

Część pierwsza. PODSTAWY MATEMATYCZNE I FIZYCZNE

1. ZARYS TEORII ELEKTROMECHANICZNEGO PRZETWARZANIA ENERGII

1.1. WIADOMOŚCI OGÓLNE

W układach elektromaszynowych następuje przetwarzanie energii mechanicznej na elektryczną (w prądnicach), elektrycznej na mechaniczną (w silnikach) albo elektrycznej jednego rodzaju na elektryczną innego rodzaju (w transformatorach i przetwornicach). Na ogół zachodzą jednocześnie zjawiska mechaniczne i elektromagnetyczne, należy więc je uwzględniać łącznie. Wspólną cechą tych dwóch grup zjawisk jest przepływ energii. Wielkości, za pomocą których można opisać stan energetyczny jakiegoś układu nazywa się *współrzednymi stanu*. Można także ustalić współrzedne, za pomocą których można opisać stan energetyczny poszczególnych elementów (mechanicznych, elektromagnetycznych) układu. Wobec formalnej identyczności opisu stanów energetycznych pewnych grup elementów mechanicznych i elektromagnetycznych można do opisu ich stanu energetycznego przyjąć pewne współrzedne uogólnione ξ_i i ich pochodne $\dot{\xi}_i$. Dzięki temu uzyskuje się formalną identyczność równań równowagi ruchu mechanicznego postępowego i obrotowego oraz „ruchu elektromagnetycznego”.

Współrzedne uogólnione stanowią zespół niezależnych wielkości fizycznych, określających stan (np. energetyczny) układu. Każdemu stanowi układu odpowiada jeden i tylko jeden zespół wartości tych wielkości.

Każdy rzeczywisty ruch układu materialnego zależy od układu sił na niego działających, więzów nałożonych na ruch oraz warunków początkowych ruchu. Taki ruch nazywa się *ruchem wirtualnym*, czyli ruchem mogącym zaistnieć, (teoretycznie) możliwym.

Więzy, czyli warunki ograniczające dowolność zmian współrzednych, dzielą się na:

- więzy stałe w czasie (ustalone) – więzy skleronomiczne;
- więzy zależne od czasu – więzy reonomiczne;
- więzy określone równaniami – więzy dwustronne;
- więzy określone nierównościami – więzy jednostronne;
- więzy określone równaniami (nierównościami) nie zawierającymi pochodnych

współrzędnych albo równaniami różniczkowymi całkowalnymi, które w wyniku operacji całkowania dają rozwiązanie algebraiczne – więzy holonomiczne;

- więzy określone równaniami (nierównościami) nie spełniającymi warunków podanych przy określeniu więzów holonomicznych – więzy anholonomiczne.

Elementy, w których zachodzą przemiany energetyczne, czyli *magazyny energii*, dzielą się na:

- konserwatywne (zachowawcze), w których praca sił zewnętrznych zamienia się całkowicie na energię (kinetyczną albo potencjalną) bez strat;
- dyssypatywne (rozpraszające), w których praca sił zewnętrznych zamienia się na ciepło. W elementach dyssypatywnych nie występuje zjawisko magazynowania energii, ale dla ujednolicenia nomenklatury są one czasem nazywane magazynami.

1.2. CHARAKTERYSTYKI MAGAZYNÓW ENERGII

Stan dynamiczny magazynów energii może być opisany za pomocą ich charakterystyk, tj. wyrażeń matematycznych, wiążących ze sobą wielkość magazynu, jedną współrzędną stanu (albo krótko współrzędną) i pochodną drugiej współrzędnej albo wielkość magazynu i pochodne obydwóch współrzędnych. W ruchu mechanicznym postępującym występują:

- współrzędne: położenie x , pęd p ;
- pochodne współrzędnych: prędkość $v = \dot{x}$, siła $F = \dot{p}$.

W ruchu mechanicznym obrotowym występują:

- współrzędne: położenie kątowe γ , kręt, czyli moment pędu $l = rp$ (r – promień obrotu);
- pochodne współrzędnych: prędkość kątowa $\dot{\gamma} = \omega$, moment obrotowy $M = \dot{l} = \dot{p} r = Fr$.

Przy przemianach elektromagnetycznych, zwanych dalej „*ruchem elektrycznym*”, występują:

- współrzędne: strumień skojarzony Ψ , ładunek q ;
- pochodne: napięcie $u = \dot{\Psi}$, prąd $i = \dot{q}$.

