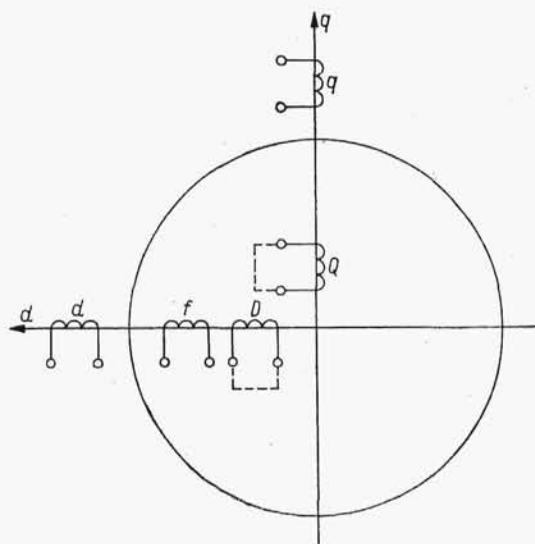


7. MASZYNY SYNCHRONICZNE

7.1. UWAGI OGÓLNE

Maszyzny synchroniczne są budowane prawie wyłącznie z uzwojeniami wzbudzącymi na wirniku i uzwojeniem twornika w stojanie. Jest to więc maszyna o konstrukcji odwróconej w stosunku do modelu z rys. 4.1, w którym uzwojenie wzbudzające (i uzwojenia tłumiące) umieszczone jest w stojanie, a uzwojenie twornika na wirniku. Oznacza to, że przy zachowaniu tego samego kierunku wirowania wirnika należy w modelu maszyny synchronicznej zmienić kolejność następstwa osi d , q .

W ogólnym przypadku maszyna synchroniczna ma w stojanie wykonanym z blach trzy uzwojenia fazowe, a w wirniku, którego rdzeń albo nabiegunniki są najczęściej wykonane z odkuwki, ma jedno uzwojenie wzbudzające w osi podłużnej i nieskończenie wiele obwodów zwartych. Dla umożliwienia analizy matematycznej zjawisk w maszynie synchronicznej ogranicza się liczbę obwodów zwartych (tłumiących). Najczęściej rozważa się maszynę synchroniczną z jednym obwodem zwartym D w osi d i z jednym obwodem zwartym Q w osi q (rys. 7.1). Dla uproszczenia zapisów,



Rys. 7.1. Model maszyny synchronicznej

pożądanego przy układaniu równań równowagi maszyny synchronicznej, mającej dużą liczbę obwodów, stosuje się przy odpowiednich wielkościach indeksy różne od przyjętych dla modelu ogólnego maszyny, a mianowicie indeksy $d, q, 0$ odnoszą się do odpowiednich wielkości w osiach podłużnej, poprzecznej i zerowej stojana (tutaj twornika), indeksy f, D, Q odnoszą się odpowiednio do wielkości w obwodzie wzbudzenia w osi d , w obwodzie tłumienia w osi d oraz w obwodzie tłumienia w osi q .

W maszynie prądu stałego dzięki istnieniu komutatora, który fizycznie transformuje wielkości istniejące rzeczywiście w tworniku na wielkości wyjściowe na szczotkach, wielkości w modelu maszyny prądu stałego (rys. 6.1) odpowiadają wprost wielkościom w modelu ogólnym maszyny (rys. 4.1) bez potrzeby dokonywania transformacji. W maszynie synchronicznej tylko wielkości w obwodach f, D, Q odpowiadają wielkościom rzeczywistej maszyny, natomiast wielkości w obwodach $d, q, 0$ muszą być transformowane z wielkości w rzeczywistych obwodach maszyny u, v, w do wielkości w osiach d, q według zasad podanych w p. 2.7. W modelu z rys. 7.1 osie d, q wirnika i stojana są osiami wirującymi, a transformacja wielkości odpowiadających nieruchomemu trójfazowemu uzwojeniu stojana z osiami nieruchomymi u, v, w do wielkości w obwodach ustawionych w osiach d, q odpowiada zastąpieniu rzeczywistego nieruchomego uzwojenia stojana z nieruchomymi końcówkami tego uzwojenia przez nieruchome trójfazowe uzwojenie z komutatorem, po którym wirują szczotki, a wielkości w osiach d, q odpowiadają wielkościom występującym w obwodach wirujących szczotek.

