$$\underset{\sim}{A}_{iiij} = \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j + \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \qquad \text{dla } i,j = 1,2,3,\ i \neq j$$

$$\underset{\sim}{A}_{iijk} = \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_k + \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_j + \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \qquad \text{dla } i,j,k = 1,2,3,\ i \neq j < k$$

$$\underset{\sim}{A}_{ijki} = \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_k + \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j + \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j + \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i$$

$$\text{dla } i,j,k = 1,2,3,\ i \neq j < k$$

stanowią bazę przestrzeni $\mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}}$. Stąd wynika, że $\dim \mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}} = 21$.

8.3. Definicja grupy symetrii funkcji tensorowej Funkcje izotropowe i hemitropowe

<u>Definicja</u> 8.7. Niech $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$ będą przestrzeniami tensorowymi, a $f : D \to \mathcal{T}_p$ będzie funkcją tensorową na zbiorze $D \subset \mathcal{T}_p$. Grupą symetrii funkcji tensorowej f nazywamy zbiór

$$\vartheta_f := \{\underset{\sim}{Q} \in \vartheta : \underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{A}) = f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{A} \in D\}$$

gdzie $*$ jest działaniem obrotu tensorów.

Łatwo wykazać, że zbiór ϑ_f jest podgrupą grupy tensorów ortogonalnych ϑ. Grupa symetrii funkcji tensorowej jest zbiorem niepustym, ponieważ zawiera tensor jednostkowy.

<u>Definicja</u> 8.8. Funkcję tensorową $f : D \to \mathcal{T}_q$ na zbiorze $D \subset \mathcal{T}_p$ nazywamy

a) izotropową wtedy i tylko wtedy, gdy $\vartheta_f = \vartheta$;

b) hemitropową wtedy i tylko wtedy, gdy $\vartheta_f = \mathfrak{R}$;

c) anizotropową wtedy i tylko wtedy, gdy $\vartheta_f \neq \mathfrak{R}$ i $\vartheta_f \neq \vartheta$.

P r z y k ł a d 8.15. Niech $f : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$ będzie funkcją wektorową określoną następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1} f(\underset{\sim}{a}) := \alpha \underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{b}$$

gdzie liczby $\alpha, \beta \in R$ i wektor $\underset{\sim}{b} \in \mathcal{T}_1$ są ustalone.
Znajdziemy grupę symetrii tej funkcji ϑ_f.

Szukamy zatem tensorów $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ spełniających równanie $\underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{a}) = f(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a})$ dla $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$. Ponieważ $Q * f(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{Q} * (\alpha \underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{b}) = \alpha \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{b}$ i $f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{a}) = f(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) = \alpha \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} + \beta \underset{\sim}{b}$ dla $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$, zatem $\underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{a}) = f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{a})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b}$, co oznacza, że $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta_b$. Grupa symetrii funkcji wektorowej f jest więc równa grupie symetrii wektora $\underset{\sim}{b}$, tzn. $\vartheta_f = \vartheta_{\underset{\sim}{b}}$. Jeśli $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$, to $\vartheta_f = \vartheta$ i funkcja f jest izotropowa.

<u>Twierdzenie</u> 8.3. Jeśli $f : \mathcal{T}_p \to \mathcal{T}_q$ jest funkcją tensorową liniową, to istnieje dokładnie jeden tensor $\underset{\sim}{L} \in \mathcal{T}_{p+q}$ taki, że

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p} f(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{L} \circ \underset{\sim}{A}$$

gdzie $\circ$ jest pełnym nasunięciem, i zachodzi równość $\vartheta_f = \vartheta_{\underset{\sim}{L}}$.

Dowód. Istnienie tensora $\underset{\sim}{L}$ wynika z twierdzenia 6.4. Wystarczy więc wykazać, że grupy symetrii funkcji f i tensora $\underset{\sim}{L}$ są równe. Z definicji tensor $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{A}) = f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A})$ dla $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$. Ponieważ $\underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{Q} * (\underset{\sim}{L} \circ \underset{\sim}{A}) = (\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{L}) \circ (\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A})$ i $f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{L} \circ (\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A})$ dla $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$, to $\underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{A}) = f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A})$ dla $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}$, co oznacza, że $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta_{\underset{\sim}{L}}$. Stąd wnioskujemy, że $\vartheta_f = \vartheta_{\underset{\sim}{L}}$.

P r z y k ł a d 8.16. Niech $\mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$. Oznaczmy przez $\underset{\sim}{T} \in \mathcal{T}_2^s$ symetryczny tensor naprężenia, a przez $\underset{\sim}{E} \in \mathcal{T}_2^s$ symetryczny tensor odkształcenia w tym samym punkcie ciała.

