{Nm}} = \frac{U_N}{I_N} \quad (7.109)$$

wartość względna impedancji (reaktancji, rezystancji)

$$Z_{rel} = \frac{Z}{Z_{(j)}} = \frac{Z}{Z_N} = \frac{u_{rel}}{i_{rel}} \quad (7.110)$$

Jednostką mocy jest moc znamionowa pozorna, czyli

$$S_{(j)} = S_N = 3U_N I_N = \frac{3}{2} U_{Nm} I_{Nm} \quad (7.111)$$

Wartość względna mocy

$$P_{rel} = \frac{P}{S_{(j)}} = \frac{P}{S_N} = \frac{P}{3U_N I_N} = \frac{2P}{3U_{Nm} I_{Nm}} \quad (7.112)$$

Jednostka momentu

$$M_{(j)} = \frac{S_N}{\omega_s} \quad (7.113)$$

wartość względna momentu

$$M_{rel} = \frac{M}{M_{(j)}} = \frac{\omega_s M}{S_N} \quad (7.114)$$

Jednostką napięcia wzbudzenia jest napięcie znamionowe wzbudzenia przy biegu jałowym, czyli

$$U_{f(j)} = U_{f0N} \quad (7.115)$$

Napięcie  $U_{f0N}$  jest to takie napięcie wzbudzenia, przy którym płynie prąd znamionowy wzbudzenia przy biegu jałowym  $I_{f0N}$ . Prąd znamionowy wzbudzenia przy biegu jałowym jest to prąd, przy którym maszyna synchroniczna przy biegu jałowym ma w tworniku napięcie znamionowe.

Jednostka prądu wzbudzenia

$$I_{f(j)} = I_{f0N} = \frac{U_{f0N}}{R_f} = \frac{U_{f(j)}}{R_f} \quad (7.116)$$



Wartość względna napięcia wzbudzenia

$$u_{frel} = \frac{u_f}{U_{f(j)}} = \frac{u_f}{U_{f0N}} \quad (7.117)$$

Wartość względna prądu wzbudzenia

$$i_{frel} = \frac{i_f}{I_{f(j)}} = \frac{i_f}{I_{f0N}} = \frac{i_f R_f}{U_{f0N}} \quad (7.118)$$

Należy ustalić związek między jednostką napięcia wzbudzenia i napięcia twornika. W tym celu rozpatruje się pierwsze, drugie i czwarte równanie napięć układu równań (7.100), w którym macierz impedancji jest określona wzorem (7.101). Przy biegu jałowym w stanie ustalonym, czyli przy  $s = 0$ ,  $i_d = i_q = i_D = i_Q = 0$  oraz  $i_f = \text{const}$ , równania te są następujące:

$$\left. \begin{aligned} u_d &= 0 \\ u_q &= X_{\mu f} i_f = \omega_s M_{lf} i_f \\ u_f &= R_f i_f \end{aligned} \right\} \quad (7.119)$$

skąd po wprowadzeniu oznaczenia  $u_{lf}$  na napięcie w tworniku indukowane w stanie ustalonym biegu jałowego, równe w tych warunkach napięciu poprzecznemu, otrzymuje się

$$u_{lf} = \omega_s M_{lf} i_f \quad (7.120)$$

oraz

$$u_{lf} = \frac{X_f}{R_f} \frac{M_{lf}}{L_f} u_f \quad (7.121)$$

We wzorze (7.121) napięcie  $u_{lf}$  jest wyrażone w jednostkach napięcia twornika, a napięcie  $u_f$  – w jednostkach napięcia wzbudzenia.

Dla uzyskania zapisu macierzowego układu równań napięciowych (7.103) w wartościach względnych wykonuje się następujące działania:

(1) Wyrazy pierwszej, drugiej, trzeciej, piątej i szóstej kolumny, będącej wynikiem mnożenia macierzy  $[Z_{Br}] [i_B]$  dzieli się przez iloczyn  $Z_{(j)} I_{(j)}$  równoważny napięciu  $U_{(j)}$ .

(2) Wyrazy czwartej kolumny tej macierzy dzieli się przez  $\omega_s M_{lf} i_{f(j)}$  równoważne napięciu  $U_{(j)}$  i otrzymuje się wyrażenia typu

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{X_{\mu f}}{\omega_s M_{lf}} \cdot \frac{i_f}{i_{f(j)}} \right) = \frac{d}{d\tau} (1 \cdot i_{frel})$$

albo

$$-(1+s) \frac{X_{\mu f}}{\omega_s M_{lf}} \cdot \frac{i_f}{i_{f(j)}} = -(1+s) 1 \cdot i_{frel}$$

Pozostawienie w tych wyrażeniach liczby 1 ułatwia sprawdzenie wymiarów.

(3) Wyrazy w pierwszym, drugim i trzecim wierszu macierzy kolumnowej napięć dzieli się przez  $U_{(j)}$ , a wyraz w czwartym wierszu tej macierzy dzieli się przez równoważne temu napięciu wyrażenie

$$\frac{X_f}{R_f} \frac{M_{lf}}{L_f} U_{f(j)}$$

Dla uzyskania zapisu w wartościach względnych równania momentów (7.100) wykonuje się następujące działania:

(1) Pierwszy człon prawej strony równania dzieli się przez  $S_{(j)} = S_N$  i otrzymuje się wyrażenie

$$J \frac{\omega_s^2}{S_{(j)}} \frac{ds}{dt}$$

Po wprowadzeniu stałej inercyjnej zdefiniowanej jako

$$H_J = \frac{J \omega_s^2}{S_N} \quad (7.122)$$

otrzymuje się wyrażenie  $H_J \frac{ds}{dt}$  albo  $H_J \omega_s \frac{ds}{d\tau}$ .

(2) Drugi człon dzieli się przez równoważne mocy znamionowej wyrażenie

$$\frac{3}{2} I_{Nm} Z_N I_{Nm} = \frac{3}{2} I_{(j)} Z_{(j)} I_{(j)}$$

i otrzymuje się:

– z pierwszego składnika

$$\frac{\frac{3}{2} X_d i_d i_q}{\frac{3}{2} Z_{(j)} I_{(j)} I_{(j)}} = X_{d \text{ rel}} i_{d \text{ rel}} i_{q \text{ rel}}$$

– z drugiego składnika

$$\frac{\frac{3}{2} X_{\mu f} i_f i_q}{\frac{3}{2} I_{(j)} Z_{(j)} I_{(j)}} = \frac{\frac{3}{2} \omega_s M_{lf} i_f i_q}{\frac{3}{2} U_{(j)} I_{(j)}} = \frac{\omega_s M_{lf} i_f i_q}{\omega_s M_{lf} I_{f(j)} I_{(j)}} = 1 i_{f \text{ rel}} i_{q \text{ rel}}$$

– z trzeciego składnika

$$\frac{\frac{3}{2} X_{\mu D} i_D i_q}{\frac{3}{2} I_{(j)} Z_{(j)} I_{(j)}} = X_{\mu D \text{ rel}} i_{D \text{ rel}} i_{q \text{ rel}}$$

– z czwartego składnika

$$\frac{\frac{3}{2} X_q i_q i_d}{\frac{3}{2} I_{(j)} Z_{(j)} I_{(j)}} = X_{q \text{ rel}} i_{q \text{ rel}} i_{d \text{ rel}}$$

– z piątego składnika

$$\frac{\frac{3}{2} X_{\mu Q} i_Q i_d}{\frac{3}{2} I_{(J)} Z_{(J)} I_{(J)}} = X_{qQ \text{ rel}} i_{q \text{ rel}} i_{d \text{ rel}}$$

(3) Lewą stronę równania momentów dzieli się przez równoważne mocy znamionowej wyrażenie  $\omega_s M_N = \omega_s M_{(J)}$  i otrzymuje się

$$\frac{\omega_s M}{\omega_s M_{(J)}} = M_{\text{rel}}$$

Przy zachowaniu indeksów rel oznaczających wartości względne przy symbolach macierzy a po opuszczeniu (dla uproszczenia zapisu) tych symboli przy oznaczeniach poszczególnych wielkości otrzymuje się układ równań równowagi w wartościach względnych

$$\left. \begin{aligned} -[u_{B\tau \text{ rel}}] &= [Z_{B\tau \text{ rel}}] [i_{B\tau \text{ rel}}] \\ M &= H_J \omega_s \frac{ds}{d\tau} + (X_d i_d + 1i_f + X_{\mu D} i_D) i_q - (X_q i_q + X_{\mu Q} i_Q) i_d \\ \text{albo} \\ M &= H_J \frac{ds}{dt} + (X_d i_d - 1i_f + X_{\mu D} i_D) - (X_q i_q + X_{\mu Q} i_Q) i_d \\ \text{albo} \\ M &= H_J \frac{ds}{dt} + (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) \end{aligned} \right\} \quad (7.123)$$