W maszynach synchronicznych najczęściej transformuje się i napięcia i prądy z jednego układu osi do drugiego układu stosując macierze odpowiednie do macierzy $[C]$ i $[C]^{-1}$ określonych wzorami (2.88) i (2.90), co oznacza, że nie jest zachowany warunek inwariantności mocy. Jeśli w tym przypadku oblicza się moc z napięć i prądów transponowanych do układu osi $d, q, 0$, to zgodnie ze wzorami (2.88) i (2.90) oraz (2.91) i (2.92) moc wyraża się przez

$$p = [u_{u,v,w}]^T [i_{u,v,w}] = [u_{d,q,0}]^T [i_{d,q,0}] [B_M] \quad (7.1)$$

przy czym

$$[B_M] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

albo inaczej

$$p = u_u i_u + u_v i_v + u_w i_w = \frac{3}{2} u_d i_d + \frac{3}{2} u_q i_q + 3 u_0 i_0 \quad (7.3)$$

Najważniejszym rodzajem maszyn synchronicznych są prądnice, więc w równaniach równowagi maszyny synchronicznej zastosowana będzie konwencja

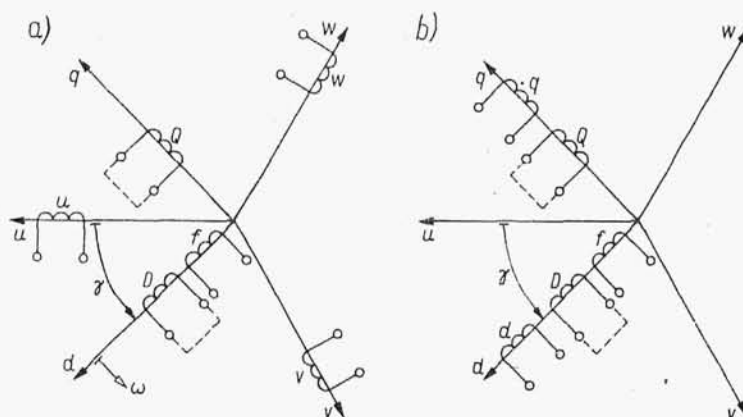
źródłowa (prądnicowa) zapisu, to znaczy znak „+” zostanie przypisany mocy odprowadzonej dodatniej. Wtedy iloczyn prądów i napięć twornika są dodatnie, iloczyn prądu i napięcia wzbudzenia jest ujemny, iloczyn momentu obrotowego zewnętrznego i prędkości kątowej jest ujemny.

Dla modelu maszyny synchronicznej z rys. 7.1 można od razu napisać równania równowagi analogiczne do równań (4.11). Wtedy jednak indukcyjności wchodzące do macierzy impedancji analogicznej do macierzy (4.18) odpowiadałyby indukcyjnościom modelu w osiach d, q , a nie indukcyjnościom maszyny rzeczywistej. Dla ustalenia związku między tymi układami impedancji należałoby dokonać odpowiedniej transformacji impedancji. Można także, jak to będzie wykonane w dalszym ciągu, do układu osi d, q transformować strumienie magnetyczne skojarzone z układem osi naturalnych u, v, w i stąd uzyskać związki pomiędzy indukcyjnościami w układzie osi naturalnych i prostopadłych.

Przy przekształceniach równań matematycznie dowiedziono, że indukcyjności rotacji są równe odpowiednim indukcyjnościom wzajemnym obróconym odpowiednio o kąt $\pi/2$. Opisano także właściwości poszczególnych indukcyjności maszyny synchronicznej.

7.2. INDUKCYJNOŚCI ELEMENTARNE

Poszczególne indukcyjności oznaczono w sposób najczęściej stosowany w teorii maszyn synchronicznych. Oznaczenia te różnią się od oznaczeń stosowanych do opisu ogólnego modelu maszyn. Na rysunku 7.2a pokazano obwody zastępcze maszyny synchronicznej w układzie osi naturalnych u, v, w , a na rys. 7.2b w układzie

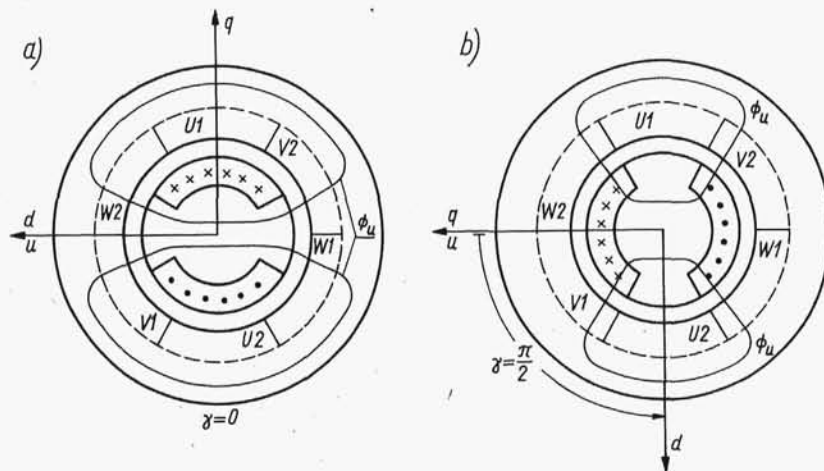


Rys. 7.2. Obwody zastępcze maszyny synchronicznej

osi prostopadłych d, q . Obydwa rysunki odpowiadają chwili, w której wirująca oś podłużna d wyprzedza nieruchomą oś stojaną u o kąt γ . Każdy obwód z rys. 7.2 ma odpowiednio indukcyjność własną $L_u, L_v, L_w, L_f, L_d, L_q$. Między tymi obwo-

dami występują indukcyjności wzajemne, np. M_{u0} , M_{uf} itp. Niektóre z tych indukcyjności są funkcjami kąta γ , inne mają wartości stałe.