Elementami (magazynami) konserwatywnymi są: element masy i element sprężysty (w ruchu mechanicznym postępującym), element inercji i element sprężysty (w ruchu mechanicznym obrotowym) oraz indukcyjność i pojemność (w ruchu elektrycznym). Elementami (magazynami) dyssypatywnymi są: element tarcowy (tłumiący) o współczynniku tłumienia lepkiego D_l (w ruchu postępującym), element tarcowy (tłumiący) o współczynniku tłumienia lepkiego D_r (w ruchu obrotowym) oraz rezystancja R (albo konduktancja $G = 1/R$) w „*ruchu elektrycznym*”. Charakterystyki poszczególnych magazynów zestawiono w tabl. 1.1. Charakterystyki magazynów konserwatywnych są opisane przy użyciu jednej współrzędnej i pochodnej drugiej współrzędnej. Charakterystyki magazynów dyssypatywnych są opisane przy użyciu pochodnych obydwóch współrzędnych. Charakterystyki elementów dyssypatywnych zawierają odpowiednio: siłę dyssypacji F_d jako pochodną pędu dyssypacji p_d albo moment (obrotowy) dyssypacji M_d jako pochodną krętu dyssypacji l_d . W „*ruchu*

Tablica 1.1: Charakterystyki magazynów energii

Rodzaj magazynu	Ruch mechaniczny postępowy		Ruch mechaniczny obrotowy		Ruch elektryczny		
	Element	Charakterystyka	Element	Charakterystyka	Metoda oczkowa		Metoda węzłowa
					Element	Charakterystyka	Element
Konservatywny	Inercyjny	$m = \frac{p}{v} = \frac{p}{\dot{x}}$ Przy $m = \text{const}$ jest także $m = \frac{\dot{p}}{v} = \frac{\dot{p}}{\dot{x}}$ $= \frac{F}{a}$	Moment inercji J	$J = \frac{I}{\omega} = \frac{I}{\dot{\gamma}}$ Przy $J = \text{const}$ jest także $J = \frac{I}{\omega} = \frac{I}{\dot{\gamma}}$ $= \frac{M}{\dot{\omega}}$	Indukcyjność L	$L = \frac{\psi}{i} = \frac{\psi}{\dot{q}}$ Przy $L = \text{const}$ jest także $L = \frac{\dot{\psi}}{i} = \frac{\dot{\psi}}{\dot{q}}$ $= \frac{u}{i}$	$C = \frac{q}{u} = \frac{q}{\psi}$ Przy $C = \text{const}$ jest także $C = \frac{\dot{q}}{u} = \frac{\dot{q}}{\dot{\psi}} = \frac{i}{u}$
	Sprężysty	$K_t = \frac{x}{F} = \frac{x}{\dot{p}}$ $K_r = \frac{\gamma}{M} = \frac{\gamma}{I}$	Podatność skrętna K_r	$K_t = \frac{\gamma}{M} = \frac{\gamma}{I}$ $K_r = \frac{\gamma}{M} = \frac{\gamma}{I}$	Pojemność C	$C = \frac{q}{u} = \frac{q}{\psi}$ $L = \frac{\psi}{i} = \frac{\psi}{\dot{q}}$	Indukcyjność L
Dysypatywny	Współczynnik tłumienia lepkiego w ruchu postępowym D_t	$D_t = \frac{d\dot{a}}{dx} = \frac{F_d}{v}$	Współczynnik tłumienia lepkiego w ruchu obrotowym D_r	$D_r = \frac{I_d}{J} = \frac{M_d}{\omega}$	Rezystancja R	$R = \frac{\dot{\psi}}{i} = \frac{u_d}{i}$	Konduktancja $G = \frac{1}{R}$

elektrycznym” przy metodzie oczkowej sile dyssypacji odpowiada napięcie dyssypacji równe iloczynowi rezystancji i prądu, a przy metodzie węzłowej sile dyssypacji odpowiada prąd.

W „ruchu elektrycznym” istnieje dualizm w charakterystykach magazynów. Wynika to ze stosowania dwóch metod: oczkowej i węzłowej. W metodzie oczkowej sumuje się w obwodzie spadki napięć. Wtedy należy traktować indukcyjność jako magazyn inercyjny (bezwładnościowy), pojemność jako magazyn sprężysty. W metodzie węzłowej sumuje się prądy w węźle. Wtedy należy traktować pojemność jako magazyn inercyjny (bezwładnościowy), indukcyjność jako magazyn sprężysty.

1.3. ENERGIA MAGAZYNÓW

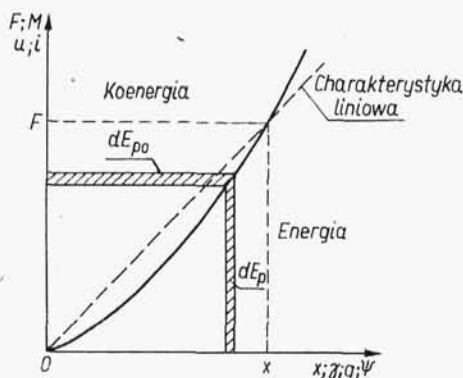
Elementarna energia potencjalna

$$dE_p = F dx \quad (1.1)$$

a elementarna koenergia potencjalna

$$dE_{po} = x dF \quad (1.2)$$

Ilustracją tych wyrażeń jest rys. 1.1.



