b) sprawdzimy twierdzenie Cayleya-Hamiltona dla tensora $\underset{\sim}{A}$. Zgodnie z tym twierdzeniem musimy wykazać, że spełnione jest równanie

$$\underset{\sim}{A}^3 = 6\underset{\sim}{A}^2 - 9\underset{\sim}{A} + 2\underset{\sim}{1}$$

Jeśli tensor $\underset{\sim}{A}$ przedstawimy w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$, to z twierdzenia 7.10 wynika, że powyższe równanie jest równoważne równaniu macierzowemu:

$$[A^i{}_j]^3 = 6[A^i{}_j]^2 - 9[A^i{}_j] + 2[\delta^i{}_j]$$

Ponieważ mamy

$$[A^i{}_j]^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \\ -8 & 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & -15 \\ 6 & 8 & 9 \\ -30 & 0 & 41 \end{bmatrix}$$

$$6[A^i{}_j]^2 - 9[A^i{}_j] + 2[\delta^i{}_j] =$$

$$= 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

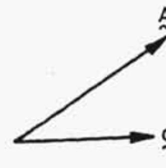
$$= 6\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \\ -8 & 0 & 11 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & -15 \\ 6 & 8 & 9 \\ -30 & 0 & 41 \end{bmatrix}$$

a więc równanie jest spełnione.

7.4. Rozkład widmowy tensora

Niech $\mathcal{T}_2$ będzie przestrzenią tensorową o walencji dwa nad przestrzenią euklidesową $\mathcal{T}_1 = E^n$. Jak wiadomo, dowolny tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ można traktować jako przekształcenie liniowe $\underset{\sim}{A}: \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$ przyporządkowujące dowolnemu wektorowi $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$ wektor $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$.

Na ogół wektor $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a}$ różni się od wektora wyjściowego $\underset{\sim}{a}$ długością i kierunkiem (rys.7.1). Możliwa jest jednak szczególna sytuacja, gdy istnieje liczba rzeczywista $\lambda \in R$ taka, że dla pewnego wektora $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$, $\underset{\sim}{a} \neq \underset{\sim}{0}$, zachodzi równość



Rys.7.1

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} = \lambda \underset{\sim}{a}$$

Oznacza to, że wektory $\underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a}$ są do siebie równoległe.

Definicja 7.10. Niech $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$. Liczbę $\lambda \in R$ nazywamy wartością własną tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$, jeśli istnieje niezerowy wektor $\underset{\sim}{a} \in E^n$ taki, że

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} = \lambda \underset{\sim}{a}$$

Wektor $\underset{\sim}{a} \neq \underset{\sim}{0}$ spełniający powyższe równanie nazywamy wektorem własnym tensora $\underset{\sim}{A}$ odpowiadającym wartości własnej λ.

Twierdzenie 7.12. Niech $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$. Jeśli liczba $\lambda \in R$ jest wartością własną tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$, to zbiór wektorów $N_\lambda = \{\underset{\sim}{a} \in E^n : \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} = \lambda \underset{\sim}{a}\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathcal{T}_1$.

Dowód. Ponieważ dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in N_\lambda$ i dowolnej liczby $\alpha \in R$ mamy

1) $\underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{b} = \lambda \underset{\sim}{a} + \lambda \underset{\sim}{b} = \lambda(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b})$, stąd $\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \in N_\lambda$

2) $\underset{\sim}{A}(\alpha \underset{\sim}{a}) = \alpha(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a}) = \alpha(\lambda \underset{\sim}{a}) = \lambda(\alpha \underset{\sim}{a})$, stąd $\alpha \underset{\sim}{a} \in N_\lambda$

a więc z twierdzenia 1.2 wnioskujemy, że zbiór N_λ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni E^n.

Twierdzenie 7.13. Liczba $\lambda \in R$ jest wartością własną tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia równanie charakterystyczne

$$\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{1}) = 0$$

Dowód. Niech liczba $\lambda \in R$ będzie wartością własną tensora $\underset{\sim}{A}$. Wtedy istnieje niezerowy wektor $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$ taki, że zachodzi równość

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} = \lambda \underset{\sim}{a}$$

Stąd mamy

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{1})\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$$

Równanie to ma niezerowe rozwiązanie, tzn. $\underset{\sim}{a} \neq \underset{\sim}{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{1}) = 0$$

Łatwo zauważyć, że tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$ ma co najwyżej n-wartości własnych.