w którym

$$[u_{B\tau \text{ rel}}] = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \\ -e_f u_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.124)$$

$$[i_{B\tau \text{ rel}}] = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (7.125)$$

$$[Z_{d\tau \text{ rel}}] =$$

$\left(q_d + \frac{d}{d\tau}\right) X_d$	$(1+s) X_q$		$1 \frac{d}{d\tau}$	$X_{\mu D} \frac{d}{d\tau}$	$(1+s) X_{\mu Q}$
$-(1+s) X_d$	$\left(q_q + \frac{d}{d\tau}\right) X_q$		$-(1+s) 1$	$-(1+s) X_{\mu D}$	$X_{\mu Q} \frac{d}{d\tau}$
		$\left(q_0 + \frac{d}{d\tau}\right) X_0$			
$\mu_d X_d \frac{d}{d\tau}$			$\left(q_f + \frac{d}{d\tau}\right) 1$	$k_1 X_{\mu D} \frac{d}{d\tau}$	
$\mu_D X_d \frac{d}{d\tau}$			$k_2 1 \frac{d}{d\tau}$	$\left(q_D + \frac{d}{d\tau}\right) X_{\mu D}$	
	$\mu_Q X_q \frac{d}{d\tau}$				$\left(q_Q + \frac{d}{d\tau}\right) X_{\mu Q}$

(7.126)

Napięcia na reaktancjach są przesunięte o kąt  $\pi/2$  względem odpowiednich prądów. Wprowadza się następujące oznaczenia napięć na reaktancjach:

- napięcie poprzeczne na reaktancji synchronicznej podłużnej od prądu podłużnego twornika

$$u_q^x = X_d i_d$$

- napięcie podłużne na reaktancji synchronicznej poprzecznej od prądu poprzecznego twornika

$$u_d^x = X_q i_q$$

- napięcie zerowe na reaktancji zerowej od prądu zerowego

$$u_0^x = X_0 i_0$$

- napięcie poprzeczne na reaktancji magnesowania obwodu wzbudzenia od prądu wzbudzenia

$$u_f^x = X_{\mu f} i_f$$

- napięcie (poprzeczne) w obwodzie  $D$  na reaktancji magnesowania obwodu podłużnego tłumienia od prądu w obwodzie podłużnym tłumienia

$$u_D^x = X_{\mu D} i_D$$

- napięcie (podłużne) w obwodzie  $Q$  na reaktancji magnesowania obwodu poprzecznego tłumienia od prądu w obwodzie poprzecznym tłumienia

$$u_Q^x = X_{\mu Q} i_Q$$

Wtedy układ równań równowagi ma postać

$$\left. \begin{aligned} -[u_{Br \text{ rel}}] &= [K_{Br \text{ rel}}][u_{Br \text{ rel}}^x] \\ M &= H_J \omega_s \frac{ds}{d\tau} + \frac{1}{X_q} (u_q^x + u_f^x + u_D^x) u_d^x - \frac{1}{X_d} (u_D^x + u_Q^x) u_q^x \end{aligned} \right\} \quad (7.127)$$

przy czym macierz współczynników

$$[K_{Br \text{ rel}}] =$$

$\left(\varrho_d + \frac{d}{d\tau}\right)$	$(1+s)$		$\frac{d}{d\tau}$	$\frac{d}{d\tau}$	$(1+s)$
$-(1+s)$	$\left(\varrho_q + \frac{d}{d\tau}\right)$		$-(1+s)$	$-(1+s)$	$\frac{d}{d\tau}$
		$\left(\varrho_0 + \frac{d}{d\tau}\right)$			
$\mu_d \frac{d}{d\tau}$			$\left(\varrho_f + \frac{d}{d\tau}\right)$	$k_1 \frac{d}{d\tau}$	
$\mu_D \frac{d}{d\tau}$			$k_2 \frac{d}{d\tau}$	$\left(\varrho_D + \frac{d}{d\tau}\right)$	
	$\mu_Q \frac{d}{d\tau}$				$\left(\varrho_Q + \frac{d}{d\tau}\right)$

(7.128)

macierz napięć na reaktancjach

$$[u_{Br \text{ rel}}^x] = \begin{bmatrix} u_q^x \\ u_d^x \\ u_0^x \\ u_f^x \\ u_D^x \\ u_Q^x \end{bmatrix} \quad (7.129)$$

a macierz napięć na zaciskach  $[u_{Br \text{ rel}}]$  określona wzorem (7.124) pozostaje niezmieniona.

Korzystając z zależności (7.37) wyrażających strumienie magnetyczne skojarzone, można zapisać równania równowagi w wartościach bezwzględnych w postaci

$$\left. \begin{aligned}
 u_d &= -\frac{d\Psi_d}{dt} - \Psi_q \omega_s(1+s) - R_l i_d \\
 u_q &= -\frac{d\Psi_q}{dt} + \Psi_d \omega_s(1+s) - R_l i_q \\
 u_0 &= -\frac{d\Psi_0}{dt} - R_l i_0 \\
 u_f &= \frac{d\Psi_f}{dt} + R_f i_f \\
 0 &= \frac{d\Psi_D}{dt} + R_D i_D \\
 0 &= \frac{d\Psi_Q}{dt} + R_Q i_Q \\
 M &= J\omega_s \frac{ds}{dt} + \frac{3}{2}(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d)
 \end{aligned} \right\} \quad (7.130)$$

a w wartościach względnych w postaci

$$\left. \begin{aligned}
 u_d &= -\frac{d\Psi_d}{d\tau} - \Psi_q(1+s) - R_l i_d \\
 u_q &= -\frac{d\Psi_q}{d\tau} + \Psi_d(1+s) - R_l i_q \\
 u_0 &= -\frac{d\Psi_0}{d\tau} - R_l i_0 \\
 u_f &= \frac{d\Psi_f}{d\tau} + R_f i_f \\
 0 &= \frac{d\Psi_D}{d\tau} + R_D i_D \\
 0 &= \frac{d\Psi_Q}{d\tau} + R_Q i_Q \\
 M &= H_J \frac{ds}{d\tau} + (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d)
 \end{aligned} \right\} \quad (7.131)$$

Do rozwiązania danego problemu w maszynie synchronicznej należy wybrać jedną z postaci podanych układów równań równowagi w zależności od tego,

kiedy związane z rozwiązaniem konieczne do przeprowadzenia operacje matematyczne są prostsze.

Równanie napięć obwodu zerowego w każdej z postaci układu równań jest niezależne od równań obwodów pozostałych. Dlatego można je wyłączyć z układu równań i rozwiązać oddzielnie.

## 7.7. REAKTANCJE PRZY OBCIĄŻENIACH SYMETRYCZNYCH

Reaktancja każdego obwodu  $X = L\omega$ , przy czym indukcyjność tego obwodu  $L = \Psi/i$ . Dla wyznaczenia danej reaktancji należy każdorazowo wyznaczyć strumień całkowity skojarzony z danym obwodem. W przypadku kilku obwodów magnetycznie sprzężonych strumień magnetyczny skojarzony z danym obwodem  $\Psi$  i indukcyjność tego obwodu  $L$  zależą od tego, czy inne obwody są zamknięte, czy otwarte. Przy różnych stanach obwodów pozostałych otrzymuje się więc różne reaktancje danego obwodu. Korzysta się z prawa stałości strumieni magnetycznych skojarzonych  $\Psi = \text{const}$ . Ponieważ na wartości indukowanych napięć i na wartości prądów w danym obwodzie ma wpływ nie wartość strumienia magnetycznego skojarzonego, ale zmienność tego strumienia, wobec tego bez wprowadzenia żadnych ograniczeń w stosunku do ogólności otrzymanych wyników można zamiast  $\Psi = \text{const}$  przyjąć  $\Psi = 0$ .