Rys. 1.1. Ilustracja do pojęcia energii i koenergii potencjalnej

W tabelicy 1.2 podano wyrażenia na energię i koenergię potencjalną:

- w ruchu mechanicznym postępowym E_{pl} , E_{poi} przy użyciu współrzędnych x (odległość), $F = \dot{p}$ (siła jako pochodna pędu);
- w ruchu mechanicznym obrotowym E_{pr} , E_{por} przy użyciu współrzędnych γ (odległość kątowa), $M = \dot{l}$ (moment obrotowy jako pochodna krętu);
- w „ruchu elektrycznym” w metodzie oczkowej E_e , E_{oe} (energia i koenergia elektryczna) przy użyciu współrzędnych q (ładunek), $u = \dot{\Psi}$ (napięcie jako pochodna strumienia skojarzonego);
- w „ruchu elektrycznym” w metodzie węzłowej E_m , E_{om} (energia i koenergia magnetyczna) przy użyciu współrzędnych Ψ (strumień skojarzony), $i = \dot{q}$ (prąd jako pochodna ładunku).

Tablica 1.2. Wyrażenia na energię i koenergię potencjalną

Rodzaj ruchu Funkcja	Ruch postępowy	Ruch obrotowy	Ruch elektryczny	
			Metoda oczkowa	Metoda węzłowa
Energia potencjalna	$dE_{pl} = F dx$ $E_{pl} = \int_0^x F dx$	$dE_{pr} = M dy$ $E_{pr} = \int_0^y M dy$	$dE_e = u dq$ $E_e = \int_0^q u dq$	$dE_m = i d\psi$ $E_m = \int_0^\psi i d\psi$
Koenergia potencjalna	$dE_{pol} = x dF$ $E_{pol} = \int_0^F x dF$	$dE_{por} = \gamma dM$ $E_{por} = \int_0^M \gamma dM$	$dE_{oe} = q du$ $E_{oe} = \int_0^u q du$	$dE_{om} = \psi di$ $E_{om} = \int_0^i \psi di$
Związek między koenergią i energią potencjalną	$E_{pl} = xF - E_{pol}$	$E_{pr} = \gamma M - E_{por}$	$E_e = qu - E_{oe}$	$E_m = \psi i - E_{om}$
Charakterystyka magazynu	$F = \frac{1}{K_l} x$	$M = \frac{1}{K_r} \gamma$	$u = \frac{1}{C} q$	$i = \frac{1}{L} \psi$
Energia i koenergia potencjalna przy charakterystyce liniowej	$K_l = \text{const}$ $E_{pl} = E_{pol} = \frac{1}{2} xF = \frac{1}{2} \frac{1}{K_l} x^2$	$K_r = \text{const}$ $E_{pr} = E_{por} = \frac{1}{2} \gamma M = \frac{1}{2} \frac{1}{K_r} \gamma^2$	$C = \text{const}$ $E_e = E_{oe} = \frac{1}{2} qu = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$	$L = \text{const}$ $E_m = E_{om} = \frac{1}{2} \psi i = \frac{1}{2} \frac{1}{L} \psi^2$

Na osiach współrzędnych rys. 1.1 zaznaczono także współrzędne dla ruchu mechanicznego obrotowego oraz „ruchu elektrycznego” przy metodzie oczkowej i węzłowej, dzięki czemu rysunek staje się uniwersalną ilustracją pojęcia energii i koenergii potencjalnej różnych rodzajów ruchu.

Energia i koenergia potencjalna są wyrażone za pomocą pierwszej współrzędnej (x, γ, q, Ψ) i pochodnej drugiej współrzędnej ($F = \dot{p}, M = \dot{l}, u = \dot{\Psi}, i = \dot{q}$). Korzystając z odpowiedniej charakterystyki magazynu (tabl. 1.1) można pochodną drugiej współrzędnej wyrazić przez pierwszą współrzędną, a więc energię (i koenergię) potencjalną można wyrazić jako funkcję pierwszej współrzędnej.