W przypadku szczególnym, gdy $\mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ z powyższego twierdzenia wynika, że liczba $\lambda \in R$ jest wartością własną tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia równanie

$$\lambda^3 - I_{\underset{\sim}{A}}\lambda^2 - II_{\underset{\sim}{A}}\lambda - III_{\underset{\sim}{A}} = 0$$

gdzie liczby $I_{\underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{A}} \in R$ są niezmiennikami tensora $\underset{\sim}{A}$.

Twierdzenie 7.14. Jeśli tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ ma dwie różne wartości własne $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, to wektory własne $\underset{\sim}{a}_1 \in N_{\lambda_1}$ i $\underset{\sim}{a}_2 \in N_{\lambda_2}$ tworzą zbiór liniowo niezależny.

Dowód. Rozpatrzmy równanie

$$\alpha_1 \underset{\sim}{a}_1 + \alpha_2 \underset{\sim}{a}_2 = \underset{\sim}{0}, \quad \text{gdzie } \alpha_1, \alpha_2 \in R$$

Działając na to równanie tensorem $\underset{\sim}{A}$ otrzymamy

$$\alpha_1 \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a}_1 + \alpha_2 \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a}_2 = \underset{\sim}{0}$$

Korzystając z zależności $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a}_1 = \lambda_1 \underset{\sim}{a}_1$ i $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a}_2 = \lambda_2 \underset{\sim}{a}_2$ dostaniemy

$$\alpha_1 \lambda_1 \underset{\sim}{a}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \underset{\sim}{a}_2 = \underset{\sim}{0}$$

Mnożąc rozpatrywane równanie przez λ_2 i odejmując od powyższego równania otrzymamy

$$\alpha_1(\lambda_2 - \lambda_1)\underset{\sim}{a}_1 = \underset{\sim}{0}$$

Ponieważ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ i $\underset{\sim}{a}_1 \neq \underset{\sim}{0}$, to stąd $\alpha_1 = 0$. Podobnie można wykazać, że $\alpha_2 = 0$. Zatem wektory $\underset{\sim}{a}_1$ i $\underset{\sim}{a}_2$ tworzą zbiór liniowo niezależny.

Powyższe twierdzenie można uogólnić na przypadek gdy tensor ma skończoną liczbę różnych wartości własnych. Bezpośrednio stąd wynika:

<u>Wniosek</u> 7.1. Niech $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$. Jeśli tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ ma n różnych wartości własnych $\lambda_i \in R$ dla $i = 1,\dots,n$, to wektory własne $\underset{\sim}{a}_i \in N_{\lambda_i}$ dla $i = 1,\dots,n$ tworzą bazę przestrzeni E^n.

<u>Twierdzenie</u> 7.15 (o rozkładzie widmowym). Niech $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$. Jeśli tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ ma n wartości własnych $\lambda_i \in R$ dla $i = 1,\dots,n$ (mogą nie być różne) i istnieją wektory własne $\underset{\sim}{e}_i \in N_{\lambda_i}$ dla $i = 1,\dots,n$ tworzące bazę przestrzeni E^n, to tensor $\underset{\sim}{A}$ daje się przedstawić w postaci widmowej:

$$\underset{\sim}{A} = \lambda_1 \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}^1 + \lambda_2 \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}^2 + \dots + \lambda_n \underset{\sim}{e}_n \otimes \underset{\sim}{e}^n$$

gdzie $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ jest kobazą przestrzeni E^n względem bazy $\{\underset{\sim}{e}_i\}$.

