

## Ćwiczenie 6

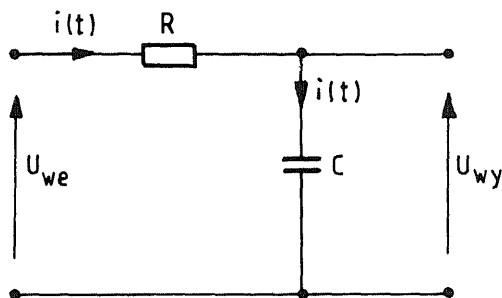
UKŁADY O STAŁYCH ROZŁOŻONYCH.  
LINIE DŁUGIE

## WPROWADZENIE

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z transmisją sygnałów elektrycznych w liniach długich i przeprowadzenie pomiarów: długości fali, współczynnika fali stojącej, współczynnika odbicia oraz impedancji obciążenia linii.

W dotychczas spotykanych układach elektronicznych (filtry, układy RLC, wzmacniacze operacyjne, mostki itp.) przyjęto założenie, że zmiany napięć i prądów następują w całym obwodzie elektrycznym równocześnie. I tak np. w układzie całkującym RC (rys.6.1) założono, że w oporniku R i w kondensatorze C płyną w każdej chwili takie same prądy elektryczne

$$i_R(t) = i_C(t) = i(t).$$



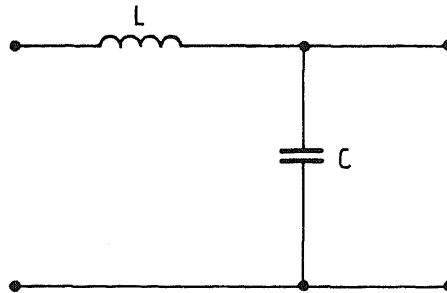
Rys. 6.1

Założenie to jest słuszne tylko wtedy, gdy rozmiary przestrzenne obwodu RC są bardzo małe w porównaniu z odległością, jaką przebywa fala elektromagnetyczna podczas mierzalnej zmiany napięcia wejściowego  $\Delta U_{we}$ . Zatem rozważania na temat obwodów omawianych dotychczas odnosiły się jedynie do układów, których elementy skupione są w bardzo małym obszarze przestrzeni, albo do których dochodzą sygnały bardzo wolnozmiennie w czasie.

Obecnie omówione zostaną elementarne pojęcia i metody stosowane do opisu najczęściej spotykanych układów mających niepomijalne wymiary liniowe - linii długich.

Liniami długimi nazywane są takie układy przewodników służące do przekazywania sygnałów elektrycznych, których wymiary są porównywalne z długością fali odpowiadającą częstotliwości podstawowej transmitowanego sygnału. I tak odcinek przewodu współosiowego o długości 1 m. w którym fala elektromagnetyczna

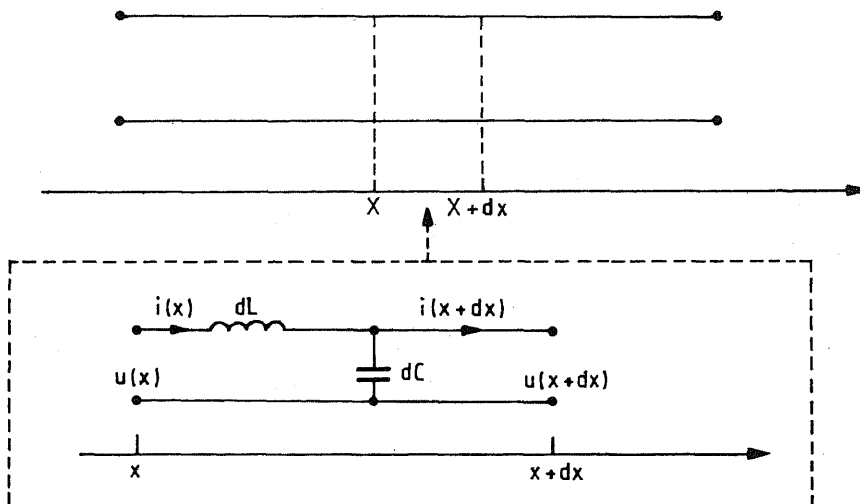
porusza się z prędkością  $V = 2 \cdot 10^8$  m/s (bo wypełniony jest dielektrykiem), zachowuje się podczas transmisji sygnału o częstotliwości  $f = 1$  kHz ( $\lambda_1 = (2 \cdot 10^8 / 10^3) \text{ m} = 2 \cdot 10^5$  m) jak układ o stałych skupionych:  $L$  i  $C$  i można go scharakteryzować pojemnością  $C$  i indukcyjnością  $L$  (rys.6.2).



