

przy czym wprowadzono oznaczenia

$$\Phi_d = \sin \vartheta_0 - \varrho_d \cos \vartheta_0; \quad \Phi'_d = \cos \vartheta_0 + \varrho_d \sin \vartheta_0$$

Do wyznaczenia pierwiastków równania piątego stopnia (7.312) potrzebna jest możliwość oszacowania, jak małe są jedne wielkości w porównaniu z innymi. Wobec trudności rozwiązania tego równania i uzyskania rozwiązania układu równań (7.306) często określa się charakter małych zakłóceń na podstawie odpowiednich kryteriów stabilności.

### 7.11.2.3. Postać kanoniczna równania charakterystycznego

Układ równań (7.306) można przekształcić wprowadzając zamiast zmiennych  $u_q^x$ ,  $u_d^x$ ,  $u_f^x$  nowe zmienne

$$\Psi_d = u_q^x + u_f^x$$

$$\Psi_q = u_d^x$$

$$\Psi_f = u_f^x + \mu_d u_q^x$$

Wielkości  $\Psi_d$  i  $\Psi_q$  oznaczają strumienie magnetyczne skojarzone z uzwojeniami stojana odpowiednio w osi podłużnej i w osi poprzecznej, a wielkość  $\Psi_f$  oznacza strumień magnetyczny skojarzony z uzwojeniami wirnika. Układ równań (7.306) napisany dla zmiennych  $\Psi_d$ ,  $\Psi_q$ ,  $\Psi_f$  uzyskuje postać kanoniczną. Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\Delta \Psi_d = x_1; \quad \Delta \Psi_q = x_2; \quad \Delta \Psi_f = x_3; \quad \Delta \vartheta = x_4; \quad s = x_5$$

otrzyma się układ równań

$$\left. \begin{aligned} (\varrho'_d + s) x_1 + x_2 - \varrho'_d x_3 - u_0 \cos \vartheta_0 x_4 + \Psi_{q0} x_5 &= 0 \\ -x_1 + (\varrho_q + s) x_2 - u_0 \sin \vartheta_0 x_4 - \Psi_{d0} x_5 &= 0 \\ -\mu_d \varrho'_f x_1 + (\varrho'_f + s) x_3 &= 0 \\ s x_4 - x_5 &= 0 \\ -g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + s x_5 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.320)$$

w którym oznaczono

$$g_1 = \frac{\mu_d}{\sigma_d K} \Psi_{q0}; \quad g_2 = \frac{1}{\sigma_d K} (\Psi_{f0} - \mu_d \Psi_{d0}) = \frac{u_{f0}}{K};$$

$$g_3 = \frac{1}{\sigma_d K} \Psi_{q0} = \frac{g_1}{\mu_d}$$

Ogólne rozwiązanie tego układu równań względem dowolnej niewiadomej ma postać

$$x_i = \sum_{k=1}^5 A_{ki} e^{s_k t} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (7.321)$$

przy czym:  $s_k$  –  $k$ -ty pierwiastek równania charakterystycznego układu równań (7.320)

$$A_{ki} = \frac{1}{\frac{dD(s)}{ds}} \sum_{l=1}^5 x_{l0} M_{li} \Big|_{s=s_k} \quad (7.322)$$

przy czym:  $M_{li}$  – minor  $i$ -tej kolumny (tzn. kolumny, której numer jest równy numerowi szukanej niewiadomej) i  $l$ -tego wiersza równania charakterystycznego (przy założeniu, że nie ma pierwiastków wielokrotnych). Należy zaznaczyć, że wyznacznik charakterystyczny może być rozłożony według elementów  $i$ -tej kolumny

$$D(s) = \sum_{l=1}^5 a_{li} M_{li} \quad (7.323)$$

Przy obliczaniu wyrażenia  $A_{ki}$  według wzoru (7.322) można korzystać z wyznacznika  $\bar{D}_i(s)$ , który otrzymuje się z wyznacznika  $D(s)$  przez zastąpienie elementów  $i$ -tej kolumny początkowymi wartościami odpowiednich zmiennych, czyli przez podstawienie  $x_{10}$  zamiast  $a_{1i}$ ,  $x_{20}$  zamiast  $a_{2i}$  itd. Wtedy rozwiązaniem układu jednorodnych, liniowych równań różniczkowych o postaci kanonicznej jest wyrażenie

$$x_i = \sum_{k=1}^5 \frac{\bar{D}_i(s)}{\frac{dD(s)}{ds}} e^{s_k \tau} \Big|_{s=s_k} \quad (7.324)$$

Wyznacznik charakterystyczny kanonicznej postaci rozpatrywanego układu równań różniczkowych ma formę

$$D(s) = \begin{vmatrix} \varrho'_d + s & 1 & -\varrho'_d & -u_0 \cos \vartheta_0 & \psi_{q0} \\ -1 & \varrho'_q + s & 0 & -u_0 \sin \vartheta_0 & -\psi_{d0} \\ -\mu_d \varrho'_f & 0 & \varrho'_f + s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & -1 \\ -\mu_d g_3 & g_2 & g_3 & 0 & s \end{vmatrix} \quad (7.325)$$

Po zamianie zmiennych wyznacznik charakterystyczny nowego układu jest iloczynem wyznacznika starego układu i wyznacznika charakterystycznego transformacji liniowej, określającej zamianę zmiennych. Transformacja ta jest określona układem równań

$$\left. \begin{aligned} u_q^x &= \frac{1}{\sigma_d} \psi_d - \frac{1}{\sigma_d} \psi_f \\ u_d^x &= \psi_q \\ u_f^x &= -\frac{\mu_d}{\sigma_d} \psi_d + \frac{1}{\sigma_d} \psi_f \end{aligned} \right\} \quad (7.326)$$

którego wyznacznikiem jest

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sigma_d} & 0 & -\frac{1}{\sigma_d} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\mu_d}{\sigma_d} & 0 & \frac{1}{\sigma_d} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sigma_d} \quad (7.327)$$

Wyznacznik charakterystyczny układu równań o postaci kanonicznej jest równy iloczynowi wyznacznika charakterystycznego podstawowego układu równań i stałego współczynnika.

Pierwiastki wyznacznika (7.325) są równe pierwiastkom wyznacznika (7.311), określonym wzorami (7.315) oraz wzorami (7.316) lub (7.319). Dla potrzeb prowadzonych rozważań wystarczy przyjąć następujące wartości składników pierwiastków, określonych wzorami (7.316)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= -\varrho'_f \frac{A}{\chi^2} \\ \beta &= -\varrho'_f \frac{B}{2\chi^2} \\ \gamma &= \chi \\ \delta &= -\frac{\varrho_d + \varrho'_d}{2} \\ v^2 &= 1 - \frac{(\varrho_d - \varrho'_d)^2}{4} \end{aligned} \right\} \quad (7.328)$$

Równanie charakterystyczne o pierwiastkach określonych wzorami (7.315) ma postać

$$D(s) = (s - \alpha) [(s - \beta)^2 + \chi^2 (s - \delta)^2 + v^2] = 0$$

skąd

$$\begin{aligned} \frac{dD(s)}{ds} &= [(s - \beta)^2 + \chi^2] [(s - \delta)^2 + v^2] + 2(s - \alpha)(s - \beta) [(s - \delta)^2 + v^2] + \\ &+ 2(s - \alpha)(s - \delta) [(s - \beta)^2 + \chi^2] \end{aligned}$$

Wartości  $\frac{dD(s)}{ds}$  dla poszczególnych pierwiastków obliczone przy pominięciu wielkości małych wyższego rzędu są następujące:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=\alpha} &\approx \chi^2 \\ \frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=\beta \pm j\chi} &\approx -2\chi^2 \left( 1 \pm j \frac{\alpha - \beta}{\chi} \right) \\ \frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=\delta \pm jv} &\approx 2(1 \pm j3\delta) \end{aligned} \right\} \quad (7.329)$$

Obecność jakiegokolwiek stałego współczynnika w wyznaczniku nie wpływa na wartość współrzędnej określonej wzorem (7.324), ponieważ taki współczynnik występuje zarówno w liczniku, jak i w mianowniku tego wzoru.

#### 7.11.2.4. Wyrażenie na małe odchylenia wirnika

Kanoniczna postać równań zostanie zastosowana do analizy charakteru małych odchyżeń wirnika. Rozpatrzony zostanie przypadek, w którym możliwy jest do uzyskania nowy stan ustalony po zaniknięciu zjawisk stanu przejściowego. Zakłócenie jest wywołane zmianą momentu przy niezmiennym napięciu wzbudzenia (niezmienionej wartości  $u_f$ ) turbogeneratora współpracującego z siecią sztywną (niezmieniona wartość  $u$ ). Współrzędnymi nowego stanu ustalonego są współrzędne  $\Psi_{d0}$ ,  $\Psi_{q0}$ ,  $\Psi_{f0}$ ,  $\vartheta_0$ , związane ze współrzędnymi pierwotnymi transformacją liniową określoną układem równań (7.326). Na podstawie równań (7.304) i (7.326) otrzymuje się warunki nowego stanu ustalonego turbogeneratora z biegunami utajonymi ( $\lambda = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} \varrho'_d \Psi_{d0} + \Psi_{q0} - \varrho'_d \Psi_{f0} &= u_0 \sin \vartheta_0 \\ -\Psi_{d0} + \varrho_d \Psi_{q0} &= -u_0 \cos \vartheta_0 \\ -\mu_d \Psi_{d0} + \Psi_{f0} &= \sigma_d u_{f0} \\ -\mu_d \Psi_{d0} \Psi_{q0} + \Psi_{f0} \Psi_{q0} &= \sigma_d X_q M_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.330)$$

