a) znaleźć kobazę $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ przestrzeni R^3 względem bazy $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ korzystając z definicji,

b) znaleźć kobazę $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ przestrzeni R^3 względem bazy $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ korzystając z własności macierzy przejścia,

c) znaleźć wszystkie macierze przejścia między tymi bazami i kobazami,

d) znaleźć reprezentację $[a^i]$ wektora $\underset{\sim}{a} = [1,4,5]\in R^3$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$,

e) znaleźć reprezentację wektora $\underset{\sim}{a}$ w pozostałych bazach (kobazach), korzystając ze wzorów transformacyjnych.

Zadanie 3.6. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ będą bazami przestrzeni euklidesowej E^3 takimi, że

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = -\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = \underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = -\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 - 2\underset{\sim}{e}_3 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = 2\underset{\sim}{e}^1 - \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{e}_2 = \underset{\sim}{e}^2 + 2\underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{e}_3 = -\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}^2 + 5\underset{\sim}{e}^3 \end{cases}$$

Znaleźć wszystkie macierze przejścia między tymi bazami.

Zadanie 3.7. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ będą bazami przestrzeni euklidesowej E^3 takimi, że

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = -\underset{\sim}{d}_1 + \underset{\sim}{d}_2 + 2\underset{\sim}{d}_3 \\ \underset{\sim}{e}_2 = -\underset{\sim}{d}_1 + \underset{\sim}{d}_2 + \underset{\sim}{d}_3 \\ \underset{\sim}{e}_3 = 2\underset{\sim}{d}_1 - \underset{\sim}{d}_2 - 3\underset{\sim}{d}_3 \end{cases}$$

oraz wektor $\underset{\sim}{a} \in E^3$ ma reprezentację $[a^i]^T = [-1,0,2]$ w bazie $\{e_i\}$. Znaleźć reprezentację $[a^\alpha]$ wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$.

4. ODWZOROWANIA LINIOWE W PRZESTRZENIACH EUKLIDESOWYCH

4.1. Definicja i własności odwzorowania ortogonalnego

Definicja 4.1. Niech E i E' będą przestrzeniami euklidesowymi. Odwzorowanie liniowe $f : E \longrightarrow E'$ nazywamy ortogonalnym, jeśli spełnia aksjomat

$$\bigwedge_{a,b\in E} f(\underset{\sim}{a}) \circ f(\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}$$

Jeśli ponadto odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne, to nazywamy je izomorfizmem ortogonalnym.

P r z y k ł a d 4.1. Niech R^4 będzie przestrzenią kartezjańską. Wykażemy, że odwzorowanie liniowe $g : R^4 \to R^4$ określone następująco:

$$\bigwedge_{a\in R^4} g(\underset{\sim}{a}) = g([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]) :=$$

$$:= \left[\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4),\ \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4),\ \frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4),\ \frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4)\right]$$

jest ortogonalne.

Ponieważ dla dowolnych ciągów $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b} \in R^4$ mamy

$$g(\underset{\sim}{a}) \circ g(\underset{\sim}{b}) = g([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]) \circ g([\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4]) =$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4),\ \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4),\ \frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4),\ \frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4)\right] \circ$$

$$\left[\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4),\ \frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2-\beta_3-\beta_4),\ \frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2+\beta_3-\beta_4),\ \frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2-\beta_3+\beta_4)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\alpha_1[1,1,1,1] + \frac{1}{2}\alpha_2[1,1,-1,-1] + \frac{1}{2}\alpha_3[1,-1,1,-1] +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\alpha_4[1,-1,-1,1]\right) \circ \left(\frac{1}{2}\beta_1[1,1,1,1] + \frac{1}{2}\beta_2[1,1,-1,-1] +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\beta_3[1,-1,1,-1] + \frac{1}{2}\beta_4[1,-1,-1,1]\right) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \alpha_4\beta_4 =$$

$$= [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4] \circ [\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4] = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b},$$

a więc odwzorowanie g jest ortogonalne.

<u>Twierdzenie</u> 4.1. Niech E, F, G będą przestrzeniami euklidesowymi. Jeśli $f : E \to F$ i $g : F \to G$ są odwzorowaniami ortogonalnymi (izomorfizmami ortogonalnymi), to odwzorowanie złożone $g \circ f : E \to G$ jest ortogonalne (izomorfizmem ortogonalnym).

Dowód. Z twierdzenia 2.1 wynika, że odwzorowanie złożone $g \circ f$ jest liniowe (izomorfizmem). Ponieważ dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in E$ mamy

$$(g \circ f)(\underset{\sim}{a}) \circ (g \circ f)(\underset{\sim}{b}) = g(f(\underset{\sim}{a})) \circ g(f(\underset{\sim}{b})) = f(\underset{\sim}{a}) \circ f(\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}$$

a więc odwzorowanie $g \circ f$ jest odwzorowaniem ortogonalnym.