Rys. 6.2

Ten sam odcinek przewodu dla sygnału o częstotliwości  $f = 300$  MHz ( $\lambda_2 = (2 \cdot 10^8 / 3 \cdot 10^8) \text{ m} = 66,7$  cm) zachowuje się jak typowy układ o stałych rozłożonych. Poniżej przedstawiony zostanie opis takiego układu.

Układ, który jest tutaj rozważany, można przedstawić (rys.6.3) jako połączone ze sobą bardzo krótkie (o długości  $dx$ ) sekcje przewodu, z których każdą można scharakteryzować za pomocą przypisanych jej elementów: pojemności  $dC$  i indukcyjności  $dL$  (analogicznie jak dla całej linii w zakresie sygnałów o małych częstotliwościach).



Rys. 6.3

Właściwości elektryczne elementu linii opisują równania

$$-u(x) = L_1 dx \frac{di(x)}{dt} + u(x + dx), \quad (6.1a)$$

$$i(x) = C_1 dx \frac{du(x+dx)}{dt} + i(x+dx), \quad (6.1b)$$

gdzie  $L_1$  i  $C_1$  są odpowiednio indukcyjnością i pojemnością jednostkową linii długiej.

(Uwaga:  $[L_1] = 1 \frac{H}{m}$ ,  $[C_1] = 1 \frac{F}{m}$ ).

Jeśli potraktować  $u$  i  $i$  jako funkcje dwóch zmiennych:  $t$  oraz  $x$ , to równania (6.1) po przejściu granicznym  $dx \rightarrow 0$  dają

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -L_1 \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}, \quad (6.2a)$$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = -C_1 \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \quad (6.2a)$$

Są to równania *bezstratnej linii długiej*. Jak widać, zarówno napięcie  $u(x,t)$ , jak i natężenie prądu w dowolnym punkcie linii muszą spełniać równanie falowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (6.3)$$

Stąd napięcie i prąd w linii są falami, które rozchodzą się z prędkością

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (6.4)$$

Rozważone zostaną teraz właściwości linii długiej dla przebiegów harmoniczných. Równanie harmoniczne fali napięcia stanowiącej rozwiązanie równości (6.3) ma postać

$$U(x,t) = U_+ e^{i(\omega t - \beta x)} + U_- e^{i(\omega t + \beta x)}, \quad (6.5)$$

gdzie:  $U_+$ ,  $U_-$  są to liczby zespolone charakteryzujące odpowiednio: falę poruszającą się w kierunku osi  $x$  (padającą) i w kierunku ujemnym (odbity). Obserwowane w linii napięcie wynosi

$$u(x,t) = \text{Re } U(x,t).$$

Postać rozwiązania funkcji  $I(x,t)$  można uzyskać z równania (6.2). Podstawiając rozwiązanie (6.5) do równania 6.2 i żądając, aby  $I(x,t)$  miało postać kombinacji liniowej fali padającej i odbitej

$$I(x,t) = I_+ e^{i(\omega t - \beta x)} + I_- e^{i(\omega t + \beta x)}, \quad (6.6)$$

otrzymuje się

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ U_+ e^{i(\omega t - \beta x)} + U_- e^{i(\omega t + \beta x)} \right] = L_1 \frac{\partial}{\partial t} \left[ I_+ e^{i(\omega t - \beta x)} + I_- e^{i(\omega t + \beta x)} \right].$$

Stąd

$$\frac{\beta}{\omega L_1} U_+ e^{i(\omega t - \beta x)} - \frac{\beta}{\omega L_1} U_- e^{i(\omega t + \beta x)} = I_+ e^{i(\omega t - \beta x)} + I_- e^{i(\omega t + \beta x)}.$$

