W przypadku gdy odwzorowanie $f : U^m \times V^n \to K$ jest formą dwuliniową, to macierz $[f_{iA}] \in K^{m\times n}$ taka, że $f_{iA} = f(e_i, l_A)$ dla $i = 1,\dots,m$; $A = 1,\dots,n$ jest reprezentacją macierzową tej formy dwuliniowej w bazach $\{e_i\}$ i $\{l_A\}$. Podobnie określamy reprezentację dla formy wieloliniowej.

P r z y k ł a d 2.8. Niech R^2 będzie przestrzenią liniową ciągów 2-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych, a $R_2[x]$ przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej drugiego nad ciałem liczb rzeczywistych. Znajdziemy reprezentację formy dwuliniowej $f : R^2 \times R_2[x] \to R$ określonej następująco:

$$f([\alpha_1,\alpha_2],\ \omega_0+\omega_1 x+\omega x^2) := (\alpha_1-\alpha_2)(\omega_0-\omega_1+2\omega_2)$$

w bazach standardowych $\{e_i\}$ przestrzeni R^2 i $\{l_A\}$ przestrzeni $R_2[x]$, gdzie $e_1 = [1,0]$, $e_2 = [0,1]$ oraz $l_1 = 1$, $l_2 = x$, $l_3 = x^2$.

Z definicji reprezentacji macierzowej formy dwuliniowej wynika, że

$$f_{iA} = f(e_i, l_A) \quad \text{dla} \quad i = 1,2;\ A = 1,2,3$$

Zatem mamy

$$[f_{iA}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2.3. Zadania

Zadanie 2.1. Niech R^3 będzie przestrzenią liniową ciągów 3-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych, a $R_1[x]$ przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej pierwszego nad ciałem liczb rzeczywistych. Zbadać, które z odwzorowań $f_i : R^3 \to R_1[x]$ dla $i = 1,2,3$ są liniowe:

a) $f_1([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) := (\alpha_1 - 2\alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_1 + \alpha_2)x$

b) $f_2([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) := (\alpha_1 + 1) + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)x$

c) $f_3([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) := (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1^2 - \alpha_3)x$

Dla odwzorowania liniowego znaleźć reprezentację w bazach: $\{e_i\}$ przestrzeni R^3 takiej, że $e_1 = [1,1,1]$, $e_2 = [1,1,0]$, $e_3 = [1,0,0]$, i $\{l_A\}$ przestrzeni $R_1[x]$ takiej, że $l_1 = 1 + x$, $l_2 = 2 + x$.

Zadanie 2.2. Niech R^3 będzie przestrzenią liniową ciągów 3-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych. Zbadać, które z odwzorowań $f_i : R^3 \longrightarrow R^3$ dla $i = 1,2,3$ są liniowe

a) $f_1([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) := [\alpha_1 + 2\alpha_2, 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2 - 5\alpha_1]$

b) $f_2([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) := [\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2 + 1]$

c) $f_3([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) := [2\alpha_1, 3\alpha_2, 4\alpha_3]$

Dla odwzorowania liniowego znaleźć jego reprezentację w bazie $\{e_i\}$ przestrzeni R^3, jeśli $e_1 = [2,1,-1]$, $e_2 = [-1,0,1]$, $e_3 = [1,-1,0]$.

Zadanie 2.3. Niech R^3 i R^4 będą przestrzeniami liniowymi ciągów 3- i 4-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych. Znaleźć odwzorowanie liniowe $g : R^3 \longrightarrow R^4$, jeśli

$$g([1,0,0]) = [1,-3,2,4]$$
$$g([0,1,0]) = [5,-3,0,2]$$
$$g([0,0,1]) = [-2,0,1,1]$$

Zadanie 2.4. Niech R^2 będzie przestrzenią liniową ciągów 2-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych, a $R_1[x]$ przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej pierwszego nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykazać, że forma $g : R^2 \times R_1[x] \longrightarrow R$ określona następująco:

$$g([\alpha_1,\alpha_2], \omega_0+\omega_1 x) := \alpha_1\omega_0 + (\alpha_1-\alpha_2)\omega_1$$

jest dwuliniowa. Znaleźć reprezentację tej formy w bazach $\{e_i\}$ przestrzeni R^2 i $\{l_A\}$ przestrzeni $R_1[x]$, jeśli $e_1 = [-1,1]$, $e_2 = [1,1]$ oraz $l_1 = 1 + x$, $l_2 = x$.