Tekst poniżej

Ćwiczenie 3

POMIARY SYGNAŁÓW W DZIEDZINIE CZĘSTOTLIWOŚCI

WPROWADZENIE

Wszystkie sygnały elektryczne są funkcjami czasu. Przedstawianie sygnałów jako funkcji czasu f(t) nie jest jednak jedynym możliwym sposobem ich opisu. Istnieje wiele innych metod. Jedną z nich, szczególnie użyteczną w odniesieniu do sygnałów okresowych występujących w liniowych sieciach elektrycznych, jest opis sygnału w dziedzinie częstotliwości. Polega on na podaniu wszystkich cech (amplitud, częstotliwości i faz) przebiegów harmonicznych, na które można rozłożyć dany sygnał f(t). Ten zespół danych nazywa się widmem częstotliwości sygnału f(t).

Celem ćwiczenia jest przypomnienie elementarnych wiadomości o związkach okresowej funkcji czasu z jej widmem częstotliwościowym i doświadczalna synteza określonej funkcji czasu z jej widma częstotliwości.

Okresową, ciągłą funkcję czasu można przedstawić w postaci sumy funkcji harmonicznych. Sumą tą jest szereg Fouriera. Związek między funkcją f(t) a parametrami szeregu Fouriera jest następujący:
funkcję ciągłą okresową o okresie T, tzn. taką, że

$$f(t) = f(t + nT), \tag{3.1}$$

gdzie n = 1, 2, 3,..., można przedstawić w postaci szeregu

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin\frac{2\pi kt}{T}\right], \tag{3.2}$$

gdzie

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2\pi kt}{T}\,dt, \tag{3.3}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2\pi kt}{T}\,dt, \tag{3.4}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt. \tag{3.5}$$

Jak widać, częstości kołowe kolejnych składników szeregu są wielokrotnością częstości podstawowej ω_1 i wynoszą

$$\omega_k = k\omega_1 = k\frac{2\pi}{T}. \tag{3.6}$$

Szereg (3.2) można również przedstawić w postaci

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\left[\frac{2\pi kt}{T} - \varphi_k\right], \tag{3.7}$$

gdzie

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \tag{3.8}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_k = \frac{b_k}{a_k}. \tag{3.9}$$

WYKONANIE ĆWICZENIA

Wykonujący ćwiczenia otrzymują od prowadzącego instrukcję wraz z zadaniem indywidualnym w postaci założonego kształtu funkcji f(t), którą należy rozłożyć na szereg Fouriera. Przykłady takich funkcji przedstawiono w tablicy 3.1.

Tablica 3.1

n	$f_n(x)$	n	$f_n(x)$
1	$\sin(\pi x)$	11	0 dla $x \in (0, 1/6)$ $\sin[3\pi(x-1/6)]$ dla $x \in [1/6, 5/6]$ 0 dla $x \in (5/6, 1]$
2	$(2x-1)\sin^4(\pi x)$	12	$2x$ dla $x \in (0, 1/2)$ 0 dla $x = 1/2$ $2(x-1)$ dla $x \in (1/2, 1]$
3	$16(2x-1)\,e^{-4(2x-1)^2}$	13	0 dla $x \in (0, 1/6)$ 1 dla $x \in [1/6, 5/6]$ 0 dla $x \in (5/6, 1]$
4	$e^{-16(x-0,5)^2}$	14	$1,5x$ dla $x \in (0, 1/3)$ 1 dla $x \in [1/3, 2/3]$ $1,5(1-x)$ dla $x \in (2/3, 1]$
5	$16\lvert 2x-1\rvert e^{-4(2x-1)^2}$	15	$\sin(4\pi x)$ dla $x \in (0, 1/4)$ 0 dla $x \in [1/4, 3/4]$ $\sin(4\pi x)$ dla $x \in (3/4, 1]$
6	$\dfrac{1}{1 + 64(x-0,5)^2}$	16	$3x$ dla $x \in (0, 1/3)$ 0 dla $x \in [1/3, 2/3]$ $3(x-1)$ dla $x \in (2/3, 1]$
7	$\dfrac{8(x-0,5)}{1 + 64(x-0,5)^2}$	17	$\left\lvert \dfrac{\sin[3\pi(2x-1)]}{3\pi(2x-1)} \right\rvert$
8	$2(x-0,5)$	18	$\sin[2\pi(2x-1)^2]$
9	$\dfrac{4\lvert 2x-1\rvert}{1 + 16(2x-1)^2}$	19	0 dla $x \in (0, 1/4)$ -1 dla $x \in [1/4, 1/2)$ 1 dla $x \in [1/2, 3/4)$ 0 dla $x \in [3/4, 1]$
10	$-\cos(\pi x)$	20	$\dfrac{\sin[6\pi(x-0,5)]}{[6\pi(x-0,5)]}$