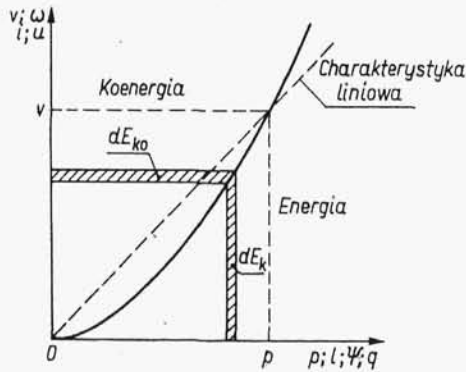
Elementarna energia kinetyczna

$$dE_k = v dp \quad (1.3)$$

a elementarna koenergia kinetyczna

$$dE_{ko} = p dv \quad (1.4)$$

Ilustracją tych wyrażeń jest rys. 1.2. W tablicy 1.3 podano wyrażenia na energię i koenergię kinetyczną:



Rys. 1.2. Ilustracja do pojęcia energii i koenergii kinetycznej.

- w ruchu mechanicznym postępowym E_{kl}, E_{kol} przy użyciu współrzędnych p (pęd), $v = \dot{x}$ (prędkość jako pochodna odległości);
- w ruchu mechanicznym obrotowym E_{kr}, E_{kor} przy użyciu współrzędnych l (kręt), $\omega = \dot{\gamma}$ (prędkość kątowa jako pochodna odległości kątowej);
- w „ruchu elektrycznym” w metodzie oczkowej E_m, E_{om} (energia i koenergia magnetyczna) przy użyciu współrzędnych Ψ (strumień skojarzony), $i = \dot{q}$ (prąd jako pochodna ładunku);
- w „ruchu elektrycznym” w metodzie węzłowej E_e, E_{oe} (energia i koenergia elektryczna) przy użyciu współrzędnych q (ładunek), $u = \dot{\Psi}$ (napięcie jako pochodna strumienia skojarzonego).

Na osiach współrzędnych na rys. 1.2 zaznaczono także współrzędne dla ruchu mechanicznego obrotowego oraz „ruchu elektrycznego” przy metodzie ocz-

Tablica 1.3. Wyrażenia na energię i koenergię kinetyczną

Rodzaj ruchu Funkcja	Ruch postępowy	Ruch obrotowy	Ruch elektryczny	
			Metoda oczkowa	Metoda węzłowa
Energia kinetyczna	$dE_{kt} = v dp$ $E_{kt} = \int_0^p v dp$	$dE_{kr} = \omega dl$ $E_{kr} = \int_0^l \omega dl$	$dE_m = i d\psi$ $E_m = \int_0^\psi i d\psi$	$dE_c = u dq$ $E_c = \int_0^q u dq$
Koenergia kinetyczna	$dE_{koi} = p dv$ $E_{koi} = \int_0^v p dv$	$dE_{kor} = l d\omega$ $E_{kor} = \int_0^\omega l d\omega$	$dE_{om} = \psi di$ $E_{om} = \int_0^i \psi di$	$dE_{oe} = q du$ $E_{oe} = \int_0^u q du$
Związek między koenergią i energią kinetyczną	$E_{kt} = vp - E_{koi}$	$E_{kr} = \omega l - E_{kor}$	$E_m = i\psi - E_{om}$	$E_c = uq - E_{oe}$
Charakterystyka magazynu	$v = \frac{1}{m} p$	$\omega = \frac{1}{J} l$	$i = \frac{1}{L} \psi$	$u = \frac{1}{C} q$
Energia i koenergia kinetyczna przy charakterystyce liniowej	$m = \text{const}$ $E_{kt} = E_{koi} = \frac{1}{2} vp = \frac{1}{2} mv^2$	$J = \text{const}$ $E_{kr} = E_{kor} = \frac{1}{2} \omega l = \frac{1}{2} J\omega^2$	$L = \text{const}$ $E_m = E_{om} = \frac{1}{2} i\psi = \frac{1}{2} Li^2$	$C = \text{const}$ $E_c = E_{oe} = \frac{1}{2} uq = \frac{1}{2} Cu^2$

kowej i węzłowej dzięki czemu rysunek staje się uniwersalną ilustracją pojęcia energii i koenergii kinetycznej różnych rodzajów ruchu.

Energia i koenergia kinetyczna są wyrażone za pomocą drugiej współrzędnej (p, l, Ψ, q) i pochodnej pierwszej współrzędnej ($v = \dot{x}, \omega = \dot{\gamma}, i = \dot{q}, u = \dot{\Psi}$). Korzystając z odpowiedniej charakterystyki magazynu (tabl. 1.1) drugą współrzędną można wyrazić przez pochodną pierwszej współrzędnej, a więc energię i koenergię kinetyczną można wyrazić jako funkcję pochodnej pierwszej współrzędnej.