Przy podłużnym położeniu wirnika względem osi fazowej u stojana ($\gamma = 0$) permeancja Λ_u na drodze strumienia Φ_u fazy u stojana ma wartość największą, gdyż strumień ma najkrótszy z możliwych odcinek swojej drogi w powietrzu (rys. 7.3a). Przy położeniu poprzecznym ($\gamma = \pi/2$, rys. 7.3b) permeancja Λ_u ma wartość naj-



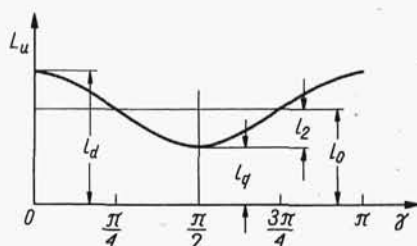
Rys. 7.3. Strumień fazy u stojana: a) przy podłużnym położeniu wirnika ($\gamma = 0$); b) przy poprzecznym położeniu wirnika ($\gamma = \pi/2$)

mniejszą, gdyż powietrzny odcinek drogi strumienia Φ_u jest w tym położeniu najdłuższy (w maszynie z biegunami utajonymi ten strumień przechodzi także przez żłobki wirnika, a w maszynie z biegunami wydatnymi przechodzi on przez powietrze między biegunami). Wynika stąd, że permeancja Λ_u i indukcyjność L_u są funkcjami okresowymi o okresie π , które można rozłożyć na szereg harmonicznych

$$L_u = l_0 + l_2 \cos 2\gamma + l_4 \cos 4\gamma + \dots$$

Z dostateczną dokładnością można ograniczyć się do dwóch pierwszych wyrazów, więc

$$L_u = l_0 + l_2 \cos 2\gamma$$



Rys. 7.4. Przebieg zależności $L_u = f(\gamma)$

W maszynach z biegunami utajonymi można w przybliżeniu przyjmować $L_u = l_0 = \text{const}$. Przebieg $L_u = f(\gamma)$ pokazano na rys. 7.4. Fazy v i w są przesunięte odpowiednio o kąty $\varepsilon = 2\pi/3$ i $2\varepsilon = 4\pi/3$, więc

$$\begin{bmatrix} L_u \\ L_v \\ L_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_0 \\ l_0 \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} \cos 2\gamma \\ \cos (2\gamma + \varepsilon) \\ \cos (2\gamma - \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

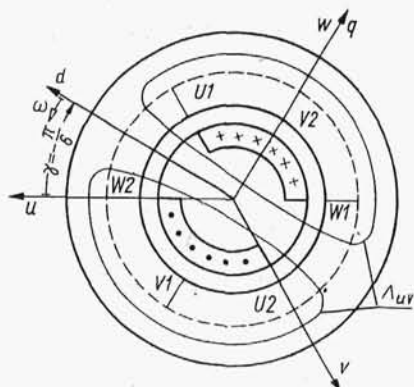
ponieważ $\cos [2(\gamma - \varepsilon)] = \cos (2\gamma + \varepsilon)$ i $\cos [2(\gamma + \varepsilon)] = \cos (2\gamma - \varepsilon)$. Przy $\gamma = 0$ jest $L_u = L_{u\max} = l_0 + l_2$, a przy $\gamma = \pi/2$ jest $L_u = L_{u\min} = l_0 - l_2$. Po oznaczeniu

$$\begin{bmatrix} l_d \\ l_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 \\ -l_2 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

zamiast zależności (7.4) otrzymuje się zależność

$$\begin{bmatrix} L_u \\ L_v \\ L_w \end{bmatrix} = l_d \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma \\ \cos^2(\gamma - \varepsilon) \\ \cos^2(\gamma + \varepsilon) \end{bmatrix} + l_q \begin{bmatrix} \sin^2 \gamma \\ \sin^2(\gamma - \varepsilon) \\ \sin^2(\gamma + \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

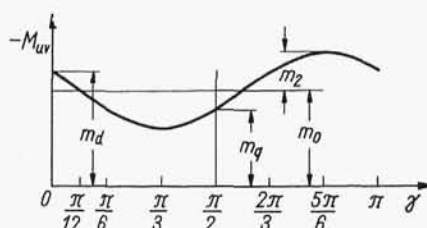
Indukcyjności wzajemne M_{uv} , M_{vw} , M_{wu} mają w funkcji kąta przebieg analogiczny do przebiegów indukcyjności własnych z przesunięciem o kąt $-\pi/6$. Indukcyjności M_{uv} , M_{vw} , M_{wu} są indukcyjnościami wzajemnymi odpowiednio dwóch zezwojów, których osie są przesunięte względem siebie o kąt większy od $\pi/2$, więc dogodnie jest traktować te indukcyjności jako indukcyjności ujemne. Ilustracją pojęcia indukcyjności wzajemnej jest rys. 7.5 który odpowiada chwili, kiedy perme-



