

$$T_{g\vartheta, g} + \frac{1}{g \sin \vartheta} T_{\varphi\vartheta, \varphi} + \frac{1}{g} T_{\vartheta\vartheta, \vartheta} + \frac{1}{g} (3T_{g\vartheta} - \operatorname{ctg} \vartheta T_{\varphi\varphi} + \operatorname{ctg} \vartheta T_{\vartheta\vartheta}) + F_g = 0$$

10.3. Zadania

Zadanie 10.1. Niech pole wektorowe $\tilde{a} : \varepsilon^3 \rightarrow \mathcal{T}_1$ ma reprezentację

$$[\tilde{a}_\Omega(\theta)] = \begin{bmatrix} \ln \theta^1 \\ \sin \theta^2 \\ \cos \theta^3 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\tilde{h}^\Omega(\theta)\} \text{ dla } \theta = (\theta^1, \theta^2, \theta^3) \in D_\theta$$

we współrzędnych sferycznych.

Znaleźć gradient, dywergencję i laplasjan tego pola.

Zadanie 10.2. Niech pole tensorowe $A : \varepsilon^3 \rightarrow \mathcal{T}_1$ ma reprezentację

$$A^\alpha_\beta(\varphi) = \begin{bmatrix} \ln \varphi^1 & \sin \varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^2 \varphi^3 \\ \cos \varphi^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\tilde{d}_\alpha(\varphi) \otimes \tilde{d}^\beta(\varphi)\}$$

dla $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) \in D_\varphi$ we współrzędnych walcowych.

Znaleźć gradient, div_1 i div_2 tego pola.

Zadanie 10.3. Niech będzie dane pole tensorowe $\tilde{T} : D \rightarrow \mathcal{T}_2$ klasy C^2 w obszarze $D \subset \varepsilon^3$ o reprezentacji $[\tilde{T}^\alpha_\beta(\varphi)]$ w bazie $\{\tilde{d}_\alpha(\varphi) \otimes \tilde{d}^\beta(\varphi)\}$ dla $\varphi \in D_\varphi$ we współrzędnych krzywoliniowych.

a) wyprowadzić wzór na reprezentację drugiego gradientu (drugą pochodną kowariantną) tego pola,

b) wyprowadzić wzór na reprezentację laplasjanu tego pola.

LITERATURA

1. Jeżewski M., Muszyński J., Żekanowski Z.: Matematyka. Cz.II. WPW, Warszawa 1976.
2. Gołąb S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1962.

3. Maurin K.: Analiza. Cz. II. PWN, Warszawa 1971.
4. Mączyński M., Muszyński J., Traczyk T., Żakowski W.: Matematyka. Podręcznik podstawowy dla WST.T.I. PWN, Warszawa 1980.
5. Opiał Z.: Algebra wyższa. PWN, Warszawa 1969.