Dla ciała liniowo sprężystego zależność konstytutywna między tymi tensorami jest liniowa, a więc musi mieć postać $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{L} \circ \underset{\sim}{E}$ gdzie tensor $\underset{\sim}{L} \in \mathcal{T}_4$. Ponieważ tensory naprężenia i odkształcenia są symetryczne, a energia sprężysta $\underset{\sim}{T} \circ \underset{\sim}{E} \geqslant 0$ nieujemnie określona, zatem tensor $\underset{\sim}{L}$ musi spełniać warunki:

$(2,1,3,4)*\mathbf{L} = \mathbf{L}$, $(1,2,4,3)*\mathbf{L} = \mathbf{L}$, $(3,4,1,2)*\mathbf{L} = \mathbf{L}$. Oznacza to, że tensor $\mathbf{L}$ musi należeć do podprzestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}}$, gdzie $\hat{\Sigma}$ jest podgrupą grupy permutacji Σ_4 generowaną przez zbiór permutacji $\{\sigma_1 = (1,2,3,4),\ \sigma_2 = (2,1,3,4),\ \sigma_3 = (1,2,4,3),\ \sigma_4 = (3,4,1,2)\}$. Z przykładu 8.14 wynika, że $\dim \mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}} = 21$. Zatem tensor $\mathbf{L}$ daje się przedstawić w postaci kombinacji liniowej 21 tensorów bazy. Współczynniki tej kombinacji są stałymi materiałowymi dla ciała anizotropowego. Jest ich 21. Jeśli $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ jest bazą przestrzeni $\mathcal{T}_4$, to tensor $\mathbf{L} \in \mathcal{T}_4$ można przedstawić w postaci $\mathbf{L}=L^{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$, przy czym $L^{ijkl} = L^{jikl} = L^{ijlk} = L^{klij}$ dla $i,j,k,l = 1,2,3$.

Dla ciała poprzecznie izotropowego o wektorze $\mathbf{a}$ prostopadłym do przekroju poprzecznego, tensor $\mathbf{L}$ musi należeć również do podprzestrzeni $\mathcal{T}_{4,\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}}$, a zatem $\mathbf{L} \in \mathcal{T}_{4,\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}} \cap \mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}}$. Z przykładu 8.9 wynika, że bazę podprzestrzeni $\mathcal{T}_{4,\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}}$ stanowią tensory $\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$, $\mu*(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})$, $\nu*(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})$, $\mathbf{1}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{1}$, $\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}$, $\sigma_1*(\mathbf{a}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{a})$, $\sigma_2*(\mathbf{a}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{a})$, $\sigma_3*(\mathbf{a}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{a})$, $\sigma_4*(\mathbf{a}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{a})$. Tensory te nie spełniają warunków symetrii. Dokonując symetryzacji powyższej bazy względem grupy $\hat{\Sigma}$ otrzymamy bazę $\mathbf{L}_1 = \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$, $\mathbf{L}_2 = \mu*(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) + \nu*(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})$, $\mathbf{L}_3 = \mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}$, $\mathbf{L}_4 = \mathbf{a}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}$, $\mathbf{L}_5 = \sigma_1*(\mathbf{a}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{a}) + \sigma_2*(\mathbf{a}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{a}) + \sigma_3*(\mathbf{a}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{a}) + \sigma_4*(\mathbf{a}\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{a})$ podprzestrzeni $\mathcal{T}_{4,\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}} \cap \mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}}$. Stąd wynika, że $\dim \mathcal{T}_{4,\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}} \cap \mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}} = 5$. Wtedy dowolny tensor $\mathbf{L} \in \mathcal{T}_{4,\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}} \cap \mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}}$ można przedstawić w postaci

$$\mathbf{L} = \alpha_1\mathbf{L}_1 + \alpha_2\mathbf{L}_2 + \alpha_3\mathbf{L}_3 + \alpha_4\mathbf{L}_4 + \alpha_5\mathbf{L}_5$$

gdzie $\alpha_i \in R$ dla $i = 1,2,3,4,5$ są stałymi materiałowymi dla ciała poprzecznie izotropowego. Prawo konstytutywne przyjmuje postać

$$\mathbf{T} = \mathbf{L}\circ\mathbf{E} = \alpha_1(\mathrm{tr}\,\mathbf{E})\mathbf{1} + 2\alpha_2\mathbf{E} + \alpha_3(\mathbf{aEa})\mathbf{a}\otimes\mathbf{a} + \alpha_4((\mathrm{tr}\,\mathbf{E})\mathbf{a}\otimes\mathbf{a} +$$

$$+ (\mathbf{aEa})\mathbf{1}) + 2\alpha_5(\mathbf{a}\otimes(\mathbf{Ea}) + (\mathbf{Ea})\otimes\mathbf{a})$$

a energia sprężysta

$$W = \underset{\sim}{T} \circ \underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{E} \circ \underset{\sim}{L} \circ \underset{\sim}{E} = \alpha_1 (\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{E})^2 + 2\alpha_2 \underset{\sim}{E} \circ \underset{\sim}{E} + \alpha_3 (\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{E}\underset{\sim}{a})^2 +$$
$$+ 2\alpha_4 (\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{E})(\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{E}\underset{\sim}{a}) + 4\alpha_5 (\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{E}^2\underset{\sim}{a})$$

Dla ciała izotropowego tensor $\underset{\sim}{L}$ musi należeć również do podprzestrzeni $\mathcal{T}_{4,\vartheta}$, a więc $\underset{\sim}{L} \in \mathcal{T}_{4,\vartheta} \cap \mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}}$. Z przykładu 8.9 wynika, że bazę podprzestrzeni $\mathcal{T}_{4,\vartheta}$ stanowią tensory $\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}$, $\mu * (\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1})$, $\nu * (\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1})$. Tensory te nie spełniają warunków symetrii. Dokonując symetryzacji powyższej bazy względem grupy symetrii $\hat{\Sigma}$ otrzymamy bazę $\underset{\sim}{L}_1 = \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}$, $\underset{\sim}{L}_2 = \mu * (\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}) + \nu * (\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1})$ podprzestrzeni $\mathcal{T}_{4,\vartheta} \cap \mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}}$. Stąd mamy, że $\dim \mathcal{T}_{4,\vartheta} \cap \mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}} = 2$. Wtedy dowolny tensor $\underset{\sim}{L} \in \mathcal{T}_{4,\vartheta} \cap \mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}}$ można przedstawić w postaci

$$\underset{\sim}{L} = \alpha_1 \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} + \alpha_2 (\mu * (\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}) + \nu * (\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}))$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ są stałymi materiałami dla ciała izotropowego. Prawo konstytutywne przyjmuje postać

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{L} \circ \underset{\sim}{E} = \alpha_1 (\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{E}) \underset{\sim}{1} + 2\alpha_2 \underset{\sim}{E}$$

a energia sprężysta

$$W = \underset{\sim}{T} \circ \underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{E} \circ \underset{\sim}{L} \circ \underset{\sim}{E} = \alpha_1 (\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{E})^2 + 2\alpha_2 \underset{\sim}{E} \circ \underset{\sim}{E}$$

<u>Twierdzenie</u> 8.4. Jeśli $f : D \to \mathcal{T}_q$ jest funkcją tensorową na zbiorze $D \subset \mathcal{T}_p$, to dla każdego tensora $\underset{\sim}{A} \in D$ zachodzi inkluzja $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} \cap \vartheta_f \subset \vartheta_{f(\underset{\sim}{A})}$.

Dowód. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in D$. Wtedy dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta_{\underset{\sim}{A}} \cap \vartheta_f$ mamy $\underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{A}) = f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = f(\underset{\sim}{A})$, a stąd $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta_{f(\underset{\sim}{A})}$. Zatem $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} \cap \vartheta_f \subset \vartheta_{f(\underset{\sim}{A})}$.

Jeśli funkcja f jest izotropowa, tzn. $\vartheta_f = \vartheta$, to $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} \subset \vartheta_{f(\underset{\sim}{A})}$.

<u>Twierdzenie</u> 8.5. Niech $\mathcal{T}_p$, $\mathcal{T}_q$, $\mathcal{T}_r$ będą przestrzeniami tensorowymi, a $f : D_f \to D_g$, $g : D_g \to \mathcal{T}_r$ funkcjami tensorowy-

mi, gdzie $D_f \subset \mathcal{T}_p$, $D_g \subset \mathcal{T}_q$. Wtedy dla funkcji złożonej $g \circ f : D_f \to \mathcal{T}_r$ zachodzi inkluzja $\vartheta_f \cap \vartheta_g \subset \vartheta_{g \circ f}$.

Dowód. Niech tensor $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta_f \cap \vartheta_g$. Wtedy dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in D_f$ mamy

$$\underset{\sim}{Q} * (g \circ f)(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{Q} * g(f(\underset{\sim}{A})) = g(\underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{A})) = g(f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = g(f(\underset{\sim}{A})) =$$

$$= (g \circ f)(\underset{\sim}{A})$$

skąd $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta_{g \circ f}$. Zatem $\vartheta_f \cap \vartheta_g \subset \vartheta_{g \circ f}$.

8.4. Niezmienniki ortogonalne tensora

Definicja 8.9. Niech $\mathcal{T}_p$ będzie przestrzenią tensorową. Niezmiennikiem ortogonalnym w zbiorze tensorów $D \subset \mathcal{T}_p$ nazywamy dowolną funkcję $\varphi : D \to R$ izotropową, tzn. spełniającą warunek

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{Q} \in \vartheta} \bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in D} \varphi(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = \varphi(\underset{\sim}{A})$$

P r z y k ł a d 8.17. Wykażemy, że funkcja $\varphi : \mathcal{T}_1 \to R$ określona następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1} \varphi(\underset{\sim}{a}) := \|\underset{\sim}{a}\|$$

jest niezmiennikiem ortogonalnym w przestrzeni wektorowej $\mathcal{T}_1$. Ponieważ dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ i dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$ mamy

$$\varphi(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{a}) = \varphi(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) = \|\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}\| = \|\underset{\sim}{a}\| = \varphi(\underset{\sim}{a})$$

więc funkcja φ jest izotropowa. Zatem funkcja φ jest niezmiennikiem ortogonalnym w przestrzeni $\mathcal{T}_1$.

P r z y k ł a d 8.18. Wykażemy, że funkcje I, II, III : $\mathcal{T}_2 \to R$ określone następująco: