$$T_{\varrho\vartheta,\varrho} + \frac{1}{\varrho \sin\vartheta} T_{\varphi\vartheta,\varphi} + \frac{1}{\varrho} T_{\vartheta\vartheta,\vartheta} + \frac{1}{\varrho}(3T_{\varrho\vartheta} - \operatorname{ctg}\vartheta\, T_{\varphi\varphi} + \operatorname{ctg}\vartheta\, T_{\vartheta\vartheta}) + F_{\vartheta} = 0$$

10.3. Zadania

Zadanie 10.1. Niech pole wektorowe $\underset{\sim}{a} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{T}_1$ ma reprezentację

$$[a_{\Omega}(\Theta)] = \begin{bmatrix} \ln \Theta^1 \\ \sin \Theta^2 \\ \cos \Theta^3 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{h}^{\Omega}(\Theta)\} \text{ dla } \Theta = (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \in D_{\Theta}$$

we współrzędnych sferycznych.

Znaleźć gradient, dywergencję i laplasjan tego pola.

Zadanie 10.2. Niech pole tensorowe $A : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{T}_1$ ma reprezentację

$$A^{\alpha}{}_{\beta}(\varphi) = \begin{bmatrix} \ln \varphi^1 & \sin \varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^2\varphi^3 \\ \cos \varphi^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\}$$

dla $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) \in D_{\varphi}$ we współrzędnych walcowych.

Znaleźć gradient, div_1 i div_2 tego pola.

Zadanie 10.3. Niech będzie dane pole tensorowe $\underset{\sim}{T} : D \to \mathcal{T}_2$ klasy C^2 w obszarze $D \subset \mathcal{E}^3$ o reprezentacji $[T^{\alpha}{}_{\beta}(\varphi)]$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\}$ dla $\varphi \in D_{\varphi}$ we współrzędnych krzywoliniowych.

a) wyprowadzić wzór na reprezentację drugiego gradientu (drugą pochodną kowariantną) tego pola,

b) wyprowadzić wzór na reprezentację laplasjanu tego pola.

LITERATURA

1. Jeżewski M., Muszyński J., Żekanowski Z.: Matematyka. Cz.II. WPW, Warszawa 1976.
2. Gołąb S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1962.