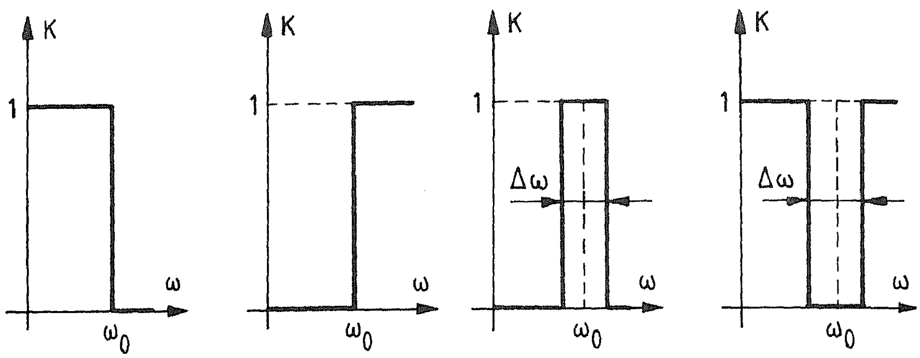
Ćwiczenie 5

FILTRY ELEKTRYCZNE

WPROWADZENIE

Filtrami elektrycznymi nazywane są układy elektryczne przepuszczające przebiegi elektryczne zawarte w określonym pasmie częstotliwości, a tłumiące przebiegi o innych częstotliwościach (Encyklopedia Powszechna. PWN, Warszawa 1973).

Są to więc układy wykonujące na sygnałach elektrycznych pewne operacje w dziedzinie częstotliwości. Operacje te polegają na przenoszeniu lub nieprzenoszeniu sygnałów o określonych częstotliwościach. Ze względu na pasmo przenoszonych sygnałów filtry można podzielić na dolnoprzepustowe, górnoprzepustowe, środkowoprzepustowe (pasmowe) oraz środkowozaporowe. Jakościowo charakterystyki (transmitancje) tych filtrów przedstawiono na rys.5.1.



Rys. 5.1

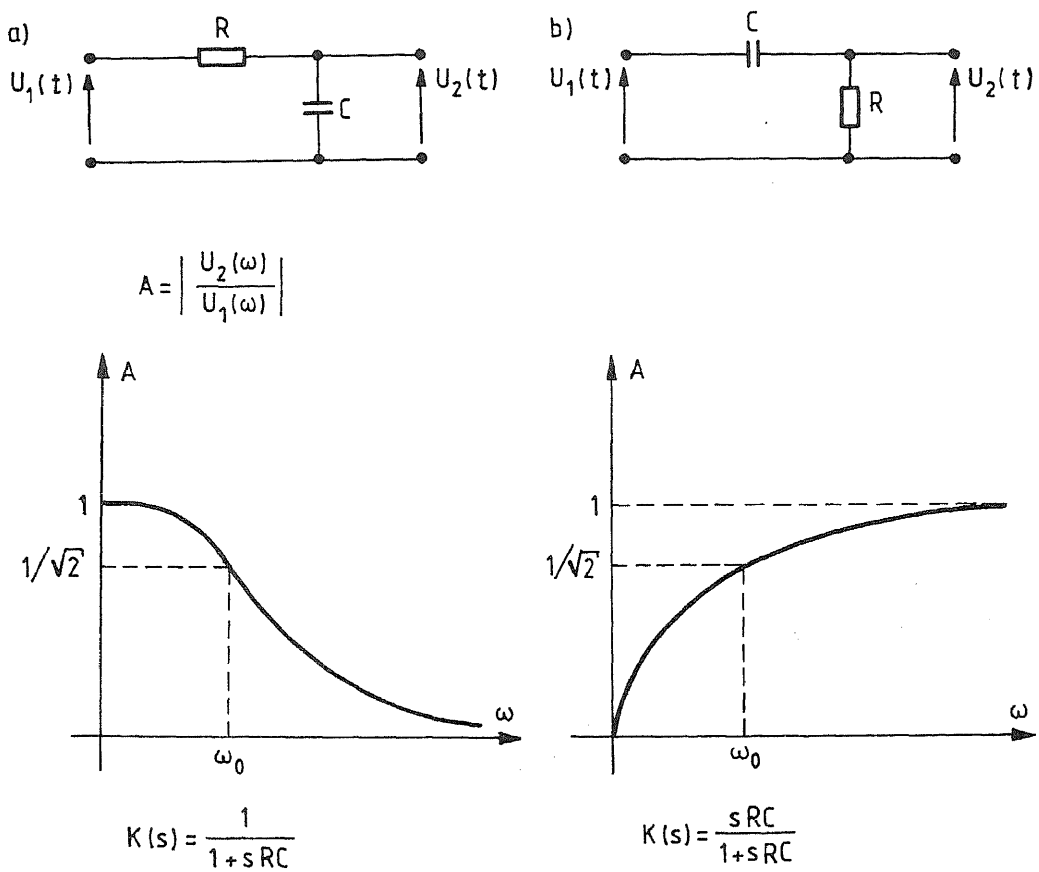
Charakterystyki filtrów z rys.5.1 są charakterystykami wyidealizowanymi. Można wykazać, że niemożliwa jest realizacja filtru o skokowym przejściu od pasma przenoszenia do pasma zaporowego. Odpowiedzią takiego filtru na skok napięcia na jego wejściu byłby na wyjściu sygnał zmieniający się już przed skokiem napięcia wejściowego. Sytuacja taka narusza zasadę przyczynowości i nie może zaistnieć.