Rys. 7.5. Ilustracja pojęcia indukcyjności wzajemnej

ancja L_{uv} i indukcyjność M_{wu} mają wartości największe. Przebieg zależności $M_{uv} = f(\gamma)$ pokazano na rys. 7.6. Przy ograniczeniu się do dwóch pierwszych wyrazów szeregu harmonicznego

$$M_{uv} = - \left\{ m_0 + m_2 \cos \left[2 \left(\gamma + \frac{\pi}{6} \right) \right] \right\}$$

Rys. 7.6. Przebieg zależności $M_{uv} = f(\gamma)$

Przebiegi zmian indukcyjności M_{vw} , M_{wu} są przesunięte odpowiednio o $\varepsilon = 2\pi/3$ i $2\varepsilon = 4\pi/3$, więc

$$\begin{bmatrix} M_{uv} \\ M_{vw} \\ M_{wu} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dot{m}_0 \\ m_0 \\ m_0 \end{bmatrix} - m_2 \begin{bmatrix} \cos\left(2\gamma + \frac{\pi}{3}\right) \\ \cos(2\gamma - \pi) \\ \cos\left(2\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\begin{bmatrix} m_d \\ m_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_2 \\ -m_2 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} M_{uv} \\ M_{vw} \\ M_{wu} \end{bmatrix} = - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_d + m_q \\ m_d + m_q \\ m_d + m_q \end{bmatrix} - (m_d - m_q) \begin{bmatrix} \cos\left(2\gamma + \frac{\pi}{3}\right) \\ \cos(2\gamma - \pi) \\ \cos\left(2\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Stojan jest elementem symetrycznym (ma kształt walca), więc indukcyjności własne uzwojeń wirnika i indukcyjności wzajemne tych uzwojeń mają wartości stałe, niezależne od położenia. I tak:

– indukcyjność uzwojenia wzbudzającego

$$L_f = \text{const} \quad (7.10)$$

– indukcyjność podłużnego obwodu zwartego (obwodu tłumienia)

$$L_D = \text{const} \quad (7.11)$$

– indukcyjność poprzecznego obwodu zwartego (tłumienia)

$$L_Q = \text{const} \quad (7.12)$$

- indukcyjność wzajemna uzwojenia wzbudzającego i podłużnego obwodu zwartego (tłumienia)

$$M_{fD} = \text{const} \quad (7.13)$$

- indukcyjność wzajemna uzwojenia wzbudzającego i poprzecznego obwodu zwartego (tłumienia)

$$M_{fQ} = 0 \quad (7.14)$$

- indukcyjność wzajemna podłużnego i poprzecznego obwodu zwartego

$$M_{DQ} = 0 \quad (7.15)$$

Indukcyjności wzajemne pomiędzy uzwojeniami stojana i wirnika są funkcjami kąta γ o okresie 2π . I tak:

- indukcyjności wzajemne między poszczególnymi uzwojeniami fazowymi stojana i uzwojeniem wzbudzającym

$$\begin{bmatrix} M_{uf} \\ M_{vf} \\ M_{wf} \end{bmatrix} = M_{If} \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \cos (\gamma - \varepsilon) \\ \cos (\gamma + \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

- indukcyjności wzajemne między poszczególnymi uzwojeniami fazowymi stojana i podłużnym obwodem tłumienia wirnika

$$\begin{bmatrix} M_{uD} \\ M_{vD} \\ M_{wD} \end{bmatrix} = M_{ID} \begin{bmatrix} \cos \gamma \\ \cos (\gamma - \varepsilon) \\ \cos (\gamma + \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

- indukcyjności wzajemne między poszczególnymi uzwojeniami fazowymi stojana i poprzecznym obwodem tłumienia wirnika

$$\begin{bmatrix} M_{uQ} \\ M_{vQ} \\ M_{wQ} \end{bmatrix} = M_{IQ} \begin{bmatrix} \sin \gamma \\ \sin (\gamma - \varepsilon) \\ \sin (\gamma + \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

Zmienność indukcyjności maszyny synchronicznej w funkcji kąta γ , a więc także w funkcji czasu, uniemożliwia rozwiązanie układu równań równowagi napisanych w układzie osi naturalnych.

7.3. STRUMIENIE MAGNETYCZNE SKOJARZONE W UKŁADZIE OSI NATURALNYCH I PROSTOPADŁYCH

Strumienie magnetyczne skojarzone w układzie osi naturalnych

$$[\Psi_N] = [L_N][i_N] \quad (7.19)$$

przy czym

$$[\Psi_N] = \begin{bmatrix} \Psi_u \\ \Psi_v \\ \Psi_w \\ \Psi_f \\ \Psi_D \\ \Psi_Q \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

$$[i_N] = \begin{bmatrix} i_u \\ i_v \\ i_w \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

$$[L_N] = \begin{bmatrix} L_u & M_{uv} & M_{uw} & M_{uf} & M_{uD} & M_{uQ} \\ M_{vu} & L_v & M_{vw} & M_{vf} & M_{vD} & M_{vQ} \\ M_{wu} & M_{wv} & L_w & M_{wf} & M_{wD} & M_{wQ} \\ M_{fu} & M_{fv} & M_{fw} & L_f & M_{fD} & M_{fQ} \\ M_{Du} & M_{Dv} & M_{Dw} & M_{Df} & L_D & M_{DQ} \\ M_{Qu} & M_{Qv} & M_{Qw} & M_{Qf} & M_{QD} & L_Q \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Poszczególne wyrazy macierzy L_N mają wartości określone wzorami (7.4) ÷ (7.18).

Strumienie magnetyczne skojarzone $[\Psi_B]$ w układzie osi prostopadłych są związane ze strumieniami magnetycznymi skojarzonymi $[\Psi_N]$ w układzie osi naturalnych zależnością

$$[\Psi_B] = [B]^{-1}[\Psi_N] \quad (7.23)$$

przy czym analogicznie do macierzy $[C]^{-1}$ i $[C]$ określonych wzorami (2.90) i (2.88), macierz transformacji

$$[B]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cos \gamma & \frac{2}{3} \cos (\gamma - \varepsilon) & \frac{2}{3} \cos (\gamma + \varepsilon) & & & \\ \frac{2}{3} \sin \gamma & \frac{2}{3} \sin (\gamma - \varepsilon) & \frac{2}{3} \sin (\gamma + \varepsilon) & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 1 & & & \\ \cos (\gamma - \varepsilon) & \sin (\gamma - \varepsilon) & 1 & & & \\ \cos (\gamma + \varepsilon) & \sin (\gamma + \varepsilon) & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

oraz macierz strumieni skojarzonych w układzie osi prostopadłych

$$[\Psi_B] = \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_0 \\ \Psi_f \\ \Psi_D \\ \Psi_Q \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

Jedności wpisane w dolne części przekątnych macierzy współczynników (7.24) i (7.25) oznaczają, że wielkości oznaczone indeksami f, D, Q przy transformacji z układu osi $d, q, 0$ do układu osi u, v, w i na odwrót zachowują wartości niezmiennicze. Podobnie prądy $[i_N]$ w układzie osi naturalnych związane są z prądami $[i_B]$ w układzie osi prostopadłych $d, q, 0$ zależnością

$$[i_B] = [B]^{-1} [i_N] \quad (7.27)$$

przy czym

$$[i_B] = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

Oczywiste są także zależności

$$[\Psi_N] = [B] [\Psi_B] \quad (7.29)$$

$$[i_N] = [B] [i_B] \quad (7.30)$$

Po wprowadzeniu pojęcia macierzy indukcyjności $[L_B]$ w układzie osi prostopadłych $d, q, 0$ otrzymuje się

$$[\Psi_B] = [L_B] [i_B] \quad (7.31)$$

wtedy

$$[\Psi_B] = [B]^{-1} [\Psi_N] = [B]^{-1} [L_N] [i_N] = [B]^{-1} [L_N] [B] [i_B]$$

czyli

$$[L_B] = [B]^{-1} [L_N] [B] \quad (7.32)$$

a po pomnożeniu

$$[L_B] = \begin{bmatrix} L_d & & & M_{If} & M_{ID} & \\ & L_q & & & & M_{IQ} \\ & & L_0 & & & \\ \frac{3}{2} M_{If} & & & L_f & M_{fD} & \\ \frac{3}{2} M_{ID} & & & M_{fD} & L_D & \\ & \frac{3}{2} M_{IQ} & & & & L_Q \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

przy czym wprowadzono oznaczenia:

– indukcyjność synchroniczna podłużna

$$L_d = l_0 + m_0 + \frac{3}{2} m_2 = l_d + m_d \quad (7.34)$$

– indukcyjność synchroniczna poprzeczna

$$L_q = l_0 + m_0 - \frac{3}{2} m_2 = l_q + m_q \quad (7.35)$$

– indukcyjność zerowa

$$L_0 = l_0 - 2m_0 = l_d - 2m_d = l_q - 2m_q \quad (7.36)$$

Współczynnik $3/2$ występuje przy tych symbolach indukcyjności wzajemnych, które dotyczą skojarzeń magnetycznych obwodów wirnika od prądów (trójfazowych) stojana transformowanych do układu osi prostopadłych $d, q, 0$. Na podstawie równań (7.31), (7.26), (7.28) i (7.33) strumienie magnetyczne skojarzone w układzie osi prostopadłych można wyrazić następująco:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_d &= L_d i_d + M_{If} i_f + M_{ID} i_D \\ \Psi_q &= L_q i_q + M_{IQ} i_Q \\ \Psi_0 &= L_0 i_0 \\ \Psi_f &= \frac{3}{2} M_{If} i_d + L_f i_f + M_{fD} i_D \\ \Psi_D &= \frac{3}{2} M_{ID} i_d + M_{fD} i_f + L_D i_D \\ \Psi_Q &= \frac{3}{2} M_{IQ} i_q + L_Q i_Q \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