Analogicznie do energii i koenergii kinetycznej, elementarna energia dyssypacji

$$dE_d = v dp_d \quad (1.5)$$

oraz elementarna koenergia dyssypacji

$$dE_{do} = p_d dv \quad (1.6)$$

przy czym: v – prędkość (dyssypacji) w ruchu postępowym; p_d – pęd dyssypacji. Elementarny pęd dyssypacji może być zdefiniowany zależnością

$$dp_d = F_d dt \quad (1.7)$$

przy czym F_d – siła (dyssypacji) w ruchu postępowym, skąd

$$p_d = \int_0^t F_d dt \quad (1.8)$$

Energia dyssypacji

$$E_d = \int_0^{p_d} v dp_d \quad (1.9)$$

koenergia dyssypacji

$$E_{do} = \int_0^v p_d dv \quad (1.10)$$

Energia dyssypacji może być więc wyrażona także zależnością

$$E_d = \int_0^{p_d} v d \left[\int_0^t F_d dt \right] \quad (1.11)$$

Energia dyssypacji jest jawną funkcją prędkości i czasu.

W wyrażeniach na energię i koenergię dyssypacji za prędkość należy przyjmować:

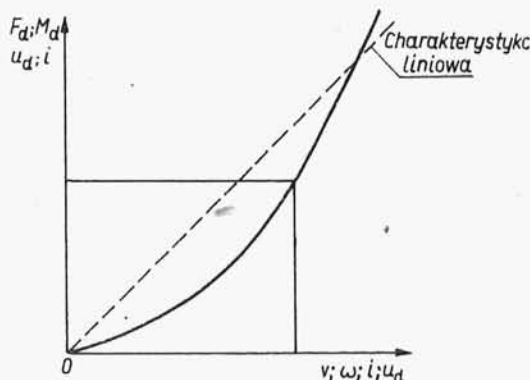
- w ruchu postępowym prędkość liniową v ;
- w ruchu obrotowym prędkość obrotową ω ;
- w „ruchu elektrycznym” przy metodzie oczkowej prąd i ;
- w „ruchu elektrycznym” przy metodzie węzłowej napięcie u .

W wyrażeniach na energię i koenergię pęd dyssypacji należy według wzoru (1.8) wyrazić przez siłę dyssypacji F_d , która oznacza:

- w ruchu postępowym siłę dyssypacji F_d ;

- w ruchu obrotowym moment dyssypacji M_d ;
- w „ruchu elektrycznym” przy metodzie oczkowej napięcie dyssypacji u_d ;
- w „ruchu elektrycznym” przy metodzie węzłowej prąd i .

Na rysunku 1.3 przedstawiono wykres charakterystyki magazynu dyssy-



Rys. 1.3. Charakterystyki magazynów dyssypatywnych

patywnego, wiążącego ze sobą pochodne obydwóch współrzędnych: $v = \dot{x}$, $F_d = \dot{p}_d$ dla ruchu liniowego; $\omega = \dot{\gamma}$, $M_d = \dot{l}_d$ dla ruchu obrotowego; $i = \dot{q}$, $u = \dot{\Psi}$ dla „ruchu elektrycznego” przy metodzie oczkowej; $u = \dot{\Psi}$, $i = \dot{q}$ dla „ruchu elektrycznego” przy metodzie węzłowej.

Moc dyssypacji

$$P_d = F_d v \quad (1.12)$$

W tablicy 1.4 podano wyrażenia na energię i koenergię dyssypacji.

Z wyrażen zestawionych w tabl. 1.1 ÷ 1.4 widać formalne podobieństwo charakterystyk magazynów energetycznych (inercyjnych, sprężystych i dyssypatywnych) dla różnych rodzajów ruchu (postępowego, obrotowego i elektrycznego) oraz formalne podobieństwo wyrażen na energię i koenergię potencjalną, kinetyczną i dyssypacji w ruchu postępowym, obrotowym i elektrycznym. Dlatego wolno i warto wprowadzić współrzędne uogólnione i ich pochodne:

- odległość ξ ;
- prędkość $\dot{\xi}$;
- pęd p ;
- siłę \dot{p} .

Wtedy odpowiadające sobie charakterystyki magazynów w różnych ruchach mają jednakowe postacie.

Tablica 1.5 zawiera zestawienie współrzędnych uogólnionych i odpowiadających im w różnych rodzajach ruchu współrzędnych szczegółowych. Zgodnie z tą tablicą odległość traktowana jest jako pierwsza współrzędna, a pęd jako druga współrzędna.

