$$\underset{\sim}{b}_2 = -11\underset{\sim}{d}_1 - 16\underset{\sim}{d}_2 + 6\underset{\sim}{d}_3 = -11[2,1,0] - 16[-1,0,0] + 6[1,2,1] =$$
$$= [0,1,6]$$

## 5.2. Iloczyn skalarny tensorów
## Związki między formami dwuliniowymi a tensorami

Niech $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{l}^A \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega\}$ będą bazami w iloczynie tensorowym $E^n \otimes E^m$. Można udowodnić, że odwzorowanie $\circ : (E^n \otimes E^m) \times \times (E^n \otimes E^m) \to R$ określone następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \in E^n \otimes E^m} \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} = (A^{i\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha) \circ (B_A^{\ \Omega}\underset{\sim}{l}^A \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega) :=$$

$$:= A^{i\alpha}B_A^{\ \Omega}(\underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{l}^A)(\underset{\sim}{d}_\alpha \circ \underset{\sim}{h}_\Omega) = A^{i\alpha}B_A^{\ \Omega}g_i^A g_{\alpha\Omega}$$

jest iloczynem skalarnym w przestrzeni liniowej $E^n \otimes E^m$.

Należy zaznaczyć, że tym samym symbolem "$\circ$" oznaczono również iloczyny skalarne w przestrzeniach euklidesowych $E^n$ i $E^m$.

<u>Wniosek</u> 5.2. Iloczyn tensorowy $E^n \otimes E^m$ przestrzeni euklidesowych $E^n$ i $E^m$ jest przestrzenią euklidesową.

Łatwo wykazać, że zachodzą wzory

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \in E^n \otimes E^m} \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} = A^{i\alpha}B_{i\alpha} = A^i_{\ \Omega}B_i^{\ \Omega} = A^A_{\ \Omega}B_A^{\ \Omega}$$

Zatem w iloczynie tensorowym przestrzeni euklidesowych iloczyn skalarny tensorów najwygodniej obliczać, gdy pierwszy tensor zapiszemy w bazie, a drugi w kobazie względem tej bazy.

P r z y k ł a d 5.3. Niech tensory $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B} \in E^2 \otimes E^3$ mają w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$ reprezentacje:

$$[A^i_{\ \alpha}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad [B^i_{\ \alpha}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Znajdziemy iloczyn skalarny tensorów $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$, jeśli dane są zależności

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = 3\underset{\sim}{e}^1 - 2\underset{\sim}{e}^2 \\ \underset{\sim}{e}_2 = -2\underset{\sim}{e}^1 + 2\underset{\sim}{e}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{d}_1 = 2\underset{\sim}{d}_1 - \underset{\sim}{d}^2 + \underset{\sim}{d}^3 \\ \underset{\sim}{d}_2 = -\underset{\sim}{d}^1 + \underset{\sim}{d}^2 \\ \underset{\sim}{d}_3 = \underset{\sim}{d}^1 + 2\underset{\sim}{d}^3 \end{cases}$$

Korzystając ze wzorów transformacyjnych podanych w twierdzeniu 5.2 znajdziemy reprezentację tensora $\underset{\sim}{B}$ w kobazie $\{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$, a więc

$$B_i^{\ \alpha} = B^j{}_\beta g_{ij} g^{\alpha\beta} \quad \text{dla} \quad i = 1,2; \ \alpha = 1,2,3$$

lub macierzowo

$$[B_i^{\ \alpha}] = [g_{ij}][B^j{}_\beta][g^{\beta\alpha}]$$

zatem należy znaleźć macierze $[g_{ij}]$ i $[g^{\alpha\beta}]$.

Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ dana jest w postaci

$$\underset{\sim}{e}_j = g_{ij}\underset{\sim}{e}^i \quad \text{dla} \quad j = 1,2, \quad \text{stąd} \quad [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ i $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ dana jest w postaci

$$\underset{\sim}{d}_\beta = g_{\alpha\beta}\underset{\sim}{d}^\alpha \quad \text{dla} \ \beta = 1,2,3, \quad \text{stąd} \quad [g_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ze wzorów podanych w twierdzeniu 3.5 mamy

$$\begin{aligned} g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} &= \delta_\alpha^{\ \beta} \\ g^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta} &= \delta^\alpha_{\ \beta} \end{aligned} \quad \text{dla } \alpha,\beta = 1,2,3 \text{ lub macierzowo} \quad \begin{aligned} [g_{\alpha\gamma}][g^{\gamma\beta}] &= [\delta_\alpha^{\ \beta}] \\ [g^{\alpha\gamma}][g_{\gamma\beta}] &= [\delta^\alpha{}_\beta] \end{aligned}$$

stąd

$$[g^{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem otrzymamy

$$[B_i{}^{\alpha}] = [g_{ij}][A^j{}_{\beta}][g^{\beta\alpha}] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Teraz łatwo już obliczyć iloczyn skalarny tensorów $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$

$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} = (A^i_{\alpha}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}) \circ (B^j{}_{\beta}\, \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}) = A^i_{\alpha} B^j{}_{\beta} g_{ij} g^{\alpha\beta} = A^i{}_{\alpha} B_i{}^{\alpha} =$$

$$= A^1{}_1 B_1{}^1 + A^1{}_2 B_1{}^2 + A^1{}_3 B_1{}^3 + A^2{}_1 B_2{}^1 + A^2{}_2 B_2{}^2 + A^2{}_3 B_2{}^3 =$$

$$= (-1)(-9) + 2(-10) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 10 + 1(-2) = -5.$$

Twierdzenie 5.3. Forma $l : E^n \times E^m \to R$ jest dwuliniowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jeden tensor $\underset{\sim}{l} \in E^n \otimes E^m$ taki, że

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{a} \in E^n} \bigwedge_{\underset{\sim}{b} \in E^m} l(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b})$$

Dowód. $\Longrightarrow$ Niech $l : E^n \times E^m \to R$ będzie odwzorowaniem dwuliniowym.

I s t n i e n i e . Weźmy dowolne bazy $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ przestrzeni euklidesowej $E^n$ i $\{\underset{\sim}{d}_{\alpha}\}$ przestrzeni euklidesowej $E^m$ oraz przyjmijmy

$$\underset{\sim}{l} := l(\underset{\sim}{e}_i, \underset{\sim}{d}_{\alpha})\, \underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}$$

Korzystając z określenia iloczynu skalarnego tensorów i dwuliniowości odwzorowania $l$, dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a} \in E^n$ i $\underset{\sim}{b} \in E^m$ mamy

$$\underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) = (l(\underset{\sim}{e}_i, \underset{\sim}{d}_{\alpha})\, \underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}) \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) = l(\underset{\sim}{e}_i, \underset{\sim}{d}_{\alpha})(\underset{\sim}{e}^i \circ \underset{\sim}{a})(\underset{\sim}{d}^{\alpha} \circ \underset{\sim}{b}) =$$

$$= l(\underset{\sim}{e}_i, \underset{\sim}{d}_{\alpha})\, a^i b^{\alpha} = l(a^i \underset{\sim}{e}_i, b^{\alpha} \underset{\sim}{d}_{\alpha}) = l(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b})$$

Zatem

$$\underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) = l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a} \in E^n \ \text{i} \ \underset{\sim}{b} \in E^m$$

Wykazaliśmy istnienie tensora $\underset{\sim}{l} \in E^n \otimes E^m$, który wyznacza odwzorowanie dwuliniowe $l$. Jednoznaczności dowodzi się podobnie jak w twierdzeniu 4.4.

$\Leftarrow$ Niech tensor $\underset{\sim}{l} \in E^n \otimes E^m$. Formę $l : E^n \times E^m \to R$ określamy następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{a} \in E^n} \ \bigwedge_{\underset{\sim}{b} \in E^m} \quad l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) := \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b})$$

Sprawdzamy aksjomaty definicji odwzorowania dwuliniowego.

1) dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{a}' \in E^n$ i $\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{b}' \in E^m$ mamy:

$$l(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a}',\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{l} \circ ((\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a}') \otimes \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a}' \otimes \underset{\sim}{b}) =$$

$$= \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) + \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a}' \otimes \underset{\sim}{b}) = l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) + l(\underset{\sim}{a}',\underset{\sim}{b})$$

$$l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{b}') = \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{b}')) = \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}') =$$

$$= \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) + \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}') = l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) + l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}')$$

2) dla dowolnej liczby $\alpha \in R$ i dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a} \in E^n$ i $\underset{\sim}{b} \in E^m$ mamy

$$l(\alpha\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{l} \circ ((\alpha\underset{\sim}{a}) \otimes \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{l} \circ (\alpha(\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b})) = \alpha\underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) = \alpha l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$$

$$l(\underset{\sim}{a},\alpha\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \alpha\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{l} \circ (\alpha(\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b})) = \alpha\underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) = \alpha l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$$

Aksjomaty definicji 2.2 są spełnione, a więc forma jest dwuliniowa.

Z powyższego twierdzenia wynika, że formę dwuliniową $l$ można utożsamiać z tensorem $\underset{\sim}{l} := l(\underset{\sim}{e}_i,\underset{\sim}{d}_\alpha)\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha$.

P r z y k ł a d 5.4. Niech tensor $\underset{\sim}{l} \in E^2 \otimes E^3$ ma w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$ reprezentację

$$[l^i_\alpha] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Znajdziemy formę dwuliniową $l : E^2 \times E^3 \longrightarrow R$ wyznaczoną przez tensor $\underset{\sim}{l}$.

Z twierdzenia 5.3 wynika, że dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a} \in E^n$ i $\underset{\sim}{b} \in E^m$ mamy:

$$l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) = (l^i{}_\alpha \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha) \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) = l^i{}_\alpha (\underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{a})(\underset{\sim}{d}^\alpha \circ \underset{\sim}{b}) =$$

$$= l^i{}_\alpha a_i b^\alpha = l^1{}_1 a_1 b^1 + l^1{}_2 a_1 b^2 + l^1{}_3 a_1 b^3 + l^2{}_1 a_2 b^1 +$$

$$+ l^2{}_2 a_2 b^2 + l^2{}_3 a_2 b^3 = 2a_1 b^1 - a_1 b^2 + a_1 b^3 + a_2 b^2 + 2a_2 b^3$$

gdzie $a_i$ dla $i = 1,2$ są współrzędnymi wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, a $b^\alpha$ dla $\alpha = 1,2,3$ współrzędnymi wektora $\underset{\sim}{b}$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$.
Zatem

$$l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = 2a_1 b^1 - a_1 b^2 + a_1 b^3 + a_2 b^2 + 2a_2 b^3 \text{ dla } \underset{\sim}{a} \in E^n \text{ i } \underset{\sim}{b} \in E^m$$

## 5.3. Zadania

Zadanie 5.1. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in E^2 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$[A^i{}_\alpha] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie} \quad \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$$

Znaleźć reprezentację tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazach $\{\underset{\sim}{l}^A \otimes \underset{\sim}{h}^\Omega\}$, $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{h}^\Omega\}$, $\{\underset{\sim}{l}^A \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$ przestrzeni $E^2 \otimes E^3$, jeśli dane są zależności

$$\begin{cases} \underset{\sim}{l}^1 = \underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{l}^2 = \underset{\sim}{e}_1 - 2\underset{\sim}{e}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = 3\underset{\sim}{h}^1 + 3\underset{\sim}{h}^2 + 2\underset{\sim}{h}^3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = -\underset{\sim}{h}^1 - \underset{\sim}{h}^2 - \underset{\sim}{h}^3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = 4\underset{\sim}{h}^1 + 3\underset{\sim}{h}^2 + \underset{\sim}{h}^3 \end{cases}$$

Zadanie 5.2. Niech tensory $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \in E^2 \otimes E^3$ mają reprezentacje

$$A^i{}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie} \quad \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$$