Twierdzenie 4.2. Niech E, E' będą przestrzeniami euklidesowymi. Jeśli odwzorowanie $f : E \to E'$ jest izomorfizmem ortogonalnym, to odwzorowanie odwrotne $f^{-1} : E' \to E$ jest izomorfizmem ortogonalnym.

Dowód. Z twierdzenia 2.2 wynika, że odwzorowanie odwrotne f^{-1} jest izomorfizmem. Wystarczy sprawdzić, czy zachowuje iloczyn skalarny. Ponieważ odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne, to dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a}'$, $\underset{\sim}{b}' \in E'$ istnieją wektory $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in E$ takie, że $f(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{a}'$ i $f(\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{b}'$ lub $f^{-1}(\underset{\sim}{a}') = \underset{\sim}{a}$ i $f^{-1}(\underset{\sim}{b}') = \underset{\sim}{b}$. Korzystając z powyższych faktów mamy

$$f^{-1}(\underset{\sim}{a}') \circ f^{-1}(\underset{\sim}{b}') = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} = f(\underset{\sim}{a}) \circ f(\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a}' \circ \underset{\sim}{b}',$$

a więc odwzorowanie f^{-1} jest odwzorowaniem ortogonalnym.

Z powyższego twierdzenia wynika, że poprawne jest następujące określenie: Przestrzenie euklidesowe E i E' nazywamy izomorficznymi ortogonalnie, jeśli istnieje odwzorowanie $f : E \to E'$, które jest izomorfizmem ortogonalnym.

Przestrzenie euklidesowe izomorficznie ortogonalne mają takie same własności algebraiczne, dlatego też można je ze sobą utożsamiać. Jeśli przestrzenie E i E' są izomorficznymi ortogonalnie, to piszemy, że $E \approx E'$.

P r z y k ł a d 4.2. Zbiór wszystkich odwzorowań izomorficznie ortogonalnych z przestrzeni euklidesowej E w tę samą przestrzeń, który oznaczamy przez $\vartheta(E;E)$, jest podgrupą grupy odwzorowań izomorficznych $I(E;E)$ z przykładu 2.2c. Grupę $\vartheta(E;E)$ nazywamy grupą odwzorowań ortogonalnych przestrzeni E.

Twierdzenie 4.3. Przestrzenie euklidesowe skończenie wymiarowe E i E' są izomorficznie ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim E = \dim E'$.

Dowód. $\Longrightarrow$ Wynika z twierdzenia 2.4.

$\Longleftarrow$ Niech $\dim E = \dim E' = n$. Wtedy istnieją bazy ortonormalne $\{\underset{\sim}{i}_1, \underset{\sim}{i}_2, \ldots, \underset{\sim}{i}_n\}$ przestrzeni E i $\{\underset{\sim}{i}'_1, \underset{\sim}{i}'_2, \ldots, \underset{\sim}{i}'_n\}$ przestrzeni E'. Wprowadzimy odwzorowanie $f : E \longrightarrow E'$ spełniające warunki: $f(\underset{\sim}{i}_1) = \underset{\sim}{i}'_1$, $f(\underset{\sim}{i}_2) = \underset{\sim}{i}'_2, \ldots, f(\underset{\sim}{i}_n) = \underset{\sim}{i}'_n$. Z twierdzenia 2.3 wynika, że istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe spełniające powyższe warunki. Odwzorowanie to jest wzajemnie jednoznaczne, a więc jest izomorfizmem.

Sprawdzimy czy odwzorowanie f jest ortogonalne. Wystarczy to zrobić na wektorach bazy, więc

$$f(\underset{\sim}{i}_i) \circ f(\underset{\sim}{i}_j) = \bar{\underset{\sim}{i}}_i \circ \bar{\underset{\sim}{i}}_j = \delta_{ij} = \underset{\sim}{i}_i \circ \underset{\sim}{i}_j \quad \text{dla} \quad i,j = 1,\ldots,n$$

Zatem odwzorowanie f jest izomorfizmem ortogonalnym.

Wniosek 4.1. Każda n-wymiarowa przestrzeń euklidesowa E^n jest izomorficzna ortogonalnie z n-wymiarową przestrzenią kartezjańską R^n.

4.2. Związki między formami liniowymi a wektorami w przestrzeniach euklidesowych

Twierdzenie 4.4. Niech E^n będzie n-wymiarową przestrzenią euklidesową. Forma $l : E^n \longrightarrow R$ jest liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jeden wektor $\underset{\sim}{l} \in E^n$ taki, że

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{a} \in E^n} l(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{l} \circ \underset{\sim}{a}$$

gdzie $\circ$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni E^n.

Dowód. $\Longrightarrow$ Niech forma $l : E^n \longrightarrow R$ będzie liniowa.

I s t n i e n i e . Weźmy dowolną bazę $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ przestrzeni E^n i przyjmijmy

$$\underset{\sim}{l} := l(\underset{\sim}{e}_i)\underset{\sim}{e}^i$$