Aby równość ta była spełniona dla każdego  $x$  i w każdej chwili  $t$ , muszą być spełnione warunki

$$I_+ = U_+ \frac{\beta}{\omega L_1}, \quad (6.7a)$$

$$I_- = U_- \frac{\beta}{\omega L_1}. \quad (6.7b)$$

Ponieważ w rozwiązaniu (6.5) oznaczono współczynnik propagacji fali

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{L_1 C_1}, \quad (6.8)$$

więc współczynnik występujący w równaniu (6.7) ma postać

$$\frac{\beta}{\omega L_1} = \left( \frac{L_1}{C_1} \right)^{-0,5} = \frac{1}{Z_0}. \quad (6.9)$$

Wielkość  $Z_0$  nosi nazwę impedancji charakterystycznej linii długiej. W omawianej tu linii bezstratnej jest to wielkość rzeczywista o charakterze rezystancji. Zatem prąd i napięcie w linii długiej są opisane równaniami

$$U(x,t) = U(x) e^{i\omega t}, \quad (6.10a)$$

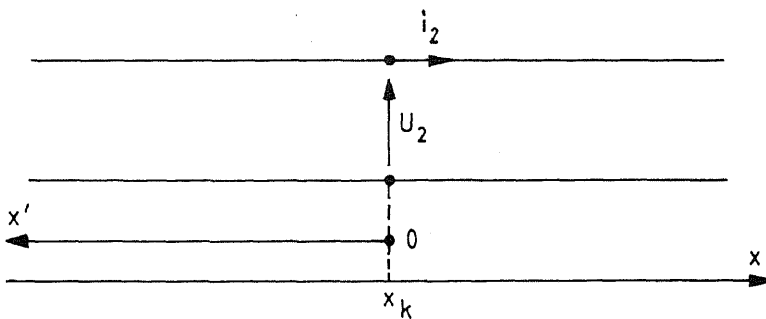
$$U(x) = U_+ e^{-i\beta x} + U_- e^{i\beta x} \quad (6.10b)$$

oraz

$$I(x,t) = I(x) e^{i\omega t}, \quad (6.11a)$$

$$I(x) = \frac{U_+}{Z_0} e^{-i\beta x} - \frac{U_-}{Z_0} e^{i\beta x}. \quad (6.11b)$$

W dalszym ciągu opisu rozważane będą jedynie funkcje  $U(x)$  i  $I(x)$ . Niech linia długa ma wyróżnione miejsce (np. koniec linii) (rys. 6.4), w którym istnieje napięcie  $U$



Rys. 6.4

i płynie prąd o natężeniu  $I$ . Napięcie  $U(x)$  i natężenie  $I(x)$  można wyrazić za pomocą tych samych wartości. W tym celu wygodnie jest wprowadzić nowy układ współrzędnych, w których określa się odległość  $x'$  od końca linii

$$x' = x_k - x. \quad (6.12)$$

Po podstawieniu równania (6.12) do (6.10) i (6.11) otrzymuje się

$$U(x) = U'_+ e^{i\beta x'} + U'_- e^{-i\beta x'}, \quad (6.13a)$$

$$I(x) = \frac{U'_+}{Z_0} e^{i\beta x'} - \frac{U'_-}{Z_0} e^{-i\beta x'}, \quad (6.13b)$$

W tym układzie współrzędnych falę padającą opisuje wyrażenie  $U'_+ e^{i\beta x'}$ , a falę odbitą  $U'_- e^{-i\beta x'}$ .

W dalszych rozważaniach obowiązywać będzie wyłącznie nowo wprowadzony układ odniesienia. W związku z tym pominięto znaki „prim”.

Związek napięć i prądów na końcu linii ( $x = 0$ ) z parametrami  $U_+$  i  $U_-$  w równaniu 6.13) jest następujący:

$$U_2 = U_+ + U_-, \quad (6.14a)$$

$$Z_0 I_2 = U_+ - U_-, \quad (6.14b)$$

stąd

$$U_+ = \frac{U_2 + Z_0 I_2}{2},$$

$$U_- = \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2}.$$

Zatem

$$U(x) = \frac{U_2 + Z_0 I_2}{2} e^{i\beta x} + \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2} e^{-i\beta x},$$

$$Z_0 I(x) = \frac{U_2 + Z_0 I_2}{2} e^{i\beta x} - \frac{U_2 - Z_0 I_2}{2} e^{-i\beta x}.$$