Tablica 1.4. Wyrażenia na energię i koenergię dyssypacji

Rodzaj ruchu Funkcja	Ruch postępowy	Ruch obrotowy	Ruch elektryczny	
			Metoda oczkowa	Metoda węzłowa
Energia dyssypacji	$dE_{dt} = v dp_d$ $E_{dt} = \int_0^t v d \left[\int_0^t F_d dt \right]$	$dE_{dr} = \omega dl_d$ $E_{dr} = \int_0^t \omega d \left[\int_0^t M_d dt \right]$	$dE_{de} = i d\psi$ $E_{de} = \int_0^t i d \left[\int_0^t u_d dt \right]$	$dE_{de} = u dq$ $E_{de} = \int_0^q u d \left[\int_0^t i dt \right]$
Koenergia dyssypacji	$dE_{dot} = p_d dv$ $E_{dot} = \int_0^v p_d d \left[\int_0^t F_d dt \right] dv$	$dE_{dor} = l_d d\omega$ $E_{dor} = \int_0^\omega l_d d \left[\int_0^t M_d dt \right] d\omega$	$dE_{doe} = \psi di$ $E_{doe} = \int_0^i \psi d \left[\int_0^t u_d dt \right] di$	$dE_{doe} = q du$ $E_{doe} = \int_0^u q d \left[\int_0^t i dt \right] du$
Związek pomiędzy koenergią i energią dyssypacji	$E_{dt} = v \int_0^t F_d dt - E_{dot}$	$E_{dr} = \omega \int_0^t M_d dt - E_{dor}$	$E_{de} = i \int_0^t u_d dt - E_{doe}$	$E_{de} = u \int_0^t i dt - E_{doe}$
Charakterystyka magazynu	$v = \frac{1}{D_t} F_d$	$\omega = \frac{1}{D_r} M_d$	$i = \frac{1}{R} u_d$	$u = \frac{1}{G} i$
Energia elementarna dyssypacji przy charakterystyce liniowej	$D_t = \text{const}$ $dE_{dt} = v F_d dt = D_t v^2 dt$	$D_r = \text{const}$ $dE_{dr} = \omega M_d dt = D_r \omega^2 dt$	$R = \text{const}$ $dE_{de} = i u_d dt = R i^2 dt$	$G = \text{const}$ $dE_{de} = u_d i dt = G u_d^2 dt$

Tablica 1.5. Zestawienie współrzędnych

Współrzędna uogólniona		Współrzędne szczegółowe							
Nazwa	Oznaczenie	Ruch postępowy		Ruch obrotowy		Ruch elektryczny			Oznaczenie
		Nazwa	Oznaczenie	Nazwa	Oznaczenie	Metoda oczkowa	Nazwa	Metoda węzłowa	
Odległość	ξ	Odległość	x	Kąt	γ	Ładunek	q	Strumień skojarzony	ψ
Prędkość	$\dot{\xi}$	Prędkość	$\dot{x} = v$	Prędkość kątowa	$\dot{\gamma} = \omega$	Prąd	$\dot{q} = i$	Napięcie	$\dot{\psi} = u$
Pęd	p	Pęd	p	Kręt	$l = pr$	Strumień skojarzony	ψ	Ładunek	q
Sila	$\dot{p} = F$	Sila	$\dot{p} = F$	Moment obrotowy	$\dot{l} = M$	Napięcie	$\dot{\psi} = u$	Prąd	$\dot{q} = i$

Współrzędna pęd i jej pochodna siła są często wyrażane przy użyciu charakterystyki magazynu jako funkcja pochodnej pierwszej współrzędnej albo funkcja pierwszej współrzędnej i nie są oznaczane oddzielnymi symbolami.

Energia potencjalna (tabl. 1.2) może być wyrażona tylko za pomocą pierwszej współrzędnej, więc przy użyciu współrzędnej uogólnionej wyrażenie na energię potencjalną przedstawia się w postaci

$$E_p = E_p(\xi) \quad (1.13)$$

Podobnie wyrażenie na koenergię potencjalną przedstawia się w postaci

$$E_{po} = E_{po}(\xi) \quad (1.14)$$

Energia kinetyczna (tabl. 1.3) może być wyrażona przez pochodną pierwszej współrzędnej, więc w ogólnym przypadku przy użyciu współrzędnej uogólnionej wyrażenie na energię kinetyczną ma postać

$$E_k = E_k(\xi, \dot{\xi}) \quad (1.15)$$

Podobnie wyrażenie na koenergię kinetyczną ma postać

$$E_{ko} = E_{ko}(\xi, \dot{\xi}) \quad (1.16)$$

Energia dyssypacji (tabl. 1.4) jest jawną funkcją czasu, więc w ogólnym przypadku przy użyciu współrzędnej uogólnionej wyrażenie na energię dyssypacji ma postać

$$E_d = E_d(\xi, \dot{\xi}, t) \quad (1.17)$$

Podobnie wyrażenie na koenergię dyssypacji ma postać

$$E_{do} = E_{do}(\xi, \dot{\xi}, t) \quad (1.18)$$

Przy użyciu współrzędnych uogólnionych otrzymuje się wyrażenie na siłę

$$F = \frac{\partial E_p}{\partial \xi} \quad (1.19)$$

Przy omawianiu zjawiska dyssypacji energii dogodnie jest posługiwać się pojęciem funkcji dyssypacji Rayleigha o postaci

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} R \dot{\xi}^2 \quad (1.20)$$

przy czym współczynnik R występujący w ruchu elektrycznym (rezystancja) może być w ruchu postępowym zastąpiony współczynnikiem D_t , a w ruchu obrotowym współczynnikiem D_r . Ta funkcja ma wymiar mocy. Moc wydzielana w elemencie dyssypatywnym

$$P_d = 2\mathcal{F} \quad (1.21)$$

a siła dyssypacji

$$F_d = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\xi}} = R \dot{\xi} \quad (1.22)$$

co na przykład w „ruchu elektrycznym” odpowiada wyrażeniu

$$F_d = u_d = Ri$$

skąd wynika uzasadnienie przyjęcia współczynnika 1/2 we wzorze (1.20).

Przy użyciu współrzędnej uogólnionej, analogicznie do wzoru (1.12), siłę dyssypacji można wyrazić następująco

$$F_d = \frac{P_d}{\dot{\xi}} = \frac{\partial E_d(\xi, \dot{\xi}, t)}{\partial t} \frac{1}{\dot{\xi}} \quad (1.23)$$

Przy użyciu współrzędnej uogólnionej można także napisać wyrażenia na:

– elementarny pęd dyssypacji równy elementarnemu popędowi siły dyssypacji

$$dp_d = F_d(\dot{\xi}) dt \quad (1.24)$$

– pęd dyssypacji

$$p_d(\xi, \dot{\xi}, t) = \int_0^t F_d(\dot{\xi}) dt \quad (1.25)$$

– elementarną energię dyssypacji

$$dE_d(\xi, \dot{\xi}, t) = \dot{\xi} dp_d \quad (1.26)$$

– elementarną koenergię dyssypacji

$$dE_{do}(\xi, \dot{\xi}, t) = p_d d\dot{\xi} \quad (1.27)$$

– energię dyssypacji

$$E_d = \int_0^{p_d} \dot{\xi} dp_d = \dot{\xi} p_d - \int_0^{\dot{\xi}} p_d d\dot{\xi} \quad (1.28)$$

– koenergię dyssypacji

$$E_{do} = \int_0^{\dot{\xi}} p_d d\dot{\xi} = \dot{\xi} p_d - \int_0^{p_d} \dot{\xi} dp_d \quad (1.29)$$

Na podstawie wzorów (1.29) i (1.25)

$$E_{do} = \int_0^{\dot{\xi}} \left[\int_0^t F_d(\dot{\xi}) dt \right] d\dot{\xi} \quad (1.30)$$

czyli

$$E_{do} = \int_0^t \left[\int_0^{\dot{\xi}} F_d(\dot{\xi}) d\dot{\xi} \right] dt \quad (1.31)$$

Na podstawie wzorów (1.28) i (1.25) energia dyssypacji

$$E_d = \int_0^{\dot{\xi}} \dot{\xi}_d \left[\int_0^t F_d(\dot{\xi}) dt \right] \quad (1.32)$$

a na podstawie wzorów (1.32), (1.25) i (1.30)

$$E_d(\xi, \dot{\xi}, t) = \dot{\xi} \int_0^t F_d(\xi) dt - E_{d0}(\xi, \dot{\xi}, t) \quad (1.33)$$

Energia dyssypacji jest jawną funkcją czasu.

Energia doprowadzona do magazynu dyssypatywnego zamienia się w nim na ciepło. W rzeczywistym elemencie dyssypatywnym nie może następować, jakkolwiek formalnie jest możliwa, zamiana energii cieplnej na inną postać energii odprowadzanej od tego elementu.

Układ magazynów energii może być układem odosobnionym albo może współpracować z magazynami zewnętrznymi, przy czym może on pobierać energię od magazynów zewnętrznych albo oddawać energię magazynom zewnętrznym. W chwili początkowej magazyny energii układu mają pewne początkowe poziomy energetyczne. Wyrażenia na energię kinetyczną $E_k(\xi, \dot{\xi})$ i potencjalną $E_p(\xi)$ określają całkowitą energię, uwzględniającą energię magazynów układu i energię wymienianą między magazynami zewnętrznymi i układem. Energia E_z jest energią wymienianą między magazynami zewnętrznymi i rozpatrywanym układem. Energia zewnętrzna E_z może mieć charakter potencjalny, tzn. może zależeć tylko od współrzędnej położenia ξ , a nie zależeć w sposób jawny od jej pochodnej, czyli może wyrażać się funkcją $E_z = f(\xi)$. Taki przypadek nazywa się *zasilaniem sztywnym*. Energia zewnętrzna może także mieć charakter kinetyczny, tzn. może zależeć w sposób jawny od współrzędnej położenia i jej pochodnej, czyli może wyrażać się funkcją $E_z = f(\xi, \dot{\xi})$.