Po zastosowaniu do układu równań (7.330) podobnych przekształceń, jakie były wykonane przy przejściu z układu równań (7.304) do układu (7.305) i przy założeniu, że  $\Delta u_0 = \Delta u_{f0} = 0$  (albo po przekształceniu układu (7.330) metodą małych przyrostów przy założeniu, że  $\Delta u_0 = \Delta u_{f0} = 0$ ) otrzymuje się układ równań

$$\left. \begin{aligned} \varrho'_d \Delta \Psi_{d0} + \Delta \Psi_{q0} - \varrho'_d \Delta \Psi_{f0} - u_0 \cos \vartheta_0 \Delta \vartheta_0 &= 0 \\ -\Delta \Psi_{d0} + \varrho_d \Delta \Psi_{q0} - u_0 \sin \vartheta_0 \Delta \vartheta_0 &= 0 \\ -\mu_d \Delta \Psi_{d0} + \Delta \Psi_{f0} &= 0 \\ -\mu_d \Psi_{q0} \Delta \Psi_{d0} + (\Psi_{f0} - \mu_d \Psi_{d0}) \Delta \Psi_{q0} + \Psi_{q0} \Delta \Psi_{f0} &= \sigma_d X_q \Delta M_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.331)$$

Z rozwiązania trzech pierwszych równań tego układu otrzymuje się, że przy odchyleniu początkowym wirnika o  $\Delta \vartheta_0$  następuje zmiana pozostałych współrzędnych o następujące wartości:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Psi_{d0} &= -u_0 \frac{\sin \vartheta_0 - \varrho_d \cos \vartheta_0}{1 + \varrho_d^2} & \Delta \vartheta_0 &= -(\Psi_{q0} - \varrho_d u'_f) \Delta \vartheta_0 \\ \Delta \Psi_{q0} &= u_0 \frac{\cos \vartheta_0 + \varrho_d \sin \vartheta_0}{1 + \varrho_d^2} & \Delta \vartheta_0 &= (\Psi_{d0} - \varrho_d^2 u'_f) \Delta \vartheta_0 \\ \Delta \Psi_{f0} &= -u_0 \mu_d \frac{\sin \vartheta_0 - \varrho_d \cos \vartheta_0}{1 + \varrho_d^2} & \Delta \vartheta_0 &= -\mu_d (\Psi_{q0} - \varrho_d u'_f) \Delta \vartheta_0 \end{aligned} \right\} \quad (7.332)$$

przy czym

$$u'_f = \frac{u_0}{1 + \varrho_d^2}$$

Zgodnie z określeniem wyznacznika  $\bar{D}_4(s)$  podanym przy omówieniu odpowiedzi określonej wzorem (7.324) otrzymuje się wyznacznik  $\bar{D}_4(s)$  przez zastąpienie wyrazów czwartej kolumny wyznacznika (7.325) rozwiązaniami określonymi wzorem (7.332), przy czym w czwartym wierszu – wobec  $s = s \Delta\vartheta$  – należy wstawić liczbę 1. Wobec tego

$$\bar{D}_4(s) = \begin{vmatrix} \varrho'_d + s & 1 & -\varrho'_d & -\Psi_{q0} + \varrho_d u'_f & \Psi_{q0} \\ -1 & \varrho_d + s & 0 & \Psi_{d0} - \varrho_d^2 u'_f & -\Psi_{d0} \\ -\mu_d \varrho'_f & 0 & \varrho'_f + s & -\mu_d (\Psi_{q0} - \varrho_d u'_f) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\mu_d g_3 & g_2 & g_3 & 0 & s \end{vmatrix} \quad (7.333)$$

Po odpowiednich przekształceniach wyznacznik  $D_4(s)$  można zapisać w formie rozwiniętej

$$\begin{aligned} \bar{D}_4(s) = & \left\{ [B + s(\varrho'_f + s)] [1 + (\varrho_d + s)^2] - \right. \\ & - \frac{\mu_d}{\sigma_d} 2\varrho_d^2 s \frac{u'_f \Psi_{q0}}{K} + \frac{\mu_d}{\sigma_d} \varrho_d s^2 (\varrho_d + s) - \\ & \left. - \frac{u_f^2}{K(1 + \varrho_d^2)} \left[ \varrho_d (\varrho'_f + s) (1 + \varrho_d^2 + \varrho_d s) + \frac{\mu_d}{\sigma_d} \varrho_d^2 (1 + \varrho_d s) \right] \right\} \Delta\vartheta_0 \end{aligned} \quad (7.334)$$

Niżej podano wartości  $D_4(s)_{s=s_k}$  obliczone z dokładnością odpowiadającą dokładności, z jaką zostały według wzoru (7.329) obliczone wyrażenia  $\left. \frac{dD(s)}{ds} \right|_{s=s_k}$  oraz podano części rozwiązania na  $\Delta\vartheta = x_4 = x_i$  według wzoru (7.324) odpowiadające poszczególnym pierwiastkom  $s_k$ . Dla  $s = s_1 = \alpha$  otrzymuje się

$$\bar{D}_4(s_1) = \left[ B + \frac{\mu_d}{\sigma_d} \varrho_d^2 \frac{\Psi_{q0}^2 - u_f^2}{K} - \varrho_f'^2 \frac{AB}{\chi^4} \right] \Delta\vartheta_0$$

a w przybliżeniu

$$\bar{D}_4(s_1) \approx \Delta\vartheta_0 B$$

Odpowiednia część rozwiązania (7.324) wynosi

$$\Delta\vartheta_0 \frac{B}{\chi^2} e^{\alpha\omega_1 t}$$

Dla  $s = s_{2,3} = \beta \pm j\chi$  otrzymuje się

$$\bar{D}_4(s_{2,3}) = -(A \pm j\chi\alpha) \Delta\vartheta_0 = -A \left( 1 \mp j \frac{\varrho_f'}{\chi} \right) \Delta\vartheta_0$$

Łączna część rozwiązania (7.324) odpowiadająca pierwiastkom  $s_{2,3}$  wynosi

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta_0 e^{\beta\omega_s t} \left[ \frac{A+j\chi\alpha}{2[\chi^2+j\chi(\alpha-\beta)]} e^{j\chi\omega_s t} + \frac{A-j\chi\alpha}{2[\chi^2-j\chi(\alpha-\beta)]} e^{-j\chi\omega_s t} \right] = \\ = \Delta\vartheta_0 e^{\beta\omega_s t} \frac{A}{\chi^2} \left( \cos \chi\omega_s t - \frac{3\beta}{\chi} \sin \chi\omega_s t \right) \end{aligned}$$

Dla  $s = s_{4,5} = \delta \pm j\nu$  można obliczyć  $\bar{D}_4(s_{4,5})$  i po podstawieniu do wzoru (7.324) otrzymać łączną część rozwiązania, odpowiadającą pierwiastkom  $s_4$  i  $s_5$

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta_0 \left\{ s(\varrho'_f + s)(\varrho_d + s)(\varrho_d - \varrho'_d) + \frac{\mu_d}{\sigma_d} \varrho_d s^2 (\varrho_d + s) + B(\varrho_d + s)(\varrho_d - \varrho'_d) - \right. \\ \left. - \frac{u_f^2 \varrho_d}{K(1+\varrho_d^2)} \left[ (\varrho'_f + s)(1 + \varrho_d s + \varrho_d^2) + \frac{\mu_d}{\sigma_d} \varrho_d (1 + \varrho_d s) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\sigma_d}{\mu_d} \frac{u_f \Psi_{q0}}{K} \frac{2\varrho_d^2 s}{1 + \varrho_d^2} \right\} \Big|_{s=\delta \pm j\nu} \end{aligned}$$

Po podstawieniu wyrażeń na  $s$ , pominięciu małych odpowiednio wyższego rzędu, otrzymuje się wyrażenie na łączne odchylenie wirnika odpowiadające pierwiastkom  $s_4$  i  $s_5$

$$\Delta\vartheta_0 e^{\delta\omega_s t} \mu_d \varrho'_f \varrho'_d \left( \cos \nu\omega_s t + \frac{\mu_d B + \sigma_d E}{\mu_d \varrho'_f} \sin \nu\omega_s t \right)$$

Całkowite odchylenie wirnika, jako suma wszystkich powyższych częściowych rozwiązań, jest określone wyrażeniem

$$\begin{aligned} \Delta\vartheta = \Delta\vartheta_0 \left[ \frac{B}{\chi^2} e^{\alpha\omega_s t} + \frac{A}{\chi^2} e^{\beta\omega_s t} \left( \cos \chi\omega_s t - \frac{3\beta}{\chi} \sin \chi\omega_s t \right) + \right. \\ \left. + \mu_d \varrho'_f \varrho'_d e^{\delta\omega_s t} \left( \cos \nu\omega_s t + \frac{\mu_d B + \sigma_d E}{\mu_d \varrho'_f} \sin \nu\omega_s t \right) \right] \quad (7.335) \end{aligned}$$

Wyrażenie to określa odchylenie wirnika od położenia synchronicznego w przypadku, kiedy wymuszeniem jest nagła zmiana momentu o taką wartość, że przyrost kąta odchylenia w nowym stanie ustalonym wynosi  $\Delta\vartheta_0$  względem położenia w początkowym stanie ustalonym. Wartość napięcia sieci i wartość napięcia wzbudzenia pozostały przy tym wymuszeniu bez zmiany. Ponadto słuszność wyrażenia (7.335) jest ograniczona tylko do przypadku niewielkich odchyień.

#### 7.11.2.5. Warunki stabilności statycznej na podstawie analizy wyrażenia na małe odchylenia wirnika

Z analizy wzoru (7.335) wynika, że w przypadku zakłócenia polegającego na nagłej zmianie momentu obrotowego przy stałej wartości napięcia sieci i napięcia wzbudzenia odchylenie wirnika składa się z trzech rodzajów odchyień. Są to:

– kołysania tłumione o pulsacji  $\omega_s$ ;

- kołysania tłumione o pulsacji  $\chi\omega_s$ ;
- odchylenia nieokresowe.

Można przyjąć, że  $\nu \approx 1$ . Oznacza to, że pulsacja  $\nu\omega_s$ , jest prawie równa pulsacji synchronicznej. Względna wartość amplitudy tych kołysań (względem odchylenia  $\Delta\vartheta_0$ ) wynosi  $\mu_d \varrho'_f \varrho'_d$ . Tę wartość dla dużych turbogeneratorów można oszacować na około  $10^{-4}$ . Fizycznym wyjaśnieniem tak małej wartości amplitudy kołysań o częstotliwości prawie synchronicznej jest bardzo duży moment inercji wirnika i bardzo duża energia nagromadzona w wirujących masach, co uniemożliwia szybkie zmiany ruchu. Stała czasowa tłumienia tych kołysań

$$T = -\frac{1}{\delta\omega_s} = \frac{1}{(\varrho_d + \varrho'_d)\pi f}$$

Można oszacować, że dla dużych turbogeneratorów wartość tej stałej czasowej jest rzędu  $10^{-1}$  s. Kołysania wirnika o częstotliwości prawie synchronicznej mają więc bardzo małą amplitudę i bardzo małą stałą czasową i dlatego można je pominąć popełniając przy tym znikomą mały błąd. Te kołysania są związane z pierwiastkami  $s_{4,5}$  równania charakterystycznego. Stąd wniosek, że przy analizie tych zagadnień można dopuścić takie uproszczenia w równaniu charakterystycznym, które zmniejszają liczbę pierwiastków tego równania o dwa. Może to znacznie zmniejszyć trudności rozpatrywania tych zagadnień w bardziej skomplikowanych przypadkach np. w przypadku współpracy kilku maszyn.

Występowanie kołysań prawie synchronicznych powoduje, że wartość początkowa (przy  $t = 0$ ) odchylenia wyznaczona ze wzoru (7.335) jest różna od  $\Delta\vartheta_0$ . Jest to oczywiście fizycznie niemożliwe, a jest spowodowane błędem wynikającym z przyjętych poprzednio uproszczeń.

Po pominięciu kołysań o częstotliwości prawie synchronicznej całkowite odchylenie wirnika składa się z odchylenia nieokresowego i z odchylenia okresowego (kołysań) o pulsacji  $\chi\omega_s$ .

Z grubsza można oszacować, że okres kołysań o pulsacji  $\chi\omega_s$ , jest rzędu 1 s. Te właśnie kołysania są nazywane w języku potocznym *kołysaniami wirnika*. Można wyróżnić dwa przypadki: w pierwszym jest  $A > 0$ , w drugim jest  $A < 0$ . Przy  $A > 0$  początkowe odchylenie nieokresowe jest mniejsze od  $\Delta\vartheta_0$ , kierunek początkowego odchylenia okresowego jest zgodny z kierunkiem odchylenia nieokresowego i te dwa rodzaje odchylenia dają łącznie odchylenie równe  $\Delta\vartheta_0$ .

Wyrażenie  $B$  zgodnie ze wzorem (7.314) jest zawsze dodatnie, więc zgodnie ze wzorem (7.328) wyrażenie  $\beta$  ma zawsze wartość ujemną, co oznacza, że kołysania wirnika są tłumione wokół położenia wyznaczonego przez odchylenie nieokresowe. Stałą czasową tłumienia tych kołysań dla dużych turbogeneratorów można oszacować na  $T_\beta = -\frac{1}{\beta\omega_s} \approx (3 \div 5)$  s.

Przy  $A > 0$ , zgodnie ze wzorem (7.328), wyrażenie  $\alpha < 0$ . Oznacza to, że nieokresowe odchylenie wirnika jest tłumione ze stałą czasową  $T_\alpha = -\frac{1}{\alpha\omega_s}$ , której wartość dla dużych turbogeneratorów można oszacować na kilkanaście

sekund. W rezultacie przy  $A > 0$  kołysania wirnika (o częstotliwości około  $1 \text{ s}^{-1}$  i o amplitudzie równej kilkunastu procentom odchylenia początkowego) wokół odchylenia nieokresowego zostaną stłumione po upływie kilkunastu sekund, a odchylenie nieokresowe zostanie stłumione po upływie kilkudziesięciu sekund i wirnik asymptotycznie dojdzie do położenia, odpowiadającego nowemu stanowi ustalonemu. Przez cały czas trwania zakłócenia odchylenia wirnika zachowały charakter małych wychyleń, czyli dla całego czasu trwania zakłócenia słuszne są założenia przyjęte przy linearyzacji równań różniczkowych.

Przyjęta metoda rozwiązywania zagadnienia jest więc przy  $A > 0$  słuszna. Na tej podstawie można wyciągnąć wniosek, że dla  $A > 0$  ruch wirnika jest stabilny. Oznacza to, że przy stałym napięciu wzbudzenia dodatnim ( $u_{f0}^x > 0$ ) jednym z warunków stabilności ruchu stojana, zgodnie z definicją współczynnika  $A$  według wzoru (7.314), jest warunek  $i_{d0} > -u_{f0}^x/X_d$ . Warunek  $i_{d0} > -u_{f0}^x/X_d$  z kolei oznacza, że wartość bezwzględna prądu stojana o charakterze indukcyjnym nie może przekraczać wartości bezwzględnej  $u_{f0}/X_d$ . Może to np. oznaczać, że przy stałej wartości napięcia wzbudzenia wartość napięcia sieci, z którą turbogenerator współpracuje, nie może być mniejsza od pewnej określonej wartości. W przypadku  $A < 0$  zgodnie ze wzorem (7.328)  $\alpha > 0$ , oraz w dalszym ciągu  $\beta < 0$ . Oznacza to, że kołysania wirnika względem odchylenia nieokresowego są także w tym przypadku tłumione ze stałą czasową  $T_\beta$ , ale odchylenie nieokresowe nie jest przebiegiem tłumionym, lecz przebiegiem stale rosnącym. Niezależnie od wartości odchylenia początkowego już po upływie kilkudziesięciu sekund odchylenie wirnika przestaje być małe. W takim przypadku odchylenie wirnika nie może być określone wzorem (7.335). Ten wzór wyprowadzony dla małych odchyleni może dla przypadku  $A < 0$  określać odchylenia tylko na początku zakłócenia. Wnioski dotyczące charakteru odchyleni wirnika wyciągnięte ze wzoru (7.335) potwierdzają się jednak zarówno przez doświadczenie, jak i przez rozwiązanie odpowiednich równań bez stosowania uproszczeń słusznych tylko dla małych odchyleni. Dlatego można powiedzieć, że dla  $A < 0$  ruch wirnika jest ruchem niestabilnym.

Na podstawie wyrażenia (7.335) znak współczynnika  $\alpha$ , będącego jednym z pierwiastków układu równań różniczkowych jednorodnych liniowych (7.320), stanowi kryterium stabilności ruchu wirnika. Znak  $\alpha$  jest określony w przybliżeniu wzorem (7.328), przy czym przy  $\alpha < 0$  początkowe zakłócenie zanika wykładniczo, przy  $\alpha > 0$  początkowe zakłócenie wzrasta wykładniczo do wartości nieskończenie wielkiej.

Na podstawie równań (7.313) i (7.319) można napisać

$$\alpha = - \frac{a_s}{(1 + q_d q_d') \chi^2 - q_d q_d' (\mu_d B + E)} \quad (7.336)$$

Wielkości  $\chi^2, B, E$  — są wielkościami małymi drugiego rzędu, wielkość  $q_d q_d'$  jest wielkością pierwszego rzędu. Stąd pierwszy człon mianownika wyrażenia (7.336) jest wielkością małą drugiego rzędu, a drugi człon tego mianownika jest wielkością małą trzeciego rzędu, czyli mianownik wyrażenia (7.336) jest zawsze dodatni. Znak  $\alpha$



jest zawsze przeciwny do znaku  $a_5$ . Warunkowi stabilności  $\alpha < 0$  odpowiada więc warunek stabilności  $a_5 > 0$ .

Dla turbogeneratorów z biegunami utajonymi, zgodnie ze wzorem (7.313) i (7.314)

$$a_5 = \varrho'_f [(1 + \varrho_d^2) A - \varrho_d^2 E] = \frac{\varrho'_f}{K} [(1 + \varrho_d^2) (u_{f0}^x u_{d0}^x + u_{f0}^{x^2}) - \varrho_d^2 u_{f0}^{x^2}]$$

Na podstawie wzoru (7.304) wyrażenie to można przekształcić do postaci

$$a_5 = \frac{\varrho'_f}{K} u_{f0}^x u_0 (\cos \vartheta_0 + \varrho_d \sin \vartheta_0)$$

po oznaczeniu  $\varrho_d = \tan \xi$

$$a_5 = \frac{\varrho'_f}{K} \sqrt{1 + \varrho_d^2} u_{f0}^x u_0 \cos (\vartheta_0 - \xi)$$

Warunek stabilności  $a_5 > 0$  sprowadza się więc do warunku

$$\cos (\vartheta_0 - \xi) > 0$$

czyli

$$\vartheta_0 - \xi < \frac{\pi}{2}$$

Kąt  $\vartheta_0$  oznaczający granicę między obszarem pracy stabilnym i niestabilnym jest równy kątowi, przy którym występuje maksimum momentu przy danym wzbudzeniu.

#### 7.11.2.6. Częstotliwość kołysań wirnika

Pulsacja kołysań wirnika określonych wzorem (7.335) jest równa  $\omega_k = \chi \omega_s$ . Współczynnik  $\chi$  oraz jego składowe  $A$  i  $B$  określone są wzorem (7.314). Na podstawie określeń współczynników  $A$  i  $B$  można napisać

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{K} u_{f0}^x \Psi_{d0} \approx \frac{u_{f0}^x}{K} [u_0 \cos (\vartheta_0 - \xi) + \varrho_d^2 u_{f0}^x] \\ B &= \frac{1}{K} \frac{\mu_d}{\sigma_d} (u_{d0}^x)^2 \approx \frac{\mu_d}{\sigma_d K} [u_0 \sin (\vartheta_0 - \xi) + \varrho_d u_{f0}^x] \end{aligned} \right\} \quad (7.337)$$

Korzystając ze wzorów (7.314) i (7.337) oraz oznaczenia  $K = X_q \omega_s H_J$  wyznacza się:

— pulsację kołysań

$$\omega_k = \sqrt{\frac{\omega_s (u_{f0}^x u_0 \cos \vartheta_0 + \frac{\mu_d}{\sigma_d} u_0^2 \sin^2 \vartheta_0)}{X_q H_J}} \quad (7.338)$$

— częstotliwość kołysań

$$f_k = \sqrt{\frac{f_s (u_{f0}^x u_0 \cos \vartheta_0 + \frac{\mu_d}{\sigma_d} u_0^2 \sin^2 \vartheta_0)}{2\pi X_q H_J}}$$

Wykorzystując związek  $\frac{\mu_d}{\sigma_d} = \frac{X_d}{X'_d} - 1$  uzyskuje się inną postać wyrażenia na częstotliwość kołysań

$$f_k = \sqrt{\frac{f_s}{2\pi}} \sqrt{\frac{1}{X_q H_J}} \sqrt{u_{f0}^x u_0 \cos \vartheta_0 + \left(\frac{X_d}{X'_d} - 1\right) u_0^2 \sin^2 \vartheta_0} \quad (7.339)$$

Wzór (7.339) można napisać w postaci

$$f_k = k_t f_{k0} \quad (7.340)$$

przy czym częstotliwość kołysań przy idealnym biegu jałowym

$$f_{k0} = \sqrt{\frac{f_s}{2\pi}} \sqrt{\frac{1}{X_q H_J}} \quad (7.341)$$

a współczynnik zwiększenia częstotliwości kołysań przy przejściu od idealnego biegu jałowego do danego obciążenia

$$k_t = \sqrt{u_{f0}^x u_0 \cos \vartheta_0 + \left(\frac{X_d}{X'_d} - 1\right) u_0^2 \sin^2 \vartheta_0} \quad (7.342)$$

W turbogeneratorach jest  $X_q = X_d$ . Dla turbogeneratorów o  $P_N = 200$  MW można przyjąć przeciętne wartości

$$X_d H_J \approx 4,24; \quad K = \omega_s X_d H_J \approx 1330; \quad \frac{\mu_d}{\sigma_d} = \frac{X_d}{X'_d} - 1 \approx 5,6$$

Częstotliwość kołysań turbogeneratorsa dużej mocy przy idealnym biegu jałowym wynosi  $f_{k0} = 1,34 \text{ s}^{-1}$ . Przyjmując dla idealnego biegu jałowego  $u_{f0}^x = 1$ ;  $u_0 = 1$ ;  $\vartheta_0 = 0$ , a dla obciążenia znamionowego  $u_0 = 1$ ;  $u_{f0}^x = 2,5$ ;  $\vartheta_0 = 30^\circ$  otrzymuje się wartość współczynnika zwiększenia częstotliwości kołysań wirnika  $k_t \approx 1,87$ .

Częstotliwość kołysań wirnika zależy od parametrów konstrukcyjnych i parametrów obciążenia maszyny synchronicznej, natomiast nie zależy ona od rodzaju wymuszeń.

### 7.11.3. Uwagi o innych metodach badania stabilności statycznej

Zasadniczą trudnością uzyskania odpowiedzi układu równań (7.306) jest trudność rozwiązania równania charakterystycznego piątego stopnia (7.311). Wyznaczenie pierwiastków tego równania jest możliwe tylko w tym przypadku, kiedy możliwe jest oszacowanie, jak małe są jedne wielkości wchodzące do tego równania w porównaniu z innymi.

Stabilność statyczną maszyny synchronicznej można określić bez rozwiązywania układu równań (7.306) przez zbadanie stabilności układu tych równań.

Na podstawie twierdzeń Lapunowa można stwierdzić, że stan określony układem równań różniczkowych liniowych (7.306) jest stabilny, tzn. małe odchylenia

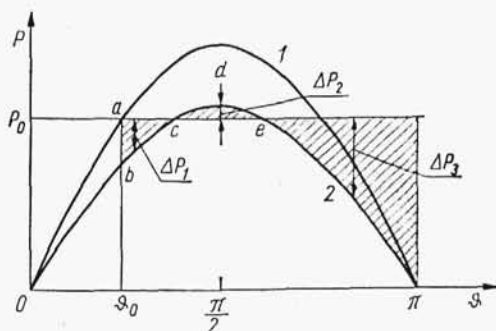
w funkcji czasu dążą do zera, jeśli pierwiastki równania charakterystycznego (7.311) tego układu leżą w lewej półpłaszczyźnie Gaussa. Stan jest niestabilny, jeśli przynajmniej jeden pierwiastek równania charakterystycznego leży w prawej półpłaszczyźnie Gaussa. Stan jest na granicy stabilności, jeśli pierwiastki leżą na osi liczb urojonych.

Dla uniknięcia konieczności rozwiązywania równania charakterystycznego piątego stopnia określa się znaki pierwiastków równania charakterystycznego, stosując np. kryterium Hurwitza, podające warunki konieczne i dostateczne na to, aby równanie algebraiczne o współczynnikach rzeczywistych miało tylko pierwiastki o częściach rzeczywistych ujemnych.

Istnieją ponadto inne metody badania stabilności statycznej. Są to najczęściej metody uproszczone (np. zastosowanie kryterium właściwej mocy synchronizującej  $\frac{dP}{d\delta} > 0$ , albo kryterium pochodnej mocy biernej względem napięcia w węźle odbiorczym  $\frac{dQ}{dU} < 0$ ) i dotyczą całego systemu energetycznego.

#### 7.11.4. Uwagi o metodach badania stabilności dynamicznej

Do badania stabilności dynamicznej można stosować metodę równych pól. Polega ona na porównaniu pola będącego miarą energii kinetycznej nagromadzonej w wirniku w czasie tej części odchylenia wirnika, w którym ruch jego ma charakter przyspieszony z polem będącym miarą energii kinetycznej traconej przez wirnik w czasie tej części odchylenia wirnika, w którym ruch jego ma charakter opóźniony. Korzysta się przy tym z charakterystyk kątowych maszyny synchronicznej w różnych warunkach, jak np. pokazane na rys. 7.61 najprostsze charakterystyki kątowe w sta-



Rys. 7.61. Ilustracja zastosowania metody równych pól do badania stabilności dynamicznej

nie ustalonym (przy  $U_{if} = \text{const}$ ;  $U = \text{const}$ ). Turbogenerator w początkowym swoim stanie ustalonym pracował w punkcie  $a$  na krzywej 1, to jest z dużą mocą  $P_0$  i przy dużym kącie obciążenia  $\delta_0$ . Na skutek zmiany parametrów (np. naglej zmiany napięcia na zaciskach) punkt pracy przesunął się do punktu  $b$  na niżej położonej charakterystyce 2. Pojawia się moc przyspieszająca dodatnia  $\Delta P_1$ , prądnica zwiększa

prędkość kątową, punkt pracy przesuwa się do punktu  $c$ , w którym jest równowaga mocy (i momentów) prądnicy i turbiny, ale w którym jest także  $\omega > \omega_s$ . Punkt pracy przesuwa się dalej po charakterystyce kątowej 2. Pole hamowania  $cde$  przy mocy  $\Delta P_2 < 0$  jest mniejsze od pola przyspieszenia  $abc$  przy  $\Delta P_1 > 0$ , punkt pracy prądnicy przekroczy punkt  $e$ , pojawia się moc przyspieszająca  $\Delta P_3 > 0$ , prędkość prądnicy  $\omega$  wzrasta w dalszym ciągu, prądnica wypada z synchronizmu.

Dokładniejsze wyniki uzyskuje się, jeśli zamiast charakterystyki kątowej przy  $U_{lf} = \text{const}$  stosuje się inne charakterystyki kątowe, np. charakterystykę kątową przy  $U'_q = \text{const}$ , gdzie  $U'_q$  oznacza napięcie za reaktancją przejściową podłużną. Napięcie za reaktancją przejściową podłużną  $U'_q$  otrzymuje się z wykresu wektorowego zbudowanego dla stanu nieustalonego w sposób analogiczny do pokazanego na rys. 3.113 wykresu wektorowego maszyny synchronicznej dla stanu ustalonego.