Stąd

$$U(x) = U_2 \cos \beta x + i Z_0 I_2 \sin \beta x, \quad (6.15a)$$

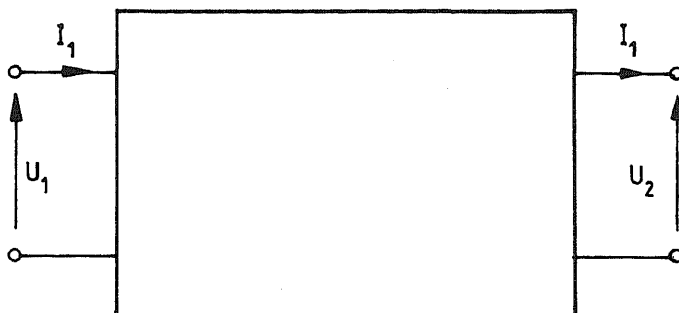
$$Z_0 I(x) = i U_2 \sin \beta x + Z_0 I_2 \cos \beta x. \quad (6.15b)$$

Linie długą o długości  $x$  można więc przedstawić w postaci czwórnika, którego elementy macierzy łańcuchowej wynoszą

$$[B] = \begin{bmatrix} \cos \beta x & i Z_0 \sin \beta x \\ i \frac{1}{Z_0} \sin \beta x & \cos \beta x \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

przy czym (patrz rys.6.5)

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$



Rys. 6.5

Na końcu linii długiej zamkniętej impedancją  $Z$  spełniony jest warunek

$$U_2 = Z I_2. \quad (6.17)$$

Obliczona zostanie teraz impedancja wejściowa takiej linii, rozkład napięcia  $U(x)$  wzdłuż linii oraz wartości fali odbitej i fali padającej. Impedancja wejściowa linii wynosi

$$Z_{we} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \cos \beta x + i Z_0 \frac{U_2}{Z} \sin \beta x}{i \frac{U_2}{Z_0} \sin \beta x + \frac{U_2}{Z} \cos \beta x}.$$

Stąd

$$Z_{we} = Z_0 \frac{Z + i Z_0 \operatorname{tg} \beta x}{Z_0 + i Z \operatorname{tg} \beta x}. \quad (6.18)$$

Napięcie wzdłuż linii (licząc od jej końca) zmienia się zgodnie z równaniem

$$U(x) = U_2 \left( \cos \beta x + i \frac{Z_0}{Z} \sin \beta x \right). \quad (6.19)$$

Fala padająca w odległości  $x$  od końca linii wynosi

$$U_p(x) = U_+ e^{i \beta x} = \frac{U_2 \left( 1 + \frac{Z_0}{Z} \right)}{2} e^{i \beta x}. \quad (6.19)$$

Fala odbita jest opisana równaniem

$$U_0(x) = U_- e^{-i \beta x} = \frac{U_2 \left( 1 - \frac{Z_0}{Z} \right)}{2} e^{-i \beta x}. \quad (6.20)$$

Do opisu zjawisk zachodzących w linii długiej wygodnie jest posługiwać się pojęciem współczynnika odbicia.

Współczynnikiem odbicia  $\Gamma(x)$  nazywa się stosunek

$$\Gamma(x) = \frac{U_0(x)}{U_p(x)} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} e^{-i2\beta x}. \quad (6.21)$$

Współczynnik odbicia od końca linii wynosi

$$\Gamma(0) = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} |\Gamma| e^{-i\varphi}. \quad (6.22)$$

Z równania (6.21) wynika, że dla linii zwartej na końcu ( $Z = 0$ ) współczynnik odbicia wynosi

$$\Gamma_{zw}(0) = -1,$$

a dla linii rozwrtej  $|Z| \rightarrow \infty$

$$\Gamma_{roz}(0) = +1.$$

Dla linii obciążonej elementem o oporności (impedancji) charakterystycznej  $Z = Z_0$  współczynnik odbicia jest równy zero

$$\Gamma(0) = 0.$$

W tym przypadku w linii nie występuje fala odbita ( $U_- = 0$ ), a impedancja wejściowa (6.18) dowolnie długiego odcinka linii obciążonej impedancją  $Z_0$  (nazywa się to stanem dopasowania w linii) wynosi