Moc przepływającej energii wyraża się wzorem

$$P = \frac{dE}{dt} \quad (1.34)$$

W przypadku, kiedy energia zewnętrzna ma charakter potencjalny, czyli dla $E_z = f(\xi)$, tzn. kiedy energia zewnętrzna nie zależy w sposób jawny od prędkości $\dot{\xi}$ i od czasu t , moc

$$P = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \dot{\xi} \quad (1.35)$$

Analogicznie, jak w przypadku energii potencjalnej w ruchu mechanicznym postępowym zgodnie ze wzorem (1.1) wyrażenie $\frac{\partial E_z}{\partial \xi}$ oznacza siłę zewnętrzną, a $\dot{\xi}$ — prędkość. W przypadku, kiedy energia zewnętrzna ma charakter kinetyczny, czyli dla $E_z = f(\xi, \dot{\xi})$, tzn. kiedy energia zewnętrzna zależy od położenia i prędkości, a nie zależy w sposób jawny od czasu, moc

$$P = \frac{\partial E_z}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} \ddot{\xi} \quad (1.36)$$

czyli

$$P = \left(\frac{\partial E_z}{\partial \xi} + \frac{1}{\dot{\xi}} \frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} \ddot{\xi} \right) \dot{\xi} \quad (1.37)$$

Analogicznie, jak w przypadku energii potencjalnej, $\dot{\xi}$ oznacza prędkość, a $\left(\frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} + \frac{1}{\dot{\xi}} \frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} \ddot{\xi}\right)$ – siłę całkowitą, przy czym $\frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}}$ oznacza siłę zewnętrzną. Z wyrażenia na energię kinetyczną $E = \frac{1}{2}mv^2$ wynika, że $\frac{\partial E}{\partial v} = mv = p$, czyli

$$\frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} - \text{oznacza pęd}.$$

Wyrażenie $\frac{1}{v} \frac{\partial E}{\partial v} = m$, czyli wyrażenie

$$\frac{1}{\dot{\xi}} \frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} - \text{oznacza masę}.$$

Wyrażenie $\frac{1}{v} \frac{\partial E}{\partial v} a = ma = F$ oznacza siłę inercji, czyli odpowiednio

$$\frac{1}{\dot{\xi}} \frac{\partial E_z}{\partial \dot{\xi}} \ddot{\xi} - \text{oznacza siłę inercji}.$$

1.4. ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

1.4.1. Energia całkowita

Całkowita energia układu łącznie z energią doprowadzoną z zewnątrz (albo odprowadzoną na zewnątrz) i energią źródeł zewnętrznych jest określona zależnością

$$E(\xi, \dot{\xi}, t) = E_p(\xi) + E_k(\xi, \dot{\xi}) + E_d(\xi, \dot{\xi}, t) \quad (1.38)$$

w której:

– całkowita energia potencjalna

$$E_p(\xi) = \sum_i E_{pu}(\xi_i) + \sum_i E_{pz}(\xi_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.39)$$

przy czym: $\sum_i E_{pu}(\xi_i)$ – energia potencjalna wszystkich magazynów konserwatywnych układu; $E_{pu}(\xi_i)$ – energia potencjalna i -tego magazynu konserwatywnego układu; $\sum_i E_{pz}(\xi_i)$ – energia potencjalna wszystkich magazynów konserwatywnych zewnętrznych zasilających układ; $E_{pz}(\xi_i)$ – energia potencjalna i -tego magazynu konserwatywnego zewnętrznego;

– całkowita energia kinetyczna

$$E_k(\xi, \dot{\xi}) = \sum_i E_{ku}(\xi_i, \dot{\xi}_i) + \sum_i E_{kz}(\xi_i, \dot{\xi}_i) \quad (1.40)$$

przy czym: $\sum_i E_{ku}(\xi_i, \dot{\xi}_i)$ – energia kinetyczna wszystkich magazynów konserwatywnych układu; $E_{ku}(\xi_i, \dot{\xi}_i)$ – energia kinetyczna i -tego magazynu konserwatywnego układu; $\sum_i E_{kz}(\xi_i, \dot{\xi}_i)$ – energia kinetyczna wszystkich magazynów