Najprostszymi realizowanymi filtrami dolnoprzepustowymi i górnoprzepustowymi są czwórniki RC przedstawione na rys.5.2.

Na rysunku tym pokazano schematy filtrów, wykresy ich charakterystyk amplitudowych oraz transmitancje.

Transmitancją albo funkcją przenoszenia czwórnika K(s) nazywany jest stosunek transformat Laplace'a sygnału wyjściowego i wejściowego czwórnika. Zachodzi związek

$$U_2(s) = \mathcal{L}[U_2(t)] = K(s)\, U_1(s) = K(s)\, \mathcal{L}[U_1(t)]. \qquad (5.1)$$



Rys. 5.2

Charakterystyką amplitudowo-fazową lub częstotliwościową funkcją przenoszenia czwórnika nazywa się funkcję

$$K(i\omega) = K(s)\Big|_{s=i\omega}. \tag{5.2}$$

Charakterystyką amplitudową czwórnika nazywa się funkcję

$$A(\omega) = |K(i\omega)|. \tag{5.3}$$

Charakterzstyką fazową czwórnika nazywa się funkcję

$$\varphi(\omega) = \arg K(i\omega). \tag{5.4}$$

Częstotliwością graniczną ω_g między pasmem przenoszenia a pasmem zaporowym filtru przyjęto nazywać częstotliwość, przy której charakterystyka amplitudowa maleje do $1/\sqrt{2}$ swej maksymalnej wartości. Dla filtru dolnoprzepustowego z rys.5.2a:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \tag{5.5}$$

$$A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_g RC)^2}}, \tag{5.6}$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC}. \tag{5.7}$$

Dla filtru z rys.5.2b:

$$A(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{\omega RC}\right]^2}}, \tag{5.8}$$

$$A(\omega_g) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\omega_g RC} = 1, \tag{5.9}$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC}. \tag{5.10}$$

W filtrze dolnoprzepustowym dla $\omega \gg \omega_g$ charakterystyka amplitudowa ma postać

$$A(\omega) \simeq \frac{\omega_g}{\omega}. \tag{5.11}$$

Oznacza to, że wzmocnienie filtru z rys.5.2a w pasmie zaporowym maleje ze wzrostem częstotliwości o 20 dB na dekadę lub o 6 dB na oktawę. Jeśli niezbędne jest uzyskanie szybszego spadku wzmocnienia, tzn. charakterystyki bardziej zbliżonej do prostokątnej (rys.5.1a), to należy połączyć kilka filtrów dolnoprzepustowych. Otrzyma się wówczas funkcję przenoszenia typu

$$k = \frac{1}{(1 + \alpha_1 S)(1 + \alpha_2 S)\,(1 + \alpha_3 S)\ ...\ (1 + \alpha_n S)}, \tag{5.12}$$

gdzie α_i - dodatnie rzeczywiste współczynniki,

$$S = \frac{s}{\omega_g}, \tag{5.13}$$

a ω_g – górna częstotliwość graniczna filtru.

W takim filtrze n-tego rzędu wzmocnienie w pasmie zaporowym maleje ze wzrostem częstotliwości o 20n dB na dekadę lub o 6n dB na oktawę. Jeśli wszystkie połączone filtry były identyczne i miały funkcje przenoszenia opisane równaniem

$$k_i = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_g}}, \tag{5.14}$$

to charakterystyka wypadkowego układu ma postać

$$k_i = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_{gi}}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{s}{\omega_{g1}}\right]^n}, \tag{5.15}$$

Podstawiając

$$s = S\omega_g \tag{5.16}$$

otrzymuje się

$$k(s) = \frac{1}{(1 + \alpha S)^n}, \tag{5.17}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\omega_g}{\omega_{g1}}. \tag{5.18}$$

Stąd charakterystyka amplitudowa ma postać

$$A(\omega) = |K(i\Omega)| = \frac{1}{\left[\sqrt{1 + (\alpha\Omega)^2}\right]^n}, \tag{5.19}$$

gdzie

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_g}.$$

Dla $\Omega = 1$ uzyskuje się

$$A(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{[\sqrt{1 + \alpha^2}]^n}, \tag{5.20}$$

$$\frac{\omega}{\omega_{g1}} = \alpha = \sqrt{\sqrt[n]{2} - 1}. \tag{5.21}$$

Jest to związek między częstością graniczną ω_{g1} pojedynczego filtru dolnoprzepustowego i częstością graniczną ω_g n identycznych takich filtrów połączonych łańcuchowo.

Ogólna postać funkcji przenoszenia filtru dolnoprzepustowego jest następująca

$$k = \frac{k_0}{1 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots c_n s^n}. \tag{5.22}$$

Rząd filtru równy jest najwyższej potędze, w której s występuje w funkcji przenoszenia.

Można wykazać, że mianownik wyrażenia (5.22) daje się przedstawić w postaci iloczynów trójmianów kwadratowych o współczynnikach rzeczywistych dodatnich

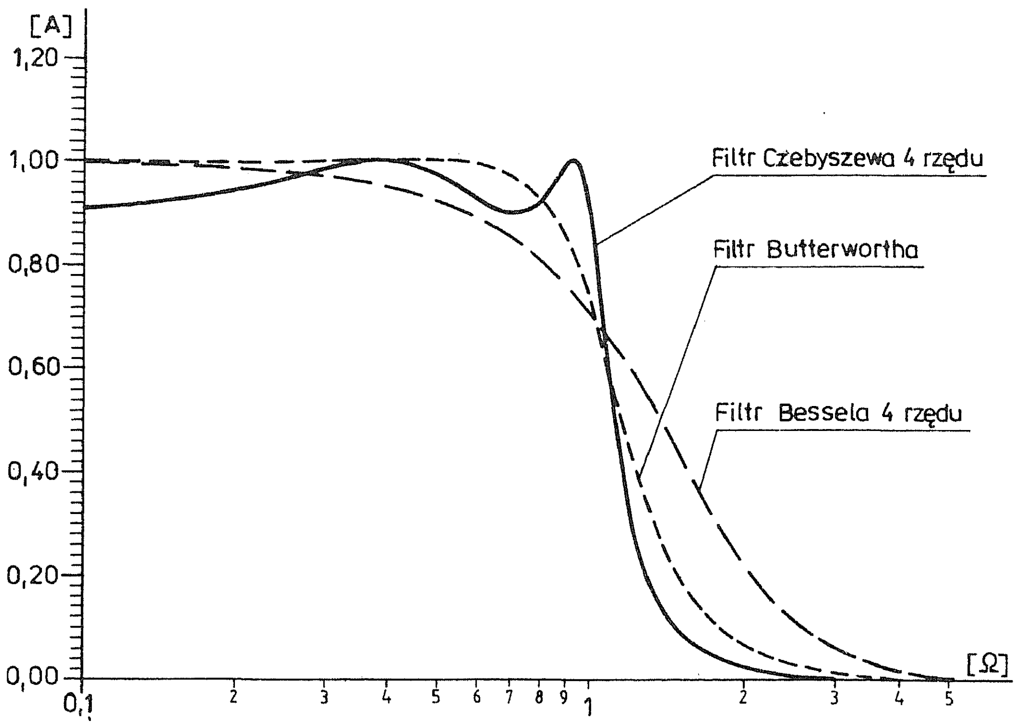
$$k = \frac{k_0}{(1 + a_1 s + b_1 s^2)(1 + a_2 s + b_2 s^2) \dots}. \qquad (5.23)$$

Dla filtrów rzędów nieparzystych jeden ze współczynników b_i jest równy zero.

Charakterystykę filtru dolnoprzepustowego można ukształtować w określony sposób. Zależnie od warunków, które musi ona spełniać, współczynnik a_i i b_i przyjmują odpowiednie wartości.

Istnieje wiele różnych kryteriów optymalizacji filtrów dolnoprzepustowych. Poniżej przedstawiono niektóre z nich, najczęściej stosowane.

1. Kryterium maksymalnej płaskości charakterystyki amplitudowej w pasmie przenoszenia. Kryterium to spełniają filtry Butterwotha.



Rys. 5.3

2. Kryterium maksymalnej stromości charakterystyki amplitudowej powyżej częstotliwości granicznej. Kryterium to spełniają filtry Czebyszewa. Maksymalnie stromy spadek charakterystyki amplitudowej A(ω) powyżej częstotliwości granicznej okupiony jest nierównomiernością charakterystyki A(ω) w pasmie przenoszenia.
3. Kryterium równego opóźnienia sygnałów w pasmie przenoszenia tzn. kryterium liniowości charakterystyki fazowej φ(ω). Kryterium to spełnia filtr dolnoprzepustowy Bessela.

Na rys.5.3 przedstawiono przykłady charakterystyk amplitudowych filtrów obliczonych według tych kryteriów.

Filtr Butterwortha

Z równania (5.22) po podstawieniu

$$S = i\Omega = i\frac{\omega}{\omega_g} \tag{5.24}$$

otrzymuje się wyrażenie na kwadrat modułu charakterystyki amplitudowej

$$|A|^2 = \frac{k_0}{1 + A_2\Omega^2 + A_4\Omega^4 + \ldots + A_{2n}\Omega^{2n}} \,. \tag{5.25}$$

W pasmie przenoszenia zmienna Ω spełnia warunek $\Omega \ll 1$. Aby zatem w zakresie $0 < \Omega < 1$, moduł $|A|^2$ zmieniał się możliwie jak najmniej, wyrazy $A_2, A_4, \ldots, A_{2n-2}$ muszą być równe zero. Wówczas

$$|A|^2 = \frac{k_0}{1 + A_{2n}\Omega^{2n}} \,. \tag{5.26}$$

Z definicji (5.24) wynika, że

$$|A|^2\Big|_{\Omega=1} = \frac{|k_0|^2}{2}, \tag{5.26}$$

a stąd

$$\frac{k_0^2}{2} = \frac{k_0^2}{1 + A_{2n}} \Rightarrow A_{2n} = 1. \tag{5.27}$$

Ostatecznie filtr Butterwortha ma charakterystykę amplitudową w postaci

$$|A|^2 = \frac{k_0}{1 + \Omega^{2n}} \,. \tag{5.28}$$

Porównując charakterystyki amplitudowe wynikające z równania (5.22) z charakterystyką (5.28) otrzymuje się funkcje przenoszenia filtrów Butterwortha określonego rzędu. Mają one postać przedstawioną w tablicy 5.1.

Tablica 5.1

Rząd filtru	Funkcja przenoszenia $\frac{k_0}{K(S)}$
1	$1 + S$
2	$1 + \sqrt{2}S + S^2$
3	$1 + 2S + 2S^2 + S^3 = (1 + S)(1 + S + S^2)$
4	$1 + 2{,}613\,S + 3{,}414\,S^2 + 2{,}613\,S^3 + S^4 =$ $= (1 + 1{,}848\,S + S^2)(1 + 0{,}765\,S + S^2)$

Można wykazać [3], że współczynniki a_i b_i w wyrażeniu (5.23) dla filtru Butterwortha n-tego rzędu wyrażane są wzorami przedstawionymi w tablicy 5.2.

Tablica 5.2

Dla n parzystych	Dla n nieparzystych
$a_i = 2\cos\left[\frac{2i-1}{2n}\pi\right]$ $b_i = 1$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots, \frac{n}{2}$	$a_1 = 1, b_1 = 0$ $a_i = 2\cos\left[\frac{i-1}{n}\pi\right]$ $b_i = 1$ dla $i = 2, \ldots, \frac{n+1}{2}$

Tak obliczone współczynniki umożliwiają sprowadzenie zagadnienia projektowania filtru n-tego rzędu do projektowania filtrów pierwszego i drugiego rzędu łączonych kaskadowo.

Filtr dolnoprzepustowy Czebyszewa

Charakterystyka amplitudowa filtrów Czebyszewa n-tego rzędu opisana jest równaniem

$$|A|^2 = \frac{K_1K_0^2}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega)}, \tag{5.29a}$$

gdzie

$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos \Omega) & \text{dla } 0 \leq \Omega \leq 1, \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{arch} \Omega) & \text{dla } \Omega > 1. \end{cases} \tag{5.29b}$$

Dla filtrów rzędów 1-4 równanie to sprowadza się do postaci przedstawionej w tablicy 5.3.

Tablica 5.3

n	T_n
1	Ω
2	$2\Omega^2 - 1$
3	$4\Omega^3 - 3\Omega$
4	$8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$

Stałą K_1 dobiera się tak, aby dla $\Omega = O$ było $|A| = K_0$. Stąd wartości K_1 dla n nieparzystych wynoszą 1, a dla n parzystych $1 + \varepsilon^2$; ε jest miarą falistości charakterystyki filtru, czyli wahań wartości A w pasmie przenoszenia. Obowiązują zależności

$$\left|\frac{A_{max}}{A_{min}}\right| = \sqrt{1 + \varepsilon^2} \tag{5.30}$$

oraz

$$|A_{max}| = \begin{cases} K_0[1 + \varepsilon^2]^{\frac{1}{2}} & \text{dla rzędu parzystego,} \\ K_0 & \text{dla rzędu nieparzystego;} \end{cases} \tag{5.31}$$

$$|A_{min}| = \begin{cases} K_0[1 + \varepsilon^2]^{\frac{-1}{2}} & \text{dla rzędu parzystego,} \\ K_0 & \text{dla rzędu nieparzystego.} \end{cases} \tag{5.32}$$

Można wykazać [3], że dla filtrów Czebyszewa parzystych rzędów parametry a_i i b_i w równaniu (5.23) opisują wzory*)

$$\begin{aligned} b_i' &= \left[\mathrm{ch}^2\gamma - \cos^2\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)\right]^{-1}, \\ a_i' &= 2b_i' \,\mathrm{sh}\gamma \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), \end{aligned} \tag{5.33}$$

gdzie $i = 1, 2, ..., \frac{n}{2}$.

Dla filtrów nieparzystych rzędów obowiązują zależności

$$\begin{aligned} b_i' &= 0 \\ a_i' &= \mathrm{sh}^{-1}\gamma, \\ b_i' &= \left[\mathrm{ch}^2\gamma - \cos^2\left(\frac{i-1}{n}\pi\right)\right]^{-1}, \\ a_i' &= 2b_i' \mathrm{sh}\gamma \cos\left(\frac{i-1}{n}\pi\right), \end{aligned} \tag{5.34}$$

gdzie $i = 2, ..., \frac{n+1}{2}$.

*) Symbole "prim" oznaczają, że przyjęto inną niż zwykle częstotliwość graniczną filtru; jest to tym razem częstotliwość, przy której filtr przyjmuje ostatni raz wartość k.

Oznaczono przy tym

$$\gamma = \frac{1}{n}\operatorname{arsh}(\varepsilon^{-1}). \tag{5.35}$$

Po podstawieniu obliczonych w ten sposób współczynników a_i' b_i' do równania (5.23) otrzymuje się filtr Czebyszewa, gdzie wartość S nie jest znormalizowana względem częstotliwości granicznej ω_g, przy której wzmocnienie spada o 3 dB, ale względem częstotliwości ω_c, przy której wzmocnienie przyjmuje ostatni raz wartość K_0.

Filtry dolnoprzepustowe Bessela

Są to filtry, w których sygnały o częstotliwościach mniejszych od granicznej, $\Omega < 1$ opóźnione są prawie o tę samą wartość czasu, zwaną opóźnieniem grupowym t_{gr}. Właściwość ta umożliwia najwierniejsze przekazywanie kształtu sygnałów.

Sposób wyznaczania stałych a, b przedstawiony zostanie na przykładzie filtru drugiego rzędu.

Charakterystyka amplitudowo-fazowa filtru drugiego rzędu ma postać

$$K(i\Omega) = \frac{K_0}{1 + ia_1\Omega - b_1\Omega^2}. \tag{5.36}$$

Wnoszone przesunięcie fazowe opisane jest równaniem

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{a_1\Omega}{1 - b_1\Omega^2}. \tag{5.37}$$

Opóźnienie grupowe definiuje się jako

$$t_{gr} = -\frac{d\varphi}{d\omega} = -\frac{d\varphi}{d\Omega}\cdot\frac{1}{\omega_g}. \tag{5.38}$$

Wygodnie jest operować znormalizowanym opóźnieniem grupowym

$$T_{gr} = \frac{t_{gr}\omega_g}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{d\Omega}. \tag{5.39}$$

Po podstawieniu (5.39) do (5.37) otrzymuje się

$$T_{gr} = \frac{a_1(1 + b_1\Omega^2)}{2\pi[1 + (a_1^2 - 2b_1)\Omega^2 + b_1^2\Omega^4]}. \tag{5.40}$$

Aby T_{gr} było możliwie stałe dla $\Omega < 1$, współczynniki występujące w liczniku i w mianowniku przy tych samych potęgach muszą być sobie równe. Oznacza to, że musi być spełniony warunek

$$b_1 = a_1^2 - 2b_1,$$

tzn.

$$b_1 = \frac{a_1^2}{3}. \tag{5.41}$$

Drugie równanie wynika z warunku normalizacji

$$|K(i\Omega)|^2\Big|_{\Omega=1} = \frac{K_0^2}{2}.$$

Stąd otrzymuje się zależność

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{(1 - b_1)^2 + a_1^2}. \tag{5.42}$$

Z równań (5.41) i (5.42) wynika, że $a_1 = 1{,}3617$ oraz $b_1 = 0{,}6180$. W przypadku filtrów wyższych rzędów układy równań komplikują się. Można jednak [4] podać wzór rekurencyjny dla współczynników c_i w równaniu (5.22). Współczynniki te, znormalizowane do odwrotności opóźnienia grupowego dla częstotliwości $\Omega = 0$, powiązane są ze sobą zależnościami

$$c_i' = \frac{2(n - i + 1)}{i(2n - i + 1)} c_{i-1}',$$

przy czym $c_i' = 1$.

Po przeliczeniu współczynniki a_i i b_i filtru Bessela przyjmują wartości przedstawione w tablicy 5.4.

Tablica 5.4

n	i	a	b
1	1	1	0
2	1	1,3617	0,6180
3	1	0,7560	0
	2	0,9996	0,4772
4	1	1,3397	0,4889
	2	0,7743	0,3890

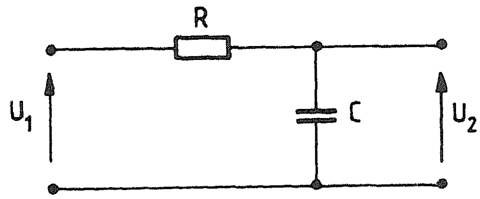
Realizacja filtrów

Filtry dolnoprzepustowe

1. Filtr pierwszego rzędu (rys.5.4)

Funkcję przenoszenia filtru opisuje równanie

$$K = \frac{1}{1 + SRC\omega_g}.$$



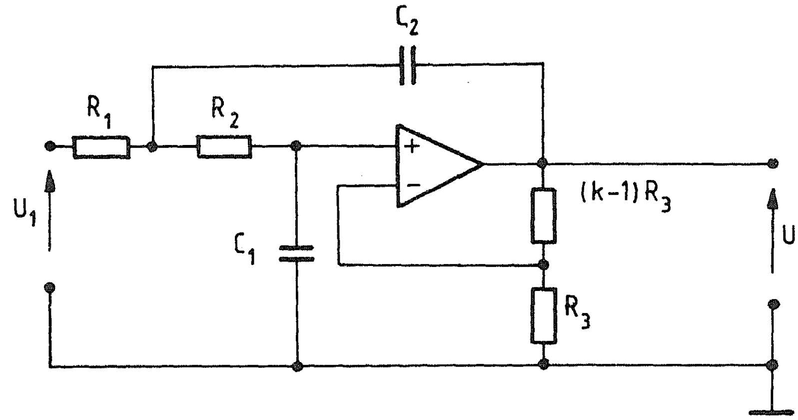
Rys. 5.4

2. Filtr drugiego rzędu

Funkcja przenoszenia filtru opisana jest równaniem

$$K = \frac{K_0}{1 + aS + bS^2}.$$

Istnieje wiele układów elektronicznych, które tę funkcję realizują. W ćwiczen przewidziano do tego celu układ przedstawiony na rys.5.5.



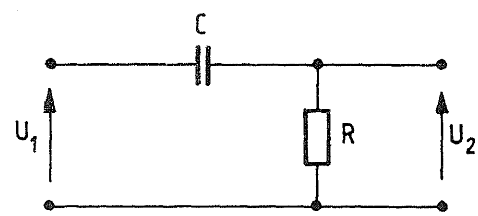
Rys. 5.5

Można wykazać, że jego funkcja przenoszenia ma postać

$$K = \frac{U_2}{U_1} = \frac{k}{1 + S\omega_g[R_1C_1 + R_2C_1 + (1-k)R_1C_2] + S^2\omega_g^2R_1R_2C_1C_2}.$$

Filtry górnoprzepustowe

1. Filtr pierwszego rzędu (rys.5.6)

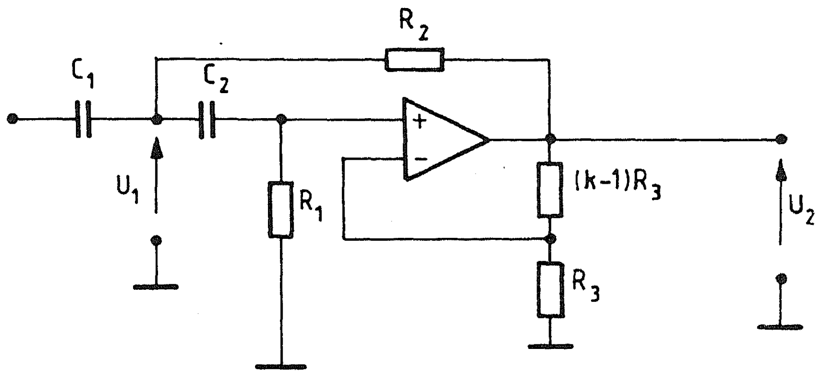


Rys. 5.6

Funkcję przenoszenia filtru opisuje równanie

$$K = \frac{S\omega_g RC}{1 + S\omega_g RC}.$$

2. Filtr drugiego rzędu (rys.5.7)



Rys. 5.7

Funkcję przenoszenia filtru opisuje równanie

$$K = \frac{K_0}{1 + a\frac{1}{S} + b\left(\frac{1}{S}\right)^2}.$$

Można wykazać, że jego funkcja przenoszenia ma postać

$$K = \frac{k}{1 + \frac{1}{S}\frac{R_2(C_1 + C_2) + R_1C_2(1 - k)}{R_1R_2C_1C_2\omega_g} + \frac{1}{S^2}\cdot\frac{1}{R_1R_2C_1C_2\omega_g^2}}.$$

Projektowanie filtrów wyższych rzędów

Projektowanie sprowadza się do wykonania następujących etapów pracy:

1. Określenie współczynników a_i i b_i funkcji przenoszenia filtru.
2. Narysowanie schematu blokowego filtru i określenie funkcji przenoszenia kolejnych bloków.
3. Określenie struktury każdego bloku i wyznaczenie wartości elementów, które zapewniają założoną funkcję przenoszenia.

WYKONANIE ĆWICZENIA

Do dyspozycji wykonującego są następujące przyrządy:

– generator funkcyjny G432,

- oscyloskop KR 7002,
- filtr aktywny - przyrząd nr 17,
- zasilacz,
- woltomierz V 640.

Ćwiczenie składa się z trzech części:

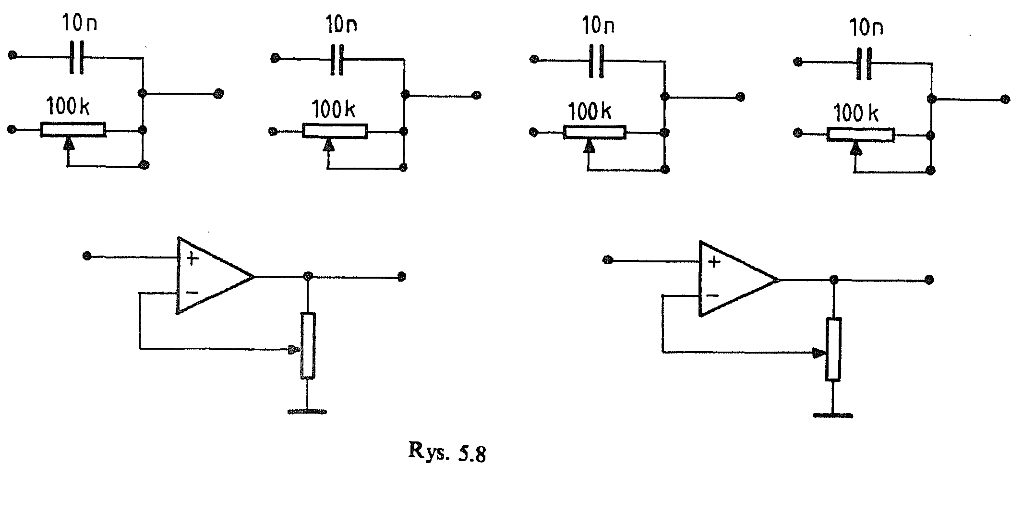
1. Projektowanie filtru
2. Montaż zaprojektowanego układu i pomiar jego charakterystyki
3. Analiza wyników pomiarów i opracowanie sprawozdania

Projektowanie

Tę część ćwiczenia należy wykonać w domu. Na poprzednich zajęciach wykonujący otrzymuje zadanie indywidualne w postaci założeń projektowych obejmujących typ filtru, rząd filtru, jego częstotliwość graniczną i wzmocnienie. Na tej podstawie należy w domu zaprojektować filtr i obliczyć jego charakterystykę amplitudową. Wyniki tej pracy, tzn. schemat elektryczny układu oraz obliczoną i wykreślną charakterystykę amplitudową należy przygotować w dwóch egzemplarzach. Jeden z nich otrzymuje prowadzący, a drugi służy do wykonania ćwiczenia. (Uwaga. Na wykresie wzmocnienie i częstotliwość przedstawić w skali logarytmicznej).

Montaż filtru i pomiar jego charakterystyk

Zaprojektowany filtr należy zmontować, łącząc ze sobą odpowiednie bloki układu pomiarowego (nr 17). Schemat elektryczny przyrządu przedstawiono na rys.5.8. Odpowiednie wartości elementów bloków dobrać za pomocą dodatkowych pomiarów R, C i wzmocnienia wzmacniaczy.



Rys. 5.8

Zmierzyć napięcie wyjściowe filtru w funkcji częstotliwości sygnału wejściowego. Wyniki przedstawić w postaci tabeli i wykresu wzmocnienie-częstotliwość, naniesionego na obliczoną wcześniej charakterystykę amplitudową filtru.

Zaobserwować odpowiedź filtru na skok jednostkowy napięcia na wejściu. W tym celu należy do wejścia układu doprowadzić ciąg impulsów prostokątnych z generatora funkcyjnego, a wyjście filtru dołączyć do oscyloskopu. Wykreślić kształt odpowiedzi filtru obserwowany na oscyloskopie, zachowując starannie skale czasu i napięcia.

W sprawozdaniu należy:

1. Przedstawić szczegóły obliczeń wykonanych podczas projektowania filtru oraz wyniki tych obliczeń i schemat filtru.
2. Przedstawić wyniki pomiarów charakterystyki amplitudowej i odpowiedzi filtru na skok jednostkowy.
3. Wyjaśnić przyczyny ewentualnych niezgodności wyników pomiarów z wynikami obliczeń.
4. Przeprowadzić analizę otrzymanej odpowiedzi układu na skok jednostkowy.

ZADANIA DO OPRACOWANIA

1. Filtry górnoprzepustowe mają charakterystykę przenoszenia, którą otrzymuje się, podstawiając do funkcji przenoszenia 1/S w miejsce S. W jaki sposób można uzyskać funkcję przenoszenia filtru środkowoprzepustowego?
2. Jaki jest sens fizyczny parametrów b_i w równaniu (5.23)?
3. Jaki jest związek funkcji przenoszenia filtru z odpowiedzią na skok jednostkowy napięcia wejściowego?

LITERATURA

[1] U. Tietze, Ch. Schenk: Układy półprzewodnikowe. WNT, Warszawa 1976.
[2] M. Nadachowski, Z. Kulka: Analogowe układy scalone. WKiŁ, Warszawa 1980.
[3] L. Weinberg: Network analysis and Synthesis. McGraw Hill Book Company, New York, 1962.
[4] L. Storch: Synthesis of constant delay ladder networks using Bessel polynomials. Proc. IRE, 42, 1666 (1954).