$$Z_{we} = Z_0.$$

W dalszej części opisu rozpatrzony będzie rozkład napięcia wzdłuż linii długiej. Podstawiając równanie (6.21) do równania (6.13) otrzymuje się

$$U(x) = U_+ [e^{i\beta x} + |\Gamma| e^{-(\beta x + \varphi)}]. \quad (6.23)$$

W wyniku obliczenia kwadratu modułu, a następnie modułu napięcia  $U(x)$  uzyskuje się

$$|U(x)|^2 = U(x)U^*(x) = |U_+|^2 (e^{i\beta x} + |\Gamma| e^{-i(\beta x + \varphi)})(e^{-i\beta x} + |\Gamma| e^{i(\beta x + \varphi)}) \quad (6.24)$$

Stąd

$$|U| = U_+ (1 + 2|\Gamma|\cos(2\beta x + \varphi) + |\Gamma|^2)^{1/2}. \quad (6.25)$$

Jak widać z równania (6.25), napięcie wzdłuż linii zmienia się od wartości

$$U_{\min} = |U_+|(1 - |\Gamma|) \quad (6.26)$$

do wartości

$$U_{\max} = |U_+|(1 + |\Gamma|). \quad (6.27)$$

Stosunek tych wartości nazywa się *współczynnikiem fali stojącej* i oznaczany jest symbolem

$$\rho = \frac{|U_{\max}|}{|U_{\min}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}. \quad (6.28)$$

W przypadku obciążenia linii elementem o oporności rzeczywistej  $R$  równanie (6.22) przybiera postać

$$\Gamma_0 = \frac{R - Z_0}{R + Z_0} = \begin{cases} |\Gamma| & \text{gdy } R \geq R_0, \\ -|\Gamma| & \text{gdy } R < R_0. \end{cases} \quad (6.29)$$

Dla linii bezstratnej  $Z$  jest rzeczywiste i współczynnik fali stojącej w linii wynosi

$$\rho = \begin{cases} \frac{R}{Z_0} & \text{dla } R \geq Z_0, \\ \frac{Z_0}{R} & \text{dla } R < Z_0. \end{cases} \quad (6.30)$$

Pomiar jego wartości pozwala więc wnioskować o impedancji obciążenia, a szczególne pomiary rozkładu napięcia (równanie (6.25)) umożliwiają obliczenie zarówno modułu współczynnika odbicia, jak i jego kąta fazowego  $\phi$ , a stąd i dokładnej wartości impedancji obciążenia.

W technice z reguły dąży się do uzyskania w linii przesyłowej stanu dopasowania, to znaczy do wyeliminowania fali odbitej. W tych warunkach impedancja wejściowa linii równa jest jej impedancji charakterystycznej i nie zależy od długości linii, a amplituda napięcia w każdym punkcie linii jest taka sama ( $\rho = 1$ ) i wynosi  $|U| = |U_+|$ . Na rys.6.6 przedstawiono rozkład napięcia wzdłuż linii (równanie (6.25)) dla różnych wartości współczynnika fali stojącej.