Wszystkie indukcyjności, występujące w macierzy indukcyjności $[L_B]$ określonej wzorem (7.33) i w układzie równań (7.37) określających strumienie magnetyczne skojarzone w układzie osi prostopadłych mają wartości stałe i są określone przez indukcyjności elementarne występujące w rzeczywistej maszynie synchronicznej.

7.4. RÓWNANIA RÓWNOWAGI W WARTOŚCIACH BEZWZGLĘDNYCH

Równania równowagi można napisać od razu w układzie osi $d, q, 0$ zgodnie z modelem z rys. 7.1. Jednak w celu matematycznego wykazania, czym są odpowiednie indukcyjności rotacji, równania równowagi zostaną napisane dla osi naturalnych, a potem przekształcone do równań w układzie osi prostopadłych. Analogicznie do równania (2.95) równania równowagi maszyny synchronicznej dla bram elektrycznych w układzie osi naturalnych w konwencji źródłowej (prądnicowej) mają postać

$$[u_N] = - \frac{d}{dt} [\Psi_N] - [R_N] [i_N] \quad (7.38)$$

przy czym

$$[u_N] = \begin{bmatrix} u_u \\ u_v \\ u_w \\ -u_f \\ u_D = 0 \\ u_Q = 0 \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

$$[R_N] = \begin{bmatrix} R_l & & & & & \\ & R_l & & & & \\ & & R_l & & & \\ & & & R_f & & \\ & & & & R_D & \\ & & & & & R_Q \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

W macierzy (7.39) przy napięciu wzbudzenia u_f jest znak minus, czyli znak przeciwny do znaków przy napięciach u_u, u_v, u_w . Wynika to z przyjętej konwencji znaku

mocy, w której moc oddana przez prądnicę ma znak dodatni. W tej konwencji moc obwodów fazowych (moc oddana) jest dodatnia, a moc uzwojenia wzbudzącego (w rzeczywistości moc doprowadzona do maszyny) jest ujemna. W macierzy (7.21) prądów $[i_N]$ wszystkie prądy oznaczono znakiem plus, w konsekwencji czego w macierzy napięć (7.39) napięcia fazowe mają znaki plus, a napięcie wzbudzające ma znak minus. Przyjęcie zapisu „ $-u_f$ ” we wzorze (7.39) oznacza, że wartość liczbowa napięcia u_f jest dodatnia. W macierzy (7.40) rezystancji $[R_N]$ rezystancja $R_l = R_u = R_v = R_w$.

Macierz napięć w układzie osi prostopadłych ma postać

$$[u_B] = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \\ -u_f \\ u_D \\ u_Q \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

przy czym

$$[u_N] = [B][u_B] \quad (7.42)$$

Po przejściu na wielkości w układzie osi prostopadłych z równania (7.38) otrzymuje się

$$[B][u_B] = -\frac{d}{dt}([B][\psi_B]) - [R_N][B][i_B] \quad (7.43)$$

Ponieważ

$$\frac{d[B]}{dt} = \frac{d[B]}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dt} \quad (7.44)$$

oraz

$$\frac{d[B]}{d\gamma} = \begin{bmatrix} -\sin \gamma & \cos \gamma & & & & \\ -\sin (\gamma - \varepsilon) & \cos (\gamma - \varepsilon) & & & & \\ -\sin (\gamma + \varepsilon) & \cos (\gamma + \varepsilon) & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

zatem po wprowadzeniu pojęcia macierzy rotacyjnej

$$[T] = [B]^{-1} \frac{d}{d\gamma} [B] \quad (7.46)$$

można wyznaczyć jej wartość

$$[T] = \begin{bmatrix} & 1 & & & & \\ -1 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

Po pomnożeniu równania (7.43) lewostronnie przez $[B]^{-1}$ i wykonaniu różniczkowania otrzymuje się

$$[u_B] = -[B]^{-1} \frac{d[B]}{dt} [\Psi_B] - \frac{d}{dt} [\Psi_B] - [B]^{-1} [R_N] [B] [i_B] \quad (7.48)$$

Po oznaczeniu

$$[R_B] = [B]^{-1} [R_N] [B] \quad (7.49)$$

i uwzględnieniu zależności (7.44) oraz wykorzystaniu oznaczenia (7.46) otrzymuje się

$$[u_B] = -[T] \frac{dy}{dt} [\Psi_B] - \frac{d}{dt} [\Psi_B] - [R_B] [i_B] \quad (7.50)$$

Macierz rezystancji R_N zgodnie z zapisem (7.40) jest macierzą diagonalną, więc ze wzoru (7.49) otrzymuje się

$$[R_B] = [R_N] \quad (7.51)$$

i ostatecznie równania równowagi dla bram elektrycznych w układzie osi $d, q, 0$ mają postać w zapisie macierzowym

$$[u_B] = -[T] \omega [\Psi_B] - \frac{d}{dt} [\Psi_B] - [R_N] [i_B] \quad (7.52)$$

przy czym uwzględniono tutaj, że $\frac{dy}{dt} = \omega$.