Wyzyskując przyjęte definicje napięć na reaktancjach, można równania strumieni (7.37) napisać w postaci

$$\left. \begin{aligned} \Psi_d &= \frac{1}{\omega_s} \begin{pmatrix} u_d^x & + u_f^x & + u_D^x \end{pmatrix} \\ \Psi_f &= \frac{1}{\omega_s} \frac{L_f}{M_{lf}} \begin{pmatrix} \mu_d u_d^x & + u_f^x & + k_1 u_D^x \end{pmatrix} \\ \Psi_D &= \frac{1}{\omega_s} \frac{L_D}{M_{LD}} \begin{pmatrix} \mu_D u_d^x & + k_2 u_f^x & + u_D^x \end{pmatrix} \\ \Psi_q &= \frac{1}{\omega_s} \begin{pmatrix} u_d^x & & + u_Q^x \end{pmatrix} \\ \Psi_Q &= \frac{1}{\omega_s} \frac{L_Q}{M_{lQ}} \begin{pmatrix} \mu_Q u_d^x & & + u_Q^x \end{pmatrix} \\ \Psi_0 &= \frac{1}{\omega_s} \begin{pmatrix} & & u_0^x \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (7.132)$$

W stanie ustalonym maszyny niewzbudzonej, ale z doprowadzonym do uzwojeń twornika napięciem trójfazowym symetrycznym, jest  $i_d = \text{const}$ ,  $i_q = \text{const}$ ,  $i_f = 0$  oraz  $i_D = i_Q = 0$ . Wtedy z pierwszego równania układu równań (7.132) wyznacza się strumień

$$\Psi_d = L_d i_d$$

a z drugiego równania układu równań (7.130) przy pominięciu napięcia na rezy-stancji wyznacza się napięcie

$$u_q = \Psi_d \omega_s$$

więc

$$u_q = X_d i_d$$

przy czym

$$X_d = \omega_s L_d$$

oznacza *reaktancję synchroniczną podłużną*.

Podobnie z rozpatrzenia w tych warunkach czwartego równania układu (7.132) i pierwszego równania układu (7.130) otrzymuje się

$$u_d = X_q i_q$$

przy czym

$$X_q = \omega_s L_q \quad (7.133)$$

oznacza *reaktancję synchroniczną poprzeczną*.

Przy wyznaczaniu reaktancji stanowi ustalonemu odpowiada zatem stan, w którym pozostałe obwody są otwarte. W osi podłużnej są trzy obwody, więc dla każdego z tych obwodów wyróżnia się trzy stany:

- (1) Stan ustalony, gdy pozostałe 2 obwody są otwarte.
- (2) Stan podprzejściowy, gdy pozostałe 2 obwody są zamknięte.
- (3) Stan przejściowy, gdy umownie pierwszy (drugi) z pozostałych obwodów jest zamknięty, a umownie drugi (pierwszy) – otwarty.

W osi poprzecznej są dwa obwody, więc dla każdego z tych obwodów wyróżnia się dwa stany:

- (1) Stan ustalony, gdy drugi obwód jest otwarty.
- (2) Stan podprzejściowy, gdy drugi obwód jest zamknięty.

W osi zerowej jest tylko jeden obwód, więc dla tego obwodu jest tylko jedna reaktancja zerowa  $X_0 = \omega_s L_0$ .

W układzie równań (7.132) trzy pierwsze równania, będące równaniami strumieni skojarzonych w osi podłużnej w funkcji prądów w osi podłużnej, stanowią grupę równań niezależną od równań pozostałych. Dwa następne równania, będące równaniami strumieni skojarzonych w osi poprzecznej w funkcji prądów w osi poprzecznej, stanowią grupę równań niezależną od równań pozostałych. Równanie ostatnie, będące równaniem strumieni skojarzonych w osi zerowej w funkcji prądu w osi zerowej, nie zależy od innych równań. Oznacza to, że prąd w danej osi wywołuje strumienie skojarzone tylko z obwodami w tej samej osi.

Rozpatruje się strumienie magnetyczne skojarzone z obwodem podłużnym twornika  $d$  przy zamkniętych dwóch pozostałych obwodach w tej osi, czyli stan podprzejściowy obwodu podłużnego twornika. Wtedy z układu równań (7.132)



przy przyjęciu w pozostałych obwodach warunku  $\Psi = 0$  zamiast  $\Psi = \text{const}$  otrzymuje się

$$\left. \begin{aligned} \omega_s \Psi_d &= u_q^x + u_f^x + u_D^x \\ 0 &= \mu_d u_q^x + u_f^x + k_1 u_D^x \\ 0 &= \mu_D u_q^x + k_2 u_f^x + u_D^x \end{aligned} \right\} \quad (7.134)$$