## WYKONANIE ĆWICZENIA

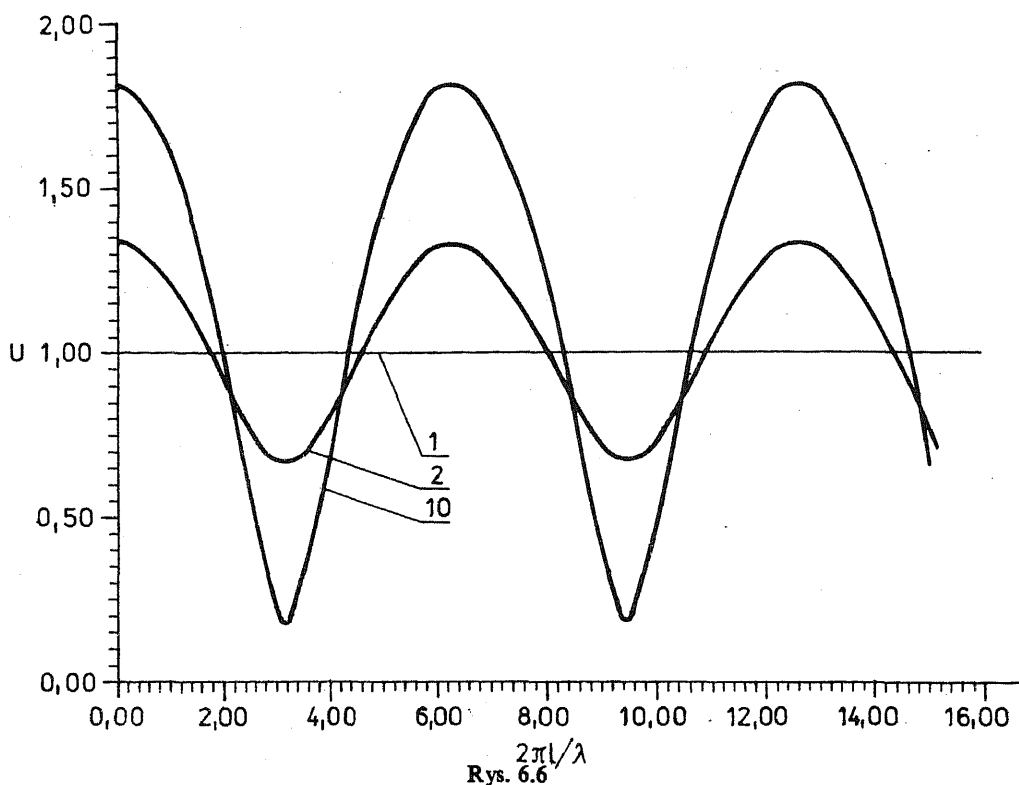
Do dyspozycji wykonującego ćwiczenie są następujące przyrządy pomiarowe:

- generator sygnałów harmoniczných,
- linia pomiarowa z przesuwaną sondą,
- miernik napięcia typu V 640,
- oscyloskop,
- element obciążający linię pomiarową (obciążenie linii).

Należy wykonać następujące pomiary:

1. Linię pomiarową zewrzeć na końcu. Przesuwając sondę wzdłuż linii zmierzyć długość fali. Odczytać wartość częstotliwości generatora. Obliczyć prędkość fazową fali w linii.
2. Linię obciążyć na końcu elementem danym przez prowadzącego. Dokonać pomiaru rozkładu napięcia wzdłuż linii. Obliczyć współczynnik fali stojącej w linii, obliczyć stosunek impedancji obciążenia do impedancji charakterystycznej linii.





Rys. 6.6

3. Między obciążenie a linię pomiarową włączyć urządzenie dopasowujące. Doprowadzić do jak najmniejszej wartości współczynnika fali stojącej w linii. Wyjaśnić zasadę działania urządzenia.

Punkty 1, 2, 3 wykonać na jednym ze stanowisk wyposażonych w linię współosiową. Punkty 1 i 2 wykonać dodatkowo na stanowisku z linią falowodową.

W sprawozdaniu należy przedstawić:

- wyniki pomiaru długości fali wraz z dyskusją dokładności pomiaru,
- wyniki obliczeń prędkości fali wraz z interpretacją,
- wykresy rozkładu  $U(x)$  dla linii zwartej na końcu i dla linii obciążonej,
- obliczenia i wyniki obliczeń oraz oszacowanie błędów pomiaru  $\rho$  i  $Z/Z_0$ .

### ZADANIA DO OPRACOWANIA

1. Jakie są przyczyny występowania strat w linii transmisyjnej i jak wpływają one na rozkład prądów i napięć w linii?
2. Jaka jest zasada działania falowodu prostokątnego?
3. W jaki sposób oblicza się impedancję charakterystyczną linii współosiowej bezstratnej i czemu jest ona równa?

4. Opracować metodykę wyznaczania wartości  $Z/Z_0$  na podstawie pomiarów rozkładu  $U(x)$ . Jakie wielkości trzeba zmierzyć, aby wyznaczyć  $Z/Z_0$ ?
5. Jak zależy impedancja odcinka linii zwartej na końcu od długości linii?

#### LITERATURA

- [1] W. M a s i a k: Teoria pola i mikrofae. WPW, Warszawa 1982.
- [2] T. M o r a w s k i, W. G w a r e k: Teoria pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 1978.