mi, gdzie $D_f \subset \mathcal{T}_p$, $D_g \subset \mathcal{T}_q$. Wtedy dla funkcji złożonej $g \circ f : D_f \longrightarrow \mathcal{T}_r$ zachodzi inkluzja $\vartheta_f \cap \vartheta_g \subset \vartheta_{g \circ f}$.

Dowód. Niech tensor $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta_f \cap \vartheta_g$. Wtedy dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in D_f$ mamy

$$\underset{\sim}{Q} * (g \circ f)(A) = \underset{\sim}{Q} * g(f(\underset{\sim}{A})) = g(\underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{A})) = g(f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = g(f(\underset{\sim}{A})) =$$

$$= (g \circ f)(\underset{\sim}{A})$$

skąd $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta_{g \circ f}$. Zatem $\vartheta_f \cap \vartheta_g \subset \vartheta_{g \circ f}$.

8.4. Niezmienniki ortogonalne tensora

Definicja 8.9. Niech $\mathcal{T}_p$ będzie przestrzenią tensorową. Niezmiennikiem ortogonalnym w zbiorze tensorów $D \subset \mathcal{T}_p$ nazywamy dowolną funkcję $\varphi : D \longrightarrow R$ izotropową, tzn. spełniającą warunek

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{Q} \in \vartheta} \; \bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in D} \varphi(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = \varphi(\underset{\sim}{A})$$

P r z y k ł a d 8.17. Wykażemy, że funkcja $\varphi : \mathcal{T}_1 \longrightarrow R$ określona następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1} \varphi(\underset{\sim}{a}) := \|\underset{\sim}{a}\|$$

jest niezmiennikiem ortogonalnym w przestrzeni wektorowej $\mathcal{T}_1$. Ponieważ dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ i dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$ mamy

$$\varphi(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{a}) = \varphi(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) = \|\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}\| = \|\underset{\sim}{a}\| = \varphi(\underset{\sim}{a})$$

więc funkcja φ jest izotropowa. Zatem funkcja φ jest niezmiennikiem ortogonalnym w przestrzeni $\mathcal{T}_1$.

P r z y k ł a d 8.18. Wykażemy, że funkcje I, II, III : $\mathcal{T}_2 \longrightarrow R$ określone następująco:

$$I(\underset{\sim}{A}) := I_{\underset{\sim}{A}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{A}$$

$$II(\underset{\sim}{A}) := II_{\underset{\sim}{A}} = \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \underset{\sim}{A}^2 - (\operatorname{tr} \underset{\sim}{A})^2) \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$$

$$III(\underset{\sim}{A}) := III_{\underset{\sim}{A}} = \det \underset{\sim}{A}$$

są niezmiennikami ortogonalnymi w przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$. Ponieważ dla dowolnego tensora ortogonalnego $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ i dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ mamy

$$I(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = \operatorname{tr}(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = \operatorname{tr}(\underset{\sim}{Q} * (A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j)) = \operatorname{tr}(A^i{}_j (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_i) \otimes (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}^j)) =$$

$$= A^i{}_j (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_i)(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}^j) = A^i{}_j (\underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}^j) = \operatorname{tr}(A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j) = \operatorname{tr} \underset{\sim}{A} = I(\underset{\sim}{A})$$

$$II(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A})^2 - (\operatorname{tr} \underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A})^2) = \frac{1}{2} (\operatorname{tr} \underset{\sim}{A}^2 - (\operatorname{tr} \underset{\sim}{A})^2) = II(\underset{\sim}{A})$$

$$III(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = \det(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = \det(\underset{\sim}{Q} * (A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j)) =$$

$$= \det(A^i{}_j (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_i) \otimes (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}^j)) = \det [A^i{}_j] =$$

$$= \det(A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j) = \det \underset{\sim}{A} = III(\underset{\sim}{A})$$

a więc funkcje I, II, III są izotropowe. Zatem są niezmiennikami w przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$.

<u>Twierdzenie</u> 8.6. Funkcja $f : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$ jest izotropowa wtedy i tylko wtedy, gdy ma postać

$$\bigwedge_{a \in \mathcal{T}_1} f(\underset{\sim}{a}) = \varphi(\|a\|)\underset{\sim}{a}$$

gdzie $\varphi : R \to R$ jest funkcją rzeczywistą zmiennej rzeczywistej.

Dowód. Wykażemy tylko, że powyżej określona funkcja jest izotropowa. Ponieważ dla dowolnego tensora ortogonalnego $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ i dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$ mamy

$$\underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{a}) = \varphi(\|\underset{\sim}{a}\|)\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} = \varphi(\|\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}\|)\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} = f(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) = f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{a})$$

a więc funkcja f jest izotropowa.

Dowód tezy przeciwnej jest trudny.

Twierdzenie 8.7. Funkcja $f : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2^s$ jest izotropowa wtedy i tylko wtedy gdy ma postać

$$\bigwedge_{a \in \mathcal{T}_1} f(\underset{\sim}{a}) = \varphi(\|\underset{\sim}{a}\|)\underset{\sim}{1} + \psi(\|\underset{\sim}{a}\|)\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{a}$$

gdzie ψ, ψ : $R \to R$ są funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej.

Dowód. Ponieważ dla dowolnego tensora ortogonalnego $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ i dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$ mamy

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{a}) &= \varphi(\|\underset{\sim}{a}\|)\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{1} + \psi(\|\underset{\sim}{a}\|)\underset{\sim}{Q} * (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{a}) = \varphi(\|\underset{\sim}{a}\|)\underset{\sim}{1} + \\ &+ \psi(\|\underset{\sim}{a}\|)(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) \otimes (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) = \varphi(\|\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}\|)\underset{\sim}{1} + \\ &+ \psi(\|\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}\|)(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) \otimes (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) = f(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) = f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{a})\end{aligned}$$

a więc funkcja f jest izotropowa.

Dowód tezy przeciwnej jest trudny.

Twierdzenie 8.8. Funkcja $f : \mathcal{T}_2^s \to \mathcal{T}_2^s$ jest izotropowa wtedy i tylko wtedy, gdy ma postać

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{T}_2^s} f(\underset{\sim}{A}) = \alpha(I_{\underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{A}})\underset{\sim}{1} + \beta(I_{\underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{A}})\underset{\sim}{A} + \gamma(I_{\underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{A}})\underset{\sim}{A}^2$$

gdzie: α, β, γ : $R^3 \to R$ są funkcjami rzeczywistymi niezmienników $I_{\underset{\sim}{A}}$, $II_{\underset{\sim}{A}}$, $III_{\underset{\sim}{A}}$ tensora $\underset{\sim}{A}$.

Dowód. Ponieważ dla dowolnego tensora ortogonalnego $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ i dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2^s$ mamy

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{A}) &= \alpha(I_{\underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{A}})\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{1} + \beta(I_{\underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{A}})\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A} + \\ &+ \gamma(I_{\underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{A}})\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}^2 = \alpha(I_{\underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{A}})\underset{\sim}{1} + \\ &+ \beta(I_{\underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{A}})\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{Q}^T + \gamma(I_{\underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{A}})(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{A}^2\underset{\sim}{Q}^T) = \\ &= \alpha(I_{\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}})\underset{\sim}{1} + \beta(I_{\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}})\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A} + \\ &+ \gamma(I_{\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}}, II_{\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}}, III_{\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}})(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A})^2 = f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A})\end{aligned}$$

a więc funkcja f jest izotropowa.

Dowód tezy przeciwnej jest trudny.