Macierz rotacyjna zawiera tylko liczby 1 i -1. Pierwszy człon wzoru (7.52) oznacza napięcie rotacji. W napięciu podłużnym u_d napięcie rotacji wynosi

$$1 \cdot \omega \Psi_q = -\omega (L_q i_q + M_{lq} i_Q) \quad (7.53)$$

a w napięciu poprzecznym u_q napięcie rotacji wynosi

$$-1 \omega \Psi_d = \omega (L_d i_d + M_{lf} i_f + M_{ld} i_D) \quad (7.54)$$

Te wyniki są zgodne z wynikami rozważań prowadzonych w p. 4.4, a odpowiednie indukcyjności we wzorach (7.53) i (7.54) odpowiadają indukcyjnościom rotacji we wzorze (4.8). Różnice między tymi indukcyjnościami wynikają jedynie z różnego sposobu oznaczania i z różnej liczby obwodów wziętych do rozważań.

Na podstawie równania macierzowego (7.52) można napisać równania napięć poszczególnych obwodów

$$\left. \begin{aligned} u_d &= -\frac{d\Psi_d}{dt} - \omega\Psi_q - R_l i_d \\ u_q &= -\frac{d\Psi_q}{dt} + \omega\Psi_d - R_l i_q \\ u_o &= -\frac{d\Psi_o}{dt} - R_l i_o \\ u_f &= \frac{d\Psi_f}{dt} + R_f i_f \\ 0 &= \frac{d\Psi_D}{dt} + R_D i_D \\ 0 &= \frac{d\Psi_Q}{dt} + R_Q i_Q \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

Moment elektromagnetyczny może być wyznaczony według wzoru (4.20), przy czym energię elektromagnetyczną określoną wzorem (4.21) w układzie osi naturalnych wyznacza się z zależności

$$E_e = \frac{1}{2} [\Psi_N]^T [i_N] \quad (7.56)$$

Wobec zależności (7.29) jest

$$[\Psi_N]^T = [\Psi_B]^T [B]^T \quad (7.57)$$

więc

$$E_e = \frac{1}{2} [\Psi_B]^T [B]^T [B] [i_B] \quad (7.58)$$

czyli

$$E_e = \frac{1}{2} [\Psi_B]^T [B_M] [i_B] \quad (7.59)$$

przy czym

$$[B_M] = [B]^T [B] \quad (7.60)$$

Ponieważ

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \cos (\gamma - \varepsilon) & \cos (\gamma + \varepsilon) & & & \\ \sin \gamma & \sin (\gamma - \varepsilon) & \sin (\gamma + \varepsilon) & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (7.61)$$

wobec tego

$$[B_M] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & & & & & \\ & \frac{3}{2} & & & & \\ & & 3 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (7.62)$$

Macierz współczynników $[B_M]$ określona wzorem (7.62) dla maszyny z sześcioma obwodami elektrycznymi w stojanie i wirniku, analogiczna do macierzy $[B_M]$ określonej wzorem (7.2) dla trzech obwodów fazowych, oznacza macierz, przez jaką dla zachowania warunku inwariantności mocy i momentu należy pomnożyć iloczyn macierzy strumieni i prądów transformowanych z układu osi u, v, w do układu osi $d, q, 0$ przy zastosowaniu macierzy współczynników $[B]^{-1}$ określonej wzorem (7.24) i nie spełniającej warunku inwariantności mocy. Wobec tego

$$E_e = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \Psi_d i_d + \frac{3}{2} \Psi_q i_q + 3 \Psi_0 i_0 + \Psi_f i_f + \Psi_D i_D + \Psi_Q i_Q \right] \quad (7.63)$$

Prądy i_d oraz i_q są funkcjami kąta γ , więc

$$M_e = - \frac{\partial E_e}{\partial \gamma} = - \left[\frac{\partial E_e}{\partial i_d} \cdot \frac{di_d}{d\gamma} + \frac{\partial E_e}{\partial i_q} \cdot \frac{di_q}{d\gamma} \right] \quad (7.64)$$

