P r z y k ł a d  6.9. Niech $\mathcal{T}_1$ będzie przestrzenią euklidesową, a $Q : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$ izomorfizmem ortogonalnym. Znajdziemy tensor, który wyznacza to odwzorowanie.

Z twierdzenia 6.4 wynika, że istnieje tensor $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{T}_2$ taki, że

$$\underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{a} = Q(\underset{\sim}{a}) \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$$

Tensor $\underset{\sim}{Q}$ nazywamy ortogonalnym. Znajdziemy warunek jaki powinien spełniać ten tensor. Wykażemy najpierw, że dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ i dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$ zachodzi wzór $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{A}^T$. Istotnie

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} = (A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j)\underset{\sim}{a} = A^{ij}(\underset{\sim}{e}_j\underset{\sim}{a})\underset{\sim}{e}_i = A^{ij}a_j\underset{\sim}{e}_i$$

$$\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{a}((2,1) * (A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j)) = \underset{\sim}{a}(A^{ij}\underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i) = A^{ij}(\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{e}_j)\underset{\sim}{e}_i =$$
$$= A^{ij}a_j\underset{\sim}{e}_i$$

stąd

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{A}^T$$

Ponieważ odwzorowanie Q jest ortogonalne, zatem

$$(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a})(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b} \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathcal{T}_1$$

stąd

$$\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{b} \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathcal{T}_1$$

Ostatnia równość zachodzi dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathcal{T}_1$, więc $\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1}$.

## 6.4. Zadania

Zadanie 6.1. Niech między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ przestrzeni euklidesowej $E^3$ zachodzą zależności:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = -\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = \underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = -\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 - 2\underset{\sim}{e}_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = 2\underset{\sim}{e}^1 - \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{e}_2 = \underset{\sim}{e}^2 + 2\underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{e}_3 = -\underset{\sim}{e}^1 + 2\underset{\sim}{e}^2 + 5\underset{\sim}{e}^3 \end{cases}$$

oraz będą dane tensory $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_3 = E^3 \otimes E^3 \otimes E^3$ o reprezentacjach $[A^{\alpha}{}_{ij}]$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}_{\alpha} \otimes \underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ i $[B^i{}_{jk}]$ w bazie $\{e_i \otimes e^j \otimes e^k\}$ takich, że

$$[A^1{}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [A^2{}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [A^3{}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B^1{}_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [B^2{}_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [B^3{}_{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) znaleźć reprezentację $[A^i{}_{jk}]$ tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j \otimes \underset{\sim}{e}^k\}$,
b) znaleźć tensor (reprezentację) $\underset{\sim}{A} - 2\underset{\sim}{B}$,
c) zwęzić tensor $\underset{\sim}{A}$ po wskaźnikach 2 i 3,
d) znaleźć iloczyny tensorowe tensorów $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$ oraz $\underset{\sim}{B}$ i $\underset{\sim}{A}$,
e) wykonać proste nasunięcie tensorów $\underset{\sim}{A}$ na $\underset{\sim}{B}$ i $\underset{\sim}{B}$ na $\underset{\sim}{A}$,
f) wykonać pełne nasunięcie tensorów $\underset{\sim}{A}$ na $\underset{\sim}{B}$ i $\underset{\sim}{B}$ na $\underset{\sim}{A}$.

Zadanie 6.2. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ będzie bazą i kobazą przestrzeni euklidesowej $E^3$ oraz będzie dane odwzorowanie liniowe $l : \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_1$ określone następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2} l(\underset{\sim}{A}) = l(A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) := A^{i2}\underset{\sim}{e}_i$$

Znaleźć tensor (reprezentację) $\underset{\sim}{L}$ wyznaczający to odwzorowanie.