Dowód. Z definicji wektora własnego i wartości własnej mamy

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{e}_i = \lambda_i \underset{\sim}{e}_i \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,n$$

a stąd kolejno otrzymamy

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{A} &= \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{A}(\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}^k) = (\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{e}_k) \otimes \underset{\sim}{e}^k = \\
&= (\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{e}_1) \otimes \underset{\sim}{e}^1 + (\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{e}_2) \otimes \underset{\sim}{e}^2 + \dots + (\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{e}_n) \otimes \underset{\sim}{e}^n = \\
&= (\lambda_1 \underset{\sim}{e}_1) \otimes \underset{\sim}{e}^1 + (\lambda_2 \underset{\sim}{e}_2) \otimes \underset{\sim}{e}^2 + \dots + (\lambda_n \underset{\sim}{e}_n) \otimes \underset{\sim}{e}^n = \\
&= \lambda_1 \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}^1 + \lambda_2 \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}^2 + \dots + \lambda_n \underset{\sim}{e}_n \otimes \underset{\sim}{e}^n
\end{aligned}$$

Zatem

$$\underset{\sim}{A} = \lambda_1 \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}^1 + \lambda_2 \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}^2 + \dots + \lambda_n \underset{\sim}{e}_n \otimes \underset{\sim}{e}^n$$

Z twierdzenia 7.15 wynika, że dla tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ spełniającego założenia tego twierdzenia istnieje baza $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ przestrzeni E^n taka, że reprezentacja $[A^i{}_j]$ tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ jest macierzą diagonalną o postaci

$$[A^i{}_j] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Natomiast z wniosku 7.1 i twierdzenia 7.15 wynika, że tensor, który ma n różnych wartości własnych, można zawsze przedstawić w postaci widmowej. Należy zaznaczyć, że tensor, który nie spełnia założeń twierdzenia 7.15, nie daje się przedstawić w postaci widmowej. Tensory takie istnieją.

P r z y k ł a d 7.5. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$[A^i{}_j] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

Znajdziemy rozkład widmowy tensora $\underset{\sim}{A}$, jeśli istnieje.

Szukamy wartości własnych i wektorów własnych tego tensora, tzn. liczb $\lambda \in R$ i niezerowych wektorów $\underset{\sim}{a} \in E^3$ spełniających równanie

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{1})\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$$

Niech $\underset{\sim}{A} = A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j$ i $\underset{\sim}{a} = a^k \underset{\sim}{e}_k$, to wtedy powyższe równanie przyjmie postać

$$(A^i{}_j - \lambda\delta^i{}_j)a^j \underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{0}$$

Równanie to jest równoważne układowi równań skalarnych

$$(A^i{}_j - \lambda\delta^i{}_j)a^j = 0 \quad \text{dla } i = 1,2,3$$

lub równaniu macierzowemu

$$\left[A^i{}_j - \lambda\delta^i{}_j\right]\left[a^j\right] = [0]$$

Rozpisując powyższe równanie otrzymamy

$$\begin{bmatrix} A^1{}_1-\lambda & A^1{}_2 & A^1{}_3 \\ A^2{}_1 & A^2{}_2-\lambda & A^2{}_3 \\ A^3{}_1 & A^3{}_2 & A^3{}_3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a następnie podstawiając dane wartości mamy

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Równanie to ma niezerowe rozwiązanie, tzn. $\left[a^i\right] \neq [0]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

a stąd mamy $-(\lambda - 1)^2(\lambda - 3) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 3$. Współrzędne wektorów własnych odpowiadających wartości $\lambda = 1$ wyznaczamy z równania

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^1 - a^2 = 0 \\ -a^1 + a^2 = 0 \\ a^1 - a^2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^1 = t \\ a^2 = t \\ a^3 = s \end{cases} \text{dla } t,s \in R$$

Zatem $N_{\lambda=1} = \{\underset{\sim}{a} \in E^3 : \underset{\sim}{a} = t\underset{\sim}{e}_1 + t\underset{\sim}{e}_2 + s\underset{\sim}{e}_3 \text{ dla } t,s \in R\}$, a stąd $\dim N_{\lambda=1} = 2$. Współrzędne wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $\lambda = 3$ wyznaczamy z równania

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -a^1 - a^2 = 0 \\ -a^1 - a^2 = 0 \\ a^1 - a^2 - 2a^3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^1 = r \\ a^2 = -r \\ a^3 = r \end{cases} \text{dla } r \in R$$

Zatem $N_{\lambda=3} = \{\underset{\sim}{a} \in E^3 : \underset{\sim}{a} = r\underset{\sim}{e}_1 - r\underset{\sim}{e}_2 + r\underset{\sim}{e}_3 \text{ dla } r \in R\}$, a stąd $\dim N_{\lambda=3} = 1$.

Z podprzestrzeni dwuwymiarowej $N_{\lambda=1}$ wybieramy dwa wektory liniowo niezależne $\underset{\sim}{d}_1$ i $\underset{\sim}{d}_2$, a z podprzestrzeni jednowymiarowej $N_{\lambda=3}$ wybieramy jeden wektor $\underset{\sim}{d}_3$, zatem

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}_1 = \underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{d}_2 = \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}_3 = \underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3 \end{cases}$$

Wektory $\underset{\sim}{d}_\alpha$ dla $\alpha = 1,2,3$ tworzą bazę przestrzeni E^3, więc z twierdzenia 7.15 wynika, że tensor $\underset{\sim}{A}$ można przedstawić w postaci:

$$\underset{\sim}{A} = 1\underset{\sim}{d}_1 \otimes \underset{\sim}{d}^1 + 1\underset{\sim}{d}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 + 3\underset{\sim}{d}_3 \otimes \underset{\sim}{d}^3$$

Zatem reprezentacja $\left[A^\alpha{}_\beta\right]$ tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}_\alpha \otimes \underset{\sim}{d}^\beta\}$ jest macierzą o postaci

$$\left[A^\alpha{}_\beta\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie. Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ i $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ ma postać

$$\underset{\sim}{d}_\alpha = g^i{}_\alpha \underset{\sim}{e}_i \quad \text{dla } \alpha = 1,2,3$$

więc $\left[g^i{}_\alpha\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, a stąd $\left[g^\alpha{}_i\right] = \left[g^i{}_\alpha\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Korzystając ze wzoru transformacyjnego mamy

$$A^\alpha{}_\beta = A^i{}_j g^\alpha_i g^j{}_\beta \quad \text{dla } \alpha, \beta = 1,2,3$$

a stąd

$$[A^{\alpha}{}_{\beta}] = [g^{\alpha}{}_{i}][A^{i}{}_{j}][g^{j}{}_{\beta}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 7.16. Jeśli symetryczny tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ ma wartości własne $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ takie, że $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to podprzestrzenie N_{λ_1} i N_{λ_2} są ortogonalne.

Dowód. Weźmy dowolne wektory własne $\underset{\sim}{a}_1 \in N_{\lambda_1}$ i $\underset{\sim}{a}_2 \in N_{\lambda_2}$. Wtedy mamy

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a}_1 = \lambda_1 \underset{\sim}{a}_1, \qquad \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a}_2 = \lambda_2 \underset{\sim}{a}_2$$

Z własności iloczynu skalarnego wektorów (prostego nasunięcia) i symetrii tensora $\underset{\sim}{A}$ kolejno otrzymamy

$$\lambda_1(\underset{\sim}{a}_1\underset{\sim}{a}_2) = (\lambda_1\underset{\sim}{a}_1)\underset{\sim}{a}_2 = (\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a}_1)\underset{\sim}{a}_2 = (\underset{\sim}{a}_1\underset{\sim}{A}^T)\underset{\sim}{a}_2 = (\underset{\sim}{a}_1\underset{\sim}{A})\underset{\sim}{a}_2 =$$

$$= \underset{\sim}{a}_1(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a}_2) = \underset{\sim}{a}_1(\lambda_2\underset{\sim}{a}_2) = \lambda_2(\underset{\sim}{a}_1\underset{\sim}{a}_2)$$

Stąd dostaniemy

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\underset{\sim}{a}_1\underset{\sim}{a}_2) = 0$$

Ponieważ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, to $\underset{\sim}{a}_1\underset{\sim}{a}_2 = 0$, co oznacza, że dowolne wektory z podprzestrzeni N_{λ_1} i N_{λ_2} są ortogonalne. Zatem podprzestrzenie N_{λ_1} i N_{λ_2} są ortogonalne.

Powyższe twierdzenie można uogólnić na przypadek gdy tensor symetryczny ma skończoną liczbę różnych wartości własnych.

Ponadto stąd i z twierdzenia o rozkładzie widmowym wynika:

Wniosek 7.2 (o rozkładzie widmowym tensora symetrycznego). Niech $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$. Tensor symetryczny $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ ma dokładnie n wartości własnych $\lambda_i \in R$ dla $i = 1,\dots,n$, i wersorów własnych $\underset{\sim}{i}_i \in N_{\lambda_i}$ dla $i = 1,\dots,n$ tworzących bazę przestrzeni E^n. Ponadto tensor $\underset{\sim}{A}$ daje się przedstawić w postaci widmowej:

$$\underset{\sim}{A} = \lambda_1 \underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_1 + \lambda_2 \underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_2 + \ldots + \lambda_n \underset{\sim}{i}_n \otimes \underset{\sim}{i}_n$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że dla każdego tensora symetrycznego $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$ istnieje baza ortonormalna $\{\underset{\sim}{i}_i\}$ przestrzeni E^n taka, że reprezentacja $[A^{ij}]$ tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{i}_i \otimes \underset{\sim}{i}_j\}$ jest macierzą diagonalną o postaci

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

P r z y k ł a d 7.6. Niech tensor symetryczny $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację:

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

oraz dana jest dodatnio określona macierz przejścia

$$[g_{ij}] = [\underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}_j] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a stąd} \quad [g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Znajdziemy rozkład widmowy tensora $\underset{\sim}{A}$.

Szukamy wartości własnych i wektorów własnych tensora $\underset{\sim}{A}$, a więc liczb $\lambda \in R$ i wektorów niezerowych $\underset{\sim}{a} \in E^3$, spełniających równanie

$$(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{1})\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$$

Podstawiając $\underset{\sim}{A} = A^{ij} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$ i $\underset{\sim}{a} = a_k \underset{\sim}{e}^k$ do powyższego równania otrzymamy

$$(A^{ij} - \lambda g^{ij}) a_j \underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{0}$$

Równanie to jest równoważne układowi równań skalarnych

$$(A^{ij} - \lambda g^{ij})a_j = 0 \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3$$

lub równaniu macierzowemu

$$\left[A^{ij} - \lambda g^{ij}\right]\left[a_j\right] = 0$$

Rozpisując powyższe równanie otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} A^{11} - \lambda g^{11} & A^{12} - \lambda g^{12} & A^{13} - \lambda g^{13} \\ A^{21} - \lambda g^{21} & A^{22} - \lambda g^{22} & A^{23} - \lambda g^{23} \\ A^{31} - \lambda g^{31} & A^{32} - \lambda g^{32} & A^{33} - \lambda g^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a następnie podstawiając dane wartości mamy

$$\begin{bmatrix} 3 - 2\lambda & -2 + \lambda & 1 - \lambda \\ -2 + \lambda & 2 - \lambda & 0 \\ 1 - \lambda & 0 & 2 - 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Równanie to ma niezerowe rozwiązanie, tzn. $[a_i] \neq [0]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det \begin{bmatrix} 3 - 2\lambda & -2 + \lambda & 1 - \lambda \\ -2 + \lambda & 2 - \lambda & 0 \\ 1 - \lambda & 0 & 2 - 2\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Stąd mamy $-(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$. Zatem liczby $\lambda = 1$ lub $\lambda = 2$ są wartościami własnymi tensora $\underset{\sim}{A}$. Współrzędne wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $\lambda = 1$ otrzymamy rozwiązując równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = t \\ a_2 = t \quad \text{dla } t,s \in R \\ a_3 = s \end{cases}$$

Zatem $N_{\lambda=1} = \{\underset{\sim}{a} \in E^3 : \underset{\sim}{a} = t\underset{\sim}{e}^1 + t\underset{\sim}{e}^2 + s\underset{\sim}{e}^3 \text{ dla } t,s \in R\}$, a stąd $\dim N_{\lambda=1} = 2$.

Współrzędne wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $\lambda = 2$ otrzymamy rozwiązując równanie

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -a_1 - a_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ -a_1 - 2a_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = r \text{ dla } r \in R \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Zatem $N_{\lambda=2} = \{\underset{\sim}{a} \in E^3 : \underset{\sim}{a} = r\underset{\sim}{e}^2 \text{ dla } r \in R\}$, a stąd $\dim N_{\lambda=2} = 1$.

Szukamy bazy ortogonalnej $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ przestrzeni E^3 złożonej z wektorów własnych tensora $\underset{\sim}{A}$. Z podprzestrzeni dwuwymiarowej $N_{\lambda=1}$ wybieramy dwa wektory ortogonalne $\underset{\sim}{d}_1$, $\underset{\sim}{d}_2$, a z podprzestrzeni jednowymiarowej $N_{\lambda=2}$ wybieramy wektor $\underset{\sim}{d}_3$. Przyjmijmy wektor $\underset{\sim}{d}_1 = \underset{\sim}{e}^3$ i poszukajmy w przestrzeni $N_{\lambda=1}$ podprzestrzeni złożonej z wektorów ortogonalnych do wektora $\underset{\sim}{d}_1$:

$$(t\underset{\sim}{e}^1 + t\underset{\sim}{e}^2 + s\underset{\sim}{e}^3)\underset{\sim}{e}^3 = 0$$

Stąd $tg^{13} + tg^{23} + sg^{33} = 0$, więc $t\cdot 1 + t\cdot 0 + s\cdot 2 = 0$, zatem $t = -2s$.

Podprzestrzeń wektorów ortogonalnych do wektora $\underset{\sim}{d}_1$ jest więc zbiorem wektorów postaci $\{\underset{\sim}{a} \in N_{\lambda=1} : \underset{\sim}{a} = -2s\underset{\sim}{e}^1 - 2s\underset{\sim}{e}^2 + s\underset{\sim}{e}^3 \text{ dla } s \in R\}$. Z tej podprzestrzeni wybieramy wektor $\underset{\sim}{d}_2 := -2\underset{\sim}{e}^1 - 2\underset{\sim}{e}^2 + \underset{\sim}{e}^3$. Wektor $\underset{\sim}{d}_3 = \underset{\sim}{e}^2$ wybieramy z podprzestrzeni $N_{\lambda=2}$. Zatem mamy

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}_1 = \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{d}_2 = -2\underset{\sim}{e}^1 - 2\underset{\sim}{e}^2 + \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{d}_3 = \underset{\sim}{e}^2 \end{cases}$$

Wektory $\underset{\sim}{d}_\alpha$ dla $\alpha = 1,2,3$ są wektorami własnymi tensora $\underset{\sim}{A}$ i tworzą bazę ortogonalną przestrzeni E^3. Dokonajmy ortonormalizacji tej bazy:

$$\underset{\sim}{n}_1 = \frac{\underset{\sim}{d}_1}{\|\underset{\sim}{d}_1\|} = \frac{\underset{\sim}{e}^3}{\sqrt{\underset{\sim}{e}^3\underset{\sim}{e}^3}} = \frac{\underset{\sim}{e}^3}{\sqrt{g^{33}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\sim}{e}^3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\underset{\sim}{e}^3$$

$$\underset{\sim}{n}_2 = \frac{\underset{\sim}{d}_2}{\|\underset{\sim}{d}_2\|} = \frac{-2\underset{\sim}{e}^1 - 2\underset{\sim}{e}^2 + \underset{\sim}{e}^3}{\sqrt{(-2\underset{\sim}{e}^1 - 2\underset{\sim}{e}^2 + \underset{\sim}{e}^3)(-2\underset{\sim}{e}^1 - 2\underset{\sim}{e}^2 + \underset{\sim}{e}^3)}} =$$

$$= \frac{-2\underset{\sim}{e}^1 - 2\underset{\sim}{e}^2 + \underset{\sim}{e}^3}{\sqrt{4g^{11} + 4g^{22} + g^{33} + 8g^{12} - 4g^{13} - 4g^{23}}} =$$

$$= -\sqrt{2}\underset{\sim}{e}^1 - \sqrt{2}\underset{\sim}{e}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\sim}{e}^3$$

$$\underset{\sim}{n}_3 = \frac{\underset{\sim}{d}_3}{\|\underset{\sim}{d}_3\|} = \frac{\underset{\sim}{e}^2}{\sqrt{\underset{\sim}{e}^2\underset{\sim}{e}^2}} = \frac{\underset{\sim}{e}^2}{\sqrt{g^{22}}} = \underset{\sim}{e}^2$$

Wektory $\underset{\sim}{n}_\alpha$ dla $\alpha = 1,2,3$ są wektorami własnymi tensora $\underset{\sim}{A}$ i tworzą bazę ortonormalną przestrzeni E^3. Z wniosku 7.2 wynika, że tensor $\underset{\sim}{A}$ można przedstawić w postaci widmowej:

$$\underset{\sim}{A} = 1\underset{\sim}{n}_1 \otimes \underset{\sim}{n}_1 + 1\underset{\sim}{n}_2 \otimes \underset{\sim}{n}_2 + 2\underset{\sim}{n}_3 \otimes \underset{\sim}{n}_3$$

co oznacza, że reprezentacja $[A^{\alpha\beta}]$ tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{n}_\alpha \otimes \underset{\sim}{n}_\beta\}$ jest macierzą diagonalną o postaci

$$[A^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie. Korzystając ze wzoru transformacyjnego otrzymamy $A^{\alpha\beta} = A^{ij} g^\alpha_i g^\beta_j$ dla $\alpha, \beta = 1,2,3$ lub macierzowo $[A^{\alpha\beta}] = [g^\alpha{}_i][A^{ij}][g_j{}^\beta]$, zatem należy znaleźć macierze $[g^\alpha{}_i]$ i $[g_j{}^\beta]$. Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{n}_\alpha\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ dana jest w postaci

$$\underset{\sim}{n}_\alpha = g_{i\alpha}\underset{\sim}{e}^i \quad \text{dla} \quad \alpha = 1,2,3$$

więc $\left[g_{i\alpha}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$, a stąd $\left[g^{\alpha i}\right] = \left[g_{i\alpha}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Korzystając ze wzorów podanych w twierdzeniu 3.5 mamy $g^{\alpha}_{i} = g^{\alpha j} g_{ji}$ dla $\alpha = 1,2,3$ lub macierzowo $\left[g^{\alpha}{}_{i}\right] = \left[g^{\alpha j}\right]\left[g_{ji}\right]$,

$$\text{stąd } \left[g^{\alpha}{}_{i}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\left[A^{\alpha\beta}\right] = \left[g^{\alpha}{}_{i}\right]\left[A^{ij}\right]\left[g^{\beta}{}_{j}\right]^{T} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7.5. Tensory ortogonalne. Rozkład biegunowy tensora

Definicja 7.11. Tensor $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy ortogonalnym, jeśli spełnia warunki: $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1}$.

Jak wiadomo, zbiór tensorów ortogonalnych $\vartheta = \left\{ \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{T}_2 : \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1} \right\}$ z działaniem prostego nasunięcia jest grupą. Łatwo zauważyć, że dla tensora ortogonalnego $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ istnieje tensor odwrotny $\overset{-1}{\underset{\sim}{Q}} = \underset{\sim}{Q}^T$ oraz $\det \underset{\sim}{Q} = 1$ lub $\det \underset{\sim}{Q} = -1$. Tensor ortogonalny $\underset{\sim}{Q}$ traktowany jako odwzorowanie liniowe $\underset{\sim}{Q} : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$ jest izomorfizmem ortogonalnym w przestrzeni $\mathcal{T}_1$, co oznacza, że zachowuje długości wektorów i kąty między wektorami (przykład 6.9).

W przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$ nad przestrzenią euklidesową E^3 tensor ortogonalny $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ ma co najmniej jedną wartość własną