Oznaczono: $x = \dfrac{t}{T}$

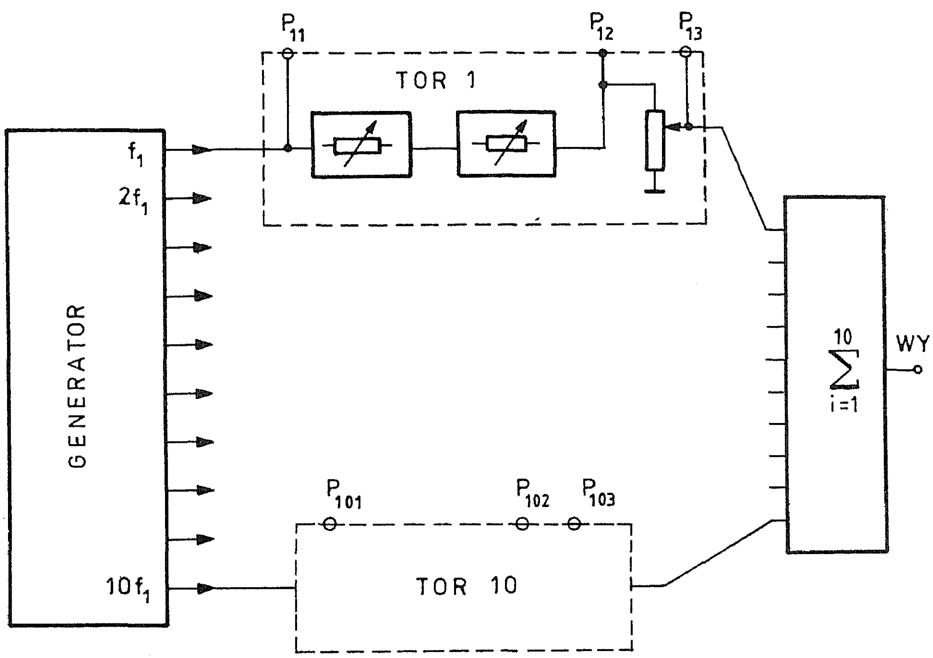
Należy obliczyć (w domu) współczynniki a_k, b_k, φ_k i c_k tej funkcji dla $k \in [1,10]$.

Wyniki obliczeń wraz z wykresem rozkładanej funkcji należy przygotować w dwóch egzemplarzach i przedstawić prowadzącemu zajęcia przed rozpoczęciem pracy. Jeden komplet wyników otrzymuje prowadzący, a na podstawie drugiego wykonujący przystępuje do syntezy funkcji f(t).

Do dyspozycji jest następujący zestaw przyrządów:

- oscyloskop,
- woltomierz typu V 640,
- przyrząd nr 15 zawierający generator dziesięciu przebiegów harmonicznych oraz sumator tych przebiegów.

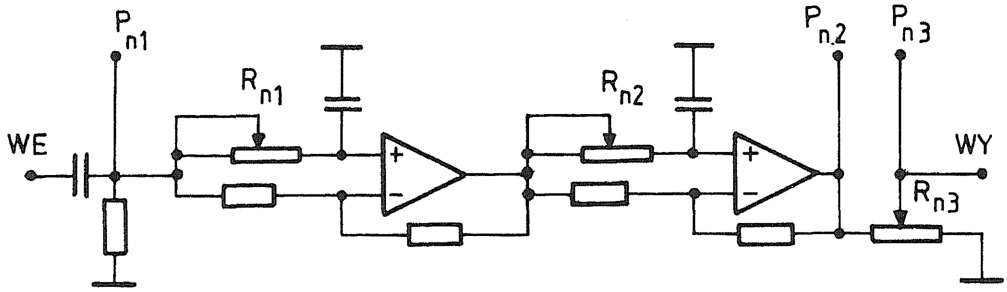
Schemat przyrządu przedstawiono na rys.3.1. Jego działanie jest następujące: generator wytwarza zsynchronizowanych ze sobą 10 sygnałów harmonicznych o częstotliwościach $f_n = n\, f_1$, gdzie $n \in [1,10]$, a $f_1 = 416{,}1$ Hz.



Rys. 3.1

Każdy z wytworzonych sygnałów przesyłany jest odrębnym torem do układu sumującego. Struktura wszystkich dziesięciu torów jest identyczna. Różnią się one tylko wartościami elementów. Każdy tor składa się z dwóch przesuwników fazy, tzn. z dwóch układów pozwalających zmieniać fazę sygnału bez zmiany jego amplitudy i z regulatora amplitudy. Fazę w n–tym torze reguluje się potencjometrami R_{n1} i R_{n2}, a amplitudę – potencjometrem R_{n3}. Szczegółowy schemat ideowy jednego toru przedstawiono na rys.3.2.

Aby uzyskać przebieg funkcji, należy ustawić wartości amplitud i faz wszystkich dziesięciu składowych fourierowskich tak, aby były zgodne z wynikami wykonanych



Rys. 3.2

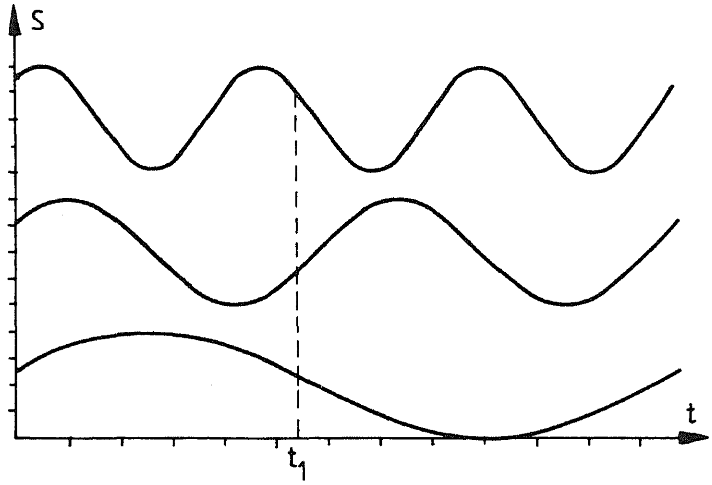
wcześniej obliczeń. Wymaga to określenia faz poszczególnych składowych fourierowskich w każdej chwili czasu i wybrania momentu, w którym te fazy należy porównać. Następnie należy dokonać regulacji faz w tej właśnie chwili.

Fazą k–tej harmonicznej sygnału (równanie (3.7)) nazywa się argument odpowiedniej funkcji harmonicznej

$$\Phi_k(t) = \frac{2\pi kt}{T} - \varphi_k. \tag{3.10}$$

Stała $-\varphi_k$ jest równa wartości tej funkcji w chwili $t = 0$.

Fazy poszczególnych harmonicznych zmienia się, obserwując wyniki regulacji na oscyloskopie dwustrumieniowym. Jeden strumień wykorzystuje się do obserwacji sygnału odniesienia (może nim być np. składowa o częstotliwości podstawowej), a drugi do obserwacji odpowiedniej składowej harmonicznej (rys.3.3). Fazy obu



Rys. 3.3

sygnałów porównuje się w wybranej chwili czasu t_1. Wygodnie jest wybrać jako t_1 chwilę, w której sygnał odniesienia przechodzi przez zero

$$\Phi_1(t_1) = 0, \tag{3.11}$$

tzn.

$$t_1 = \frac{\varphi_1 T}{2\pi}. \tag{3.12}$$

Wtedy fazy pozostałych składowych określić można najdokładniej. Wynoszą one

$$\Phi_k(t_1) = k\varphi_1 - \varphi_k. \tag{3.13}$$

Regulując w chwili $t = t_1$ fazy kolejnych harmonicznych względem składowej podstawowej, należy doprowadzić do pełnej ich zgodności z wynikami przeprowadzonych poprzednio obliczeń.
UWAGA:
W równaniu (3.7) liczy się ciąg wartości (φ_k), a do regulacji faz wykorzystuje się ciąg $\{\Phi_k(t_1)\}$.

Nie jest to jedyna możliwość oceny wzajemnych zależności fazowych poszczególnych harmonicznych. Można wszystkie obliczenia odnosić nie do składowej podstawowej sygnału, a np. do jego najwyższej harmonicznej. Można porównywać fazy sygnałów metodą obserwacji figur Lissajous (doprowadzenie jednego z porównywanych sygnałów do poziomych płytek odchylających, a drugiego do pionowych). Można zawsze fazę k-tej składowej porównywać z fazą składowej k-1. Wybór sposobu postępowania zależy zarówno od żądanej dokładności regulacji, jak i od wartości faz φ_k otrzymanych w wyniku obliczeń. Pozostaje on do uznania czytelnika.

Pomiary faz i amplitud składowych przeprowadza się w punktach pomiarowych P_{n1}, P_{n2} i P_{n3}.

ZADANIA DO OPRACOWANIA

1. Jakie warunki musi spełniać funkcja, aby można ją było rozłożyć na szereg Fouriera?
2. Czy przebieg o dyskretnym widmie częstotliwościowym musi być okresowy?
3. Jakie są ograniczenia syntezy zadanego przebiegu za pomocą opisanego powyżej przyrządu?
4. Jak na ekranie oscyloskopu odczytać fazy składowych? (równanie (3.7)).
5. Jak należy regulować fazy składowych fourierowskich?
6. Czym spowodowane zostało odchylenie otrzymanego kształtu funkcji od założonego?

LITERATURA

[1] J. S z a b a t i n: Podstawy teorii sygnałów. WKiŁ. Warszawa 1982.