Z zależności (7.27) wynika

$$\frac{di_d}{d\gamma} = -i_q \quad (7.65)$$

$$\frac{di_q}{d\gamma} = i_d$$

zatem

$$M_e = \frac{3}{2} [(L_d i_d + M_{lf} i_f + M_{ld} i_D) i_q - (L_q i_q + M_{lq} i_Q) i_d] \quad (7.66)$$

albo

$$M_e = \frac{3}{2} (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) \quad (7.67)$$

co jest zgodne ze wzorem (4.43). Wzory (7.66) i (7.67) wyznaczają moment elektromagnetyczny maszyny o jednej parze biegunów albo moment elektromagnetyczny na jedną parę biegunów maszyny wielobiegunowej. Zgodnie z równaniami (1.93) równanie momentów maszyny synchronicznej ma jedną z postaci

$$M = J \frac{d^2\gamma}{dt^2} + D_r \frac{d\gamma}{dt} + \frac{3}{2} (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) \quad (7.68)$$

albo

$$M = J \frac{d^2\gamma}{dt^2} + D_r \frac{d\gamma}{dt} + \frac{3}{2} [(L_d i_d + M_{lf} i_f + M_{ld} i_D) i_q - (L_q i_q + M_{lq} i_Q) i_d]$$

Wprowadzając macierz impedancji

$$[Z_{Br}] =$$

$$= \begin{bmatrix} R_l + L_d \frac{d}{dt} & L_q \frac{d}{dt} & & M_{lf} \frac{d}{dt} & M_{ld} \frac{d}{dt} & M_{lq} \frac{d}{dt} \\ -L_d \frac{d}{dt} & R_l + L_q \frac{d}{dt} & & -M_{lf} \frac{d}{dt} & -M_{ld} \frac{d}{dt} & M_{lq} \frac{d}{dt} \\ & & R_l + L_o \frac{d}{dt} & & & \\ \frac{3}{2} M_{lf} \frac{d}{dt} & & & R_f + L_f \frac{d}{dt} & M_{fd} \frac{d}{dt} & \\ \frac{3}{2} M_{ld} \frac{d}{dt} & & & M_{fd} \frac{d}{dt} & R_D + L_D \frac{d}{dt} & \\ & \frac{3}{2} M_{lq} \frac{d}{dt} & & & & R_Q + L_Q \frac{d}{dt} \end{bmatrix}$$

(7.69)

otrzymuje się komplet równań w wartościach bezwzględnych w postaci

$$\left. \begin{aligned} -[u_B] &= [Z_{Bt}] [i_B] \\ M &= J \frac{d\omega}{dt} + D_r \omega + \frac{3}{2} [(L_d i_d + M_{ld} i_f + M_{ld} i_D) i_q - (L_q i_q + M_{lQ} i_Q) i_d] \end{aligned} \right\} \quad (7.70)$$

albo w postaci

$$\left. \begin{aligned} -[u_B] &= [Z_{Bt}] [i_B] \\ M &= J \frac{d\omega}{dt} + D_r \omega + \frac{3}{2} (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) \end{aligned} \right\} \quad (7.71)$$

7.5. WSPÓŁCZYNNIKI SPRĘŻENIA I ROZPROSZENIA OBWODÓW

W niektórych postaciach równań równowagi, a zwłaszcza w rozwiązaniach dla stanów dynamicznych występują zespoły oznaczeń poszczególnych indukcyjności, które można interpretować fizycznie jako współczynniki sprzężenia magnetycznego pewnych obwodów μ albo współczynniki rozproszenia magnetycznego σ . Po wprowadzeniu tych oznaczeń uzyskuje się większą przejrzystość zapisu równań i odpowiedzi.

Jeśli w maszynie płynie tylko prąd i_d (wszystkie inne prądy są równe zero), to na podstawie (7.37) strumień magnetyczny skojarzony z obwodem podłużnym stojana (w tym przypadku tylko od prądu i_d) i strumień magnetyczny skojarzony z podłużnym obwodem wzbudzenia (wirnika) są następujące:

$$\begin{aligned} \Psi_d &= \Psi_{dd} = L_d i_d \\ \Psi_f &= \Psi_{fd} = \frac{3}{2} M_{lf} i_d \end{aligned} \quad (7.72)$$

Strumień magnetyczny skojarzony przypadający na jeden zwój, czyli tak zwany średni strumień magnetyczny od prądu i_d skojarzony z jednym zwojem obwodu podłużnego stojana

$$\Phi_{dd} = \frac{\Psi_{dd}}{z_s} = \frac{L_d i_d}{z_s}$$

Średni strumień magnetyczny od prądu i_d skojarzony z jednym zwojem obwodu wzbudzenia (wirnika)

$$\Phi_{fd} = \frac{\Psi_{fd}}{z_r} = \frac{3}{2} \frac{M_{lf} i_d}{z_r}$$

Średni strumień rozproszony od prądu i_d

$$\Phi_{dl} = \Phi_{dd} - \Phi_{fd} = \left(\frac{L_d}{z_s} - \frac{3}{2} \frac{M_{lf}}{z_r} \right) i_d$$