Wyznacznik charakterystyczny tego układu równań

$$D_\Psi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_d & 1 & k_1 \\ \mu_D & k_2 & 1 \end{vmatrix} \quad (7.135)$$

skąd

$$\left. \begin{aligned} D_\Psi &= 1 - \mu_d - \mu_D - k_1 k_2 + k_1 \mu_D + k_2 \mu_d \\ \text{albo} \quad D_\Psi &= 1 - \mu_d - \mu_D - \mu_{kf} + k_1 \mu_D + k_2 \mu_d \\ \text{albo} \quad D_\Psi &= 1 - \mu_d - \mu_D - \mu_{kf} + 2\sqrt{\mu_d \mu_D \mu_{kf}} \end{aligned} \right\} \quad (7.136)$$

więc

$$\Psi_d = \frac{D_\Psi}{\sigma_{kf}} L_d i_d \quad (7.137)$$

a reaktancja podprzejściowa podłużna  $X_d'' = \frac{\omega_s \Psi_d}{i_d}$  wynosi

$$X_d'' = \frac{D_\Psi}{\sigma_{kf}} X_d \quad (7.138)$$

W stanie przejściowym obwodu podłużnego twornika przy zamkniętym tylko obwodzie wzbudzenia a otwartym obwodzie podłużnym tłumienia, czemu odpowiada brak obwodu tłumienia, wystarczy rozpatrzyć tylko dwa pierwsze równania układu (7.132). Przyjmują one wówczas postać

$$\left. \begin{aligned} \omega_s \Psi_d &= u_q^x + u_f^x \\ 0 &= \mu_d u_q^x + u_f^x \end{aligned} \right\} \quad (7.139)$$

skąd

$$\Psi_d = \sigma_d L_d i_d \quad (7.140)$$

a reaktancja przejściowa podłużna

$$X_d' = \sigma_d X_d \quad (7.141)$$

Przy zamkniętym obwodzie podłużnym tłumienia i otwartym obwodzie wzbudzenia reaktancja przejściowa

$$X_{dk}' = \sigma_D X_d \quad (7.142)$$

Tablica 7.1. Reaktancje maszyny synchronicznej przy obciążeniu symetrycznym

	Obwód rozpatrywany Obwód otwarty	Obwody twornika $d, q$	Obwód wzbudzenia $f$	Obwód podłużny tłumienia $D$	Obwód poprzeczny tłumienia $Q$
Reaktancje podłużne	$\frac{f}{D}$	$X_d = \omega_s L_d$	—	—	—
	$\frac{d}{D}$	—	$X_f = \omega_s L_f$	—	—
	$\frac{d}{f}$	—	—	$X_D = \omega_s L_D$	—
	$D$	$X'_d = \sigma_d X_d$	$X'_f = \sigma_d X_f$	—	—
	$f$	$X'_{dk} = \sigma_D X_d$	—	$X'_D = \sigma_D X_D$	—
	$d$	—	$X'_{fk} = \sigma_{kf} X_f$	$X'_{Dk} = \sigma_{kf} X_D$	—
	żaden	$X''_d = \frac{D\psi}{\sigma_{kf}} X_d$	$X''_f = \frac{D\psi}{\sigma_D} X_f$	$X''_D = \frac{D\psi}{\sigma_d} X_D$	—
Reaktancje poprzeczne	$Q$	$X_q = \omega_s L_q$	—	—	—
	$q$	—	—	—	$X_Q = \omega_s L_Q$
	żaden	$X''_q = \sigma_Q X_q$	—	—	$X''_Q = \sigma_Q X_Q$

Analogicznie wyznacza się reaktancję podprzejściową poprzeczną

$$X''_q = \sigma_Q X_q \quad (7.143)$$

oraz reaktancje innych obwodów maszyny synchronicznej. Wszystkie reaktancje podano w tabl. 7.1.

## 7.8. STAN USTALONY SYMETRYCZNY SYNCHRONICZNY

### 7.8.1. Uwagi ogólne

Stan ustalony maszyny synchronicznej może być *symetryczny*, kiedy wielkość fizyczna (np. prąd, napięcie) ma tylko składową zgodną, albo *asymetryczny*, kiedy wielkość fizyczna ma składową zgodną i przynajmniej jedną z dwóch pozostałych składowych, jakimi są składowa przeciwna i składowa zerowa. Ponadto stan ustalony może być