i dają w sumie wektor $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] \in R^3$. Zatem na mocy definicji 1.8 przestrzeń R^3 jest sumą prostą podprzestrzeni V_1 i V_2.

1.4. Reprezentacja wektora. Zmiana bazy i wzory transformacyjne Orientacja przestrzeni

Bazą uporządkowaną przestrzeni liniowej skończenie wymiarowej nazywać będziemy bazę z pewnym ustalonym porządkiem wektorów. Ponieważ każdą bazę można uporządkować, będziemy opuszczać określenie "uporządkowana" i pisząc baza $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ będziemy rozumieć, że jest to baza uporządkowana we wskazany sposób. Bazę uporządkowaną będziemy również oznaczać krótko przez $\{e_i\}$.

Twierdzenie 1.6. Zbiór wektorów $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ jest bazą (uporządkowaną) n-wymiarowej przestrzeni liniowej V^n nad ciałem K wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wektora $a \in V^n$ istnieją jednoznacznie wyznaczone skalary $\alpha^1,\alpha^2,\dots,\alpha^n \in K$ takie, że zachodzi równość

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \dots + \alpha^n e_n$$

Dowód $\Longrightarrow$ Niech $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ będzie bazą przestrzeni V^n. Wtedy na mocy definicji bazy dla dowolnego wektora a istnieją skalary $\alpha^1,\alpha^2,\dots,\alpha^n \in K$ takie, że

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \dots + \alpha^n e_n$$

Wystarczy wykazać, że skalary te są wyznaczone jednoznacznie. Przypuśćmy, że dla wektora a istnieją inne skalary $\alpha^{1'},\alpha^{2'},\dots,\alpha^{n'} \in K$ takie, że

$$a = \alpha^{1'} e_1 + \alpha^{2'} e_2 + \dots + \alpha^{n'} e_n$$

Odejmując powyższe równania stronami otrzymamy

$$(\alpha^1 - \alpha^{1'})e_1 + (\alpha^2 - \alpha^{2'})e_2 + \dots + (\alpha^n - \alpha^{n'})e_n = 0$$

Ponieważ baza jest zbiorem liniowo niezależnym, stąd $\alpha^1 - \alpha^{1'} = 0$, $\alpha^2 - \alpha^{2'} = 0, \ldots, \alpha^n - \alpha^{n'} = 0$, a więc $\alpha^1 = \alpha^{2'}$, $\alpha^2 = \alpha^{2'}, \ldots, \alpha^n = \alpha^{n'}$. Zatem skalary są wyznaczone jednoznacznie.

$\Leftarrow$ Niech dla każdego wektora $a \in V^n$ istnieją jednoznacznie wyznaczone skalary $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n \in K$ takie, że

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \ldots + \alpha^n e_n$$

Wykażemy, że zbiór $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ jest bazą przestrzeni V^n.

Sprawdzamy aksjomaty definicji bazy:

1) rozpatrzmy równanie:

$$\beta^1 e_1 + \beta^2 e_2 + \ldots + \beta^n e_n = 0, \quad \text{gdzie} \quad \beta^i \in K \text{ dla } i = 1,2,\ldots,n$$

Ponieważ przedstawienie wektora zerowego w powyższej postaci jest jednoznaczne, to $\beta^1 = \beta^2 = \ldots = \beta^n = 0$. Zatem zbiór $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ jest liniowo niezależny.

2) ponieważ każdy wektor z przestrzeni V^n jest kombinacją liniową wektorów ze zbioru $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, zatem zbiór ten generuje przestrzeń V^n.

Aksjomaty definicji 1.6 są spełnione, a więc zbiór $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ jest bazą przestrzeni V^n.

Niech $\{e_i\}$ będzie bazą n-wymiarowej przestrzeni liniowej V^n nad ciałem K. Wtedy na mocy powyższego twierdzenia dowolny wektor $a \in V^n$ można przedstawić jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej wektorów tej bazy, zatem

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \ldots + \alpha^n e_n = \alpha^i e_i \; {}^{*)}$$

Skalary $\alpha^i \in K$ dla $i = 1, \ldots, n$ nazywać będziemy współrzędnymi, a macierz kolumnową $[\alpha^i] \in K^n$ reprezentacją wektora a w bazie $\{e_i\}$.

---

*) Zgodnie z umową Einsteina, jeśli indeks powtarza się dwa razy na różnych poziomach, należy po nim sumować. Indeks, po którym następuje sumowanie, nazywamy niemym, po którym nie ma sumowania - nazywamy swobodnym. Jeśli ten sam indeks powtarza się więcej niż dwa razy, to nie należy po nim sumować.

P r z y k ł a d 1.13. Niech R^3 będzie przestrzenią liniową ciągów 3-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykażemy, że zbiór $\{e_i\}$ taki, że $e_1 = [1,2,1]$, $e_2 = [0,1,3]$, $e_3 = [1,2,0]$, jest bazą przestrzeni R^3 i znajdziemy reprezentację $[\alpha^i]$ wektora $a = [5,2,1] \in R^3$ w bazie $\{e_i\}$.

Dla dowolnego wektora $b = [t,r,s] \in R^3$ rozpatrzmy równania

$$\beta^i e_i = b, \quad \text{gdzie} \quad \beta^i \in R \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3$$

które po rozpisaniu i podstawieniu danych przyjmie postać

$$\beta^1[1,2,1] + \beta^2[0,1,3] + \beta^3[1,2,0] = [t,s,r]$$

Równanie to jest równoważne układowi równań skalarnych

$$\begin{cases} \beta^1 + \beta^3 = t \\ 2\beta^1 + \beta^2 + 2\beta^3 = s \\ \beta^1 + 3\beta^2 = r \end{cases}$$

Układ ten ma jedno rozwiązanie $\beta^1 = 6t - 3s + r$, $\beta^2 = -2t + s$, $\beta^3 = -5t + 3s - r$. Zatem z twierdzenia 1.6 wynika, że zbiór $\{e_i\}$ jest bazą przestrzeni R^3.

Macierz kolumnowa

$$[\beta^i] = \begin{bmatrix} 6t - 3s + r \\ -2t + s \\ -5t + 3s - r \end{bmatrix}$$

jest reprezentacją wektora b w bazie $\{e_i\}$. Stąd łatwo już znaleźć reprezentację $[\alpha^i]$ wektora $a = [5,2,1]$ w bazie $\{e_i\}$, więc

$$[\alpha^i] = \begin{bmatrix} 6\cdot5 - 3\cdot2 + 1 \\ -2\cdot5 + 1\cdot2 \\ -5\cdot5 + 3\cdot2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -8 \\ -20 \end{bmatrix}$$

P r z y k ł a d 1.14. Niech $R_2[x]$ będzie przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej drugiego nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykażemy, że zbiór wielomianów $\{e_i\}$ takich, że $e_1 = x$, $e_2 = x + 3$, $e_3 = 2x^2 + 1$, jest bazą przestrzeni $R_2[x]$ i znajdziemy reprezentację $[\alpha^i]$ dowolnego wielomianu $a = tx^2 + sx + r \in R_2[x]$ w bazie $\{e_i\}$.

Dla dowolnego wielomianu $a = tx^2 + sx + r \in R_2[x]$ rozpatrzmy równanie

$$\alpha^i e_i = a \quad \text{gdzie} \quad \alpha^i \in R \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3$$

które po rozpisaniu i podstawieniu danych przyjmie postać

$$\alpha^1 x + \alpha^2(x + 3) + \alpha^3(2x^2 + 1) = tx^2 + sx + r$$

Równanie to jest równoważne układowi równań skalarnych

$$\begin{cases} 3\alpha^2 + \alpha^3 = r \\ \alpha^1 + \alpha^2 = s \\ 2\alpha^3 = t \end{cases}$$

Układ ten ma jedno rozwiązanie $\alpha^1 = s - \frac{1}{3} r + \frac{1}{6} t$, $\alpha^2 = \frac{1}{3} r - \frac{1}{6} t$, $\alpha^3 = \frac{1}{2} t$. Zatem z twierdzenia 1.6 wynika, że zbiór wielomianów $\{e_i\}$ jest bazą przestrzeni $R_2[x]$.

Macierz kolumnowa

$$[\alpha^i] = \begin{bmatrix} s - \frac{1}{3} r + \frac{1}{6} t \\ \frac{1}{3} r - \frac{1}{6} t \\ \frac{1}{2} t \end{bmatrix}$$

jest reprezentacją wektora a w bazie $\{e_i\}$.

Niech $\{e_i\}$ i $\{l_A\}$ będą bazami n-wymiarowej przestrzeni liniowej V^n nad ciałem K. Wtedy wektory bazy $\{l_A\}$ można przedstawić jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy $\{e_i\}$, zatem

$$l_A = \gamma^i_A e_i \quad \text{dla} \quad A = 1,\dots,n$$

Skalary $\gamma^i_A \in K$ dla $i = 1,\dots,n$; $A = 1,\dots,n$, będziemy nazywać współczynnikami rozkładu bazy $\{l_A\}$ w bazie $\{e_i\}$, a macierz $[\gamma^i{}_A] \in K^{n \times n}$ macierzą przejścia od bazy $\{l_A\}$ do bazy $\{e_i\}$.

Ustalimy teraz pewne własności macierzy przejścia między bazami w przestrzeniach liniowych.

<u>Twierdzenie</u> 1.7. Niech $\{e_i\}$ i $\{l_A\}$ będą bazami przestrzeni liniowej n-wymiarowej V^n nad ciałem K. Jