ELEMENTY ALGEBRY

1. PRZESTRZENIE LINIOWE

1.1. Definicja i własności przestrzeni liniowej

Zakładamy, że czytelnik zna pojęcia grupy, pierścienia i ciała. W skrypcie przez ciało rozumieć zawsze będziemy ciało liczb rzeczywistych R lub ciało liczb zespolonych C. Tak więc mówiąc o ciele K mamy zawsze na myśli K = R lub K = C.

Definicja 1.1. Niech $(K,+,\cdot)$ będzie ciałem, V - niepustym zbiorem, a $\oplus : V \times V \to V$ i $\odot : K \times V \to V$ odpowiednio działaniem wewnętrznym (dodawaniem) i zewnętrznym (mnożeniem) w zbiorze V. Strukturę $(V,K,\oplus,\odot)$ nazywamy przestrzenią liniową lub wektorową (nad ciałem K), jeśli spełnione są aksjomaty:

1) $\bigwedge_{a,b,c \in V} (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ łączność dodawania

2) $\bigwedge_{a\,b \in V} a \oplus b = b \oplus a$ przemienność dodawania

3) $\bigvee_{0 \in V} \bigwedge_{a \in V} a \oplus 0 = a$ istnienie elementu zerowego

4) $\bigwedge_{a \in V} \bigvee_{-a \in V} a \oplus (\ominus a) = 0$ istnienie elementu przeciwnego

5) $\bigwedge_{a \in V} 1 \odot a = a$ gdzie $1 \in K$

6) $\bigwedge_{\alpha,\beta \in K} \bigwedge_{a \in V} (\alpha \cdot \beta) \odot a = \alpha \odot (\beta \odot a)$ łączność mnożenia

$\bigwedge \bigwedge (\alpha + \beta) \odot a = \alpha \odot a \oplus \beta \odot a$

$\bigwedge \bigwedge (a \oplus b) \odot \alpha = a \odot \alpha \oplus b \odot \alpha$

7) $\bigwedge_{\alpha \in K} \bigwedge_{a,b \in V} \alpha \odot (a \oplus b) = \alpha \odot a \oplus \alpha \odot b$ pierwsze prawo rozdzielności

8) $\bigwedge_{\alpha,\beta \in K} \bigwedge_{a \in V} (\alpha + \beta) \odot a = \alpha \odot a \oplus \beta \odot a$ drugie prawo rozdzielności.

Elementy zbioru V nazywamy wektorami, a elementy ciała K nazywamy skalarami. Wektor $0 \in V$ nazywamy wektorem zerowym, a wektor $\ominus a \in V$ nazywamy wektorem przeciwnym do wektora $a \in V$.

Z aksjomatów 1-4 przestrzeni liniowej wynika, że struktura $(V, \oplus)$ jest grupą abelową. Stąd wnioskujemy, że w przestrzeni liniowej istnieje dokładnie jeden wektor zerowy i do każdego wektora przestrzeni liniowej istnieje dokładnie jeden wektor przeciwny.

Aby uprościć zapis, działania na skalarach i wektorach będziemy w dalszym ciągu oznaczać tymi samymi symbolami, tzn. przez "+" i "·". Jeśli nie ma obawy dwuznaczności, przestrzeń liniową $(V,K,+,\cdot)$ będziemy oznaczać krótko przez V i nazywać przestrzenią liniową nad ciałem K.

Ustalimy teraz proste własności przestrzeni liniowych, które wynikają bezpośrednio z definicji:

<u>Twierdzenie</u> 1.1. Niech $(V,K,+,\cdot)$ będzie przestrzenią liniową. Wtedy:

1) $\bigwedge_{\alpha \in K} \alpha \cdot 0 = 0$ gdzie 0 jest wektorem zerowym

2) $\bigwedge_{a \in V} \theta \cdot a = 0$ gdzie θ jest skalarem zerowym

3) $\bigwedge_{a \in V} (-1) \cdot a = -a$ gdzie -1 jest elementem przeciwnym do skalara jednostkowego

4) $\bigwedge_{\alpha \in K} \bigwedge_{a \in V} \alpha \cdot a = 0 \Rightarrow \alpha = \theta \vee a = 0.$

P r z y k ł a d 1.1. Niech $\mathcal{F}(\Omega;K)$ oznacza zbiór wszystkich funkcji określonych na niepustym zbiorze Ω o wartościach w ciele K. W zbiorze $\mathcal{F}(\Omega;K)$ wprowadzamy działania dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez skalar określone następująco:

$$\bigwedge_{f,g\in\mathcal{F}(\Omega;K)} (f+g)(x) := f(x)+g(x)$$
$$\bigwedge_{\alpha\in K}\ \bigwedge_{f\in\mathcal{F}(\Omega;K)} (\alpha\cdot f)(x) := \alpha f(x) \qquad \text{dla } x\in\Omega$$

Wykażemy, że układ $(\mathcal{F}(\Omega;K),K,+,\cdot)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K.

Z definicji działań wynika, że dla dowolnych funkcji $f,g\in\mathcal{F}(\Omega;K)$ i dowolnego skalara $\alpha\in K$, funkcje $f+g$, $\alpha\cdot f\in\mathcal{F}(\Omega;K)$. Zatem dodawanie funkcji jest działaniem wewnętrznym, a mnożenie funkcji przez skalar działaniem zewnętrznym w zbiorze $\mathcal{F}(\Omega;K)$. Wystarczy więc sprawdzić aksjomaty przestrzeni liniowej:

1) dla dowolnych funkcji $f,g,h\in\mathcal{F}(\Omega;K)$ mamy

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x) =$$
$$= f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) = (f+(g+h))(x) \qquad \text{dla } x\in\Omega.$$

Stąd $(f+g)+h = f+(g+h)$, więc dodawanie funkcji jest łączne.

2) dla dowolnych funkcji $f,g\in\mathcal{F}(\Omega;K)$ mamy

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = (g+f)(x) \quad \text{dla } x\in\Omega$$

Stąd $f+g=g+f$, więc dodawanie funkcji jest przemienne.

3) istnieje funkcja $0\in\mathcal{F}(\Omega;K)$ określona następująco: $0(x)=0$ dla $x\in\Omega$, taka, że dla dowolnej funkcji $f\in\mathcal{F}(\Omega;K)$ mamy

$$(f+0)(x) = f(x)+0(x) = f(x)+0 = f(x) \quad \text{dla } x\in\Omega$$

Stąd $f+0=f$, więc funkcja 0 jest elementem zerowym.

4) dla dowolnej funkcji $f\in\mathcal{F}(\Omega;K)$ istnieje funkcja $-f\in\mathcal{F}(\Omega;K)$ określona następująco: $(-f)(x) := -f(x)$ dla $x\in\Omega$, taka, że

$$(f+(-f))(x) = f(x)+(-f)(x) = f(x)+(-f(x)) = 0 = 0(x) \quad \text{dla } x\in\Omega$$

Stąd $f+(-f)=0$, więc funkcja $-f$ jest elementem przeciwnym do funkcji f.

5) dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}(\Omega;K)$ mamy

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x) \quad \text{dla} \quad x \in \Omega$$

Stąd $1 \cdot f = f$.

6) dla dowolnych skalarów $\alpha, \beta \in K$ i dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}(\Omega;K)$ mamy

$$((\alpha\beta) \cdot f)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha(\beta f(x)) = \alpha(\beta \cdot f)(x) =$$
$$= (\alpha \cdot (\beta \cdot f))(x) \quad \text{dla} \quad x \in \Omega$$

Stąd $(\alpha\beta) \cdot f = \alpha \cdot (\beta \cdot f)$, więc mnożenie jest łączne.

7) dla dowolnego skalara $\alpha \in K$ i dowolnych funkcji $f, g \in \mathcal{F}(\Omega;K)$ mamy

$$(\alpha \cdot (f + g))(x) = \alpha(f + g)(x) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) =$$
$$= (\alpha \cdot f)(x) + (\alpha \cdot g)(x) = (\alpha \cdot f + \alpha \cdot g)(x) \quad \text{dla} \quad x \in \Omega$$

Stąd $\alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$, więc mnożenie jest rozdzielne względem dodawania funkcji.

8) dla dowolnych skalarów $\alpha, \beta \in K$ i dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}(\Omega;K)$ mamy

$$((\alpha + \beta) \cdot f)(x) = (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha \cdot f)(x) +$$
$$+ (\beta \cdot f)(x) = (\alpha \cdot f + \beta \cdot f)(x) \quad \text{dla} \quad x \in \Omega$$

Stąd $(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$, więc mnożenie jest rozdzielne względem dodawania skalarów.

Aksjomaty definicji 1.1 są spełnione, zatem struktura $(\mathcal{F}(\Omega;K), K, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Przestrzeń tę nazywamy przestrzenią liniową funkcji ze zbioru Ω w ciało K.

P r z y k ł a d 1.2. Niech K^n będzie zbiorem wszystkich ciągów n-wyrazowych nad ciałem K. W zbiorze K^n wprowadźmy działania dodawania ciągów i mnożenia ciągu przez skalar określone następująco:

$$\bigwedge_{a,b \in K^n} a + b = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] + [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] :=$$
$$:= [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n]$$

$$\bigwedge_{\gamma \in K} \bigwedge_{a \in K^n} \gamma \cdot a = \gamma \cdot [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] := [\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n]$$

Wykażemy, że układ $(K^n, K, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K.

Z definicji działań wynika, że dla dowolnych ciągów $a, b \in K^n$ i dowolnego skalara $\alpha \in K$ ciągi $a + b$, $\alpha \cdot a \in K^n$. Zatem dodawanie ciągów jest działaniem wewnętrznym, a mnożenie ciągu przez skalar - działaniem zewnętrznym w zbiorze K^n. Wystarczy więc sprawdzić aksjomaty przestrzeni liniowej:

1) dla dowolnych ciągów $a, b, c \in K^n$ mamy

$$(a + b) + c = ([\alpha_1, \ldots, \alpha_n] + [\beta_1, \ldots, \beta_n]) + [\gamma_1, \ldots, \gamma_n] =$$

$$= [\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n] + [\gamma_1, \ldots, \gamma_n] = [\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n + \gamma_n] =$$

$$= [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] + [\beta_1 + \gamma_1, \ldots, \beta_n + \gamma_n] = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] +$$

$$+ ([\beta_1, \ldots, \beta_n] + [\gamma_1, \ldots, \gamma_n]) = a + (b + c)$$

więc dodawanie ciągów jest łączne.

2) dla dowolnych ciągów $a, b \in K^n$ mamy

$$a + b = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] + [\beta_1, \ldots, \beta_n] = [\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n] =$$

$$= [\beta_1 + \alpha_1, \ldots, \beta_n + \alpha_n] = [\beta_1, \ldots, \beta_n] + [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = b + a$$

więc dodawanie ciągów jest przemienne.

3) istnieje ciąg $0 = [0, \ldots, 0] \in K^n$ taki, że dla dowolnego ciągu $a \in K^n$ mamy

$$a + 0 = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] + [0, \ldots, 0] = [\alpha_1 + 0, \ldots, \alpha_n + 0] =$$

$$= [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = a$$

więc ciąg 0 jest elementem zerowym.

4) dla dowolnego ciągu $a = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \in K^n$ istnieje ciąg $-a = [-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n] \in K^n$ taki, że

$$a + (-a) = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] + [-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n] = [\alpha_1 - \alpha_1, \ldots, \alpha_n - \alpha_n] =$$

$$= [0, \ldots, 0] = 0,$$

więc ciąg $-a$ jest elementem przeciwnym do ciągu a.

5) dla dowolnego ciągu $a \in K^n$ mamy

$$1 \cdot a = 1 \cdot [\alpha_1,\dots,\alpha_n] = [1\alpha_1,\dots,1\alpha_n] = [\alpha_1,\dots,\alpha_n] = a$$

6) dla dowolnych skalarów $\gamma, \delta \in K$ i dowolnego ciągu $a \in K^n$ mamy

$$(\gamma\delta) \cdot a = (\gamma\delta) \cdot [\alpha_1,\dots,\alpha_n] = [\gamma\delta\alpha_1,\dots,\gamma\delta\alpha_n] =$$

$$= \gamma \cdot [\delta\alpha_1,\dots,\delta\alpha_n] = \gamma \cdot (\delta \cdot [\alpha_1,\dots,\alpha_n]) = \gamma \cdot (\delta \cdot a)$$

więc mnożenie jest łączne.

7) dla dowolnego skalara $\gamma \in K$ i dowolnych ciągów $a,b \in K^n$ mamy

$$\gamma \cdot (a + b) = \gamma \cdot ([\alpha_1,\dots,\alpha_n] + [\beta_1,\dots,\beta_n]) =$$

$$= \gamma \cdot [\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_n+\beta_n] =$$

$$= [\gamma(\alpha_1+\beta_1),\dots,\gamma(\alpha_n+\beta_n)] = [\gamma\alpha_1+\gamma\beta_1,\dots,\gamma\alpha_n+\gamma\beta_n] =$$

$$= [\gamma\alpha_1,\dots,\gamma\alpha_n] + [\gamma\beta_1,\dots,\gamma\beta_n] =$$

$$= \gamma \cdot [\alpha_1,\dots,\alpha_n] + \gamma \cdot [\beta_1,\dots,\beta_n] = \gamma \cdot a + \gamma \cdot b$$

więc pierwsze prawo rozdzielności jest spełnione.

8) dla dowolnych skalarów $\beta, \gamma \in K$ i dowolnego ciągu $a \in K^n$ mamy

$$(\beta+\gamma) \cdot a = (\beta+\gamma) \cdot [\alpha_1,\dots,\alpha_n] = [(\beta+\gamma)\alpha_1,\dots,(\beta+\gamma)\alpha_n] =$$

$$= [\beta\alpha_1+\gamma\alpha_1,\dots,\beta\alpha_n+\gamma\alpha_n] = [\beta\alpha_1,\dots,\beta\alpha_n] +$$

$$+ [\gamma\alpha_1,\dots,\gamma\alpha_n] = \beta \cdot [\alpha_1,\dots,\alpha_n] + \gamma \cdot [\alpha_1,\dots,\alpha_n] = \beta \cdot a + \gamma \cdot a$$

więc drugie prawo rozdzielczości jest spełnione.

Aksjomaty definicji 1.1 są spełnione, zatem struktura $(K^n,K,+,\cdot)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Przestrzeń tą nazywamy przestrzenią liniową ciągów n-wyrazowych nad ciałem K.

P r z y k ł a d 1.3. Niech $K^{m\times n}$ będzie zbiorem wszystkich macierzy o wymiarach $m\times n$ nad ciałem K. W zbiorze $K^{m\times n}$ wprowadźmy działania dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalary następująco:

$$\bigwedge_{A,B\in K^{m\times n}} \quad A + B = [\alpha_{ij}] + [\beta_{ij}] := [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]$$

$$\bigwedge_{\gamma\in K} \quad \bigwedge_{A\in K^{m\times n}} \quad \gamma\cdot A = \gamma\cdot[\alpha_{ij}] := [\gamma\alpha_{ij}]$$

Można udowodnić podobnie jak w przykładzie 1.2, że układ $(K^{m\times n},K,+,\cdot)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Przestrzeń tę nazywamy przestrzenią liniową macierzy $m\times n$ wymiarowych nad ciałem K.

1.2. Definicja i własności podprzestrzeni liniowej

Definicja 1.2. Niech $(V,K,+,\cdot)$ będzie przestrzenią liniową, a V_0 niepustym podzbiorem zbioru V. Jeśli układ $(V_0,K,+,\cdot)$ jest przestrzenią liniową, to nazywamy go podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $(V,K,+,\cdot)$.

Badanie czy pewien układ jest podprzestrzenią liniową danej przestrzeni liniowej z definicji jest pracochłonne, ponieważ należy sprawdzić, czy spełnia on aksjomaty przestrzeni liniowej. Wygodniej jest korzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 1.2. Niech $(V,K,+,\cdot)$ będzie przestrzenią liniową, a V_0 niepustym podzbiorem zbioru V. Układ $(V_0,K,+,\cdot)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $(V,K,+,\cdot)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

1) $\bigwedge_{a,b\in V} \quad a + b \in V_0$

2) $\bigwedge_{\alpha\in K} \quad \bigwedge_{a\in V} \quad \alpha\cdot a \in V_0$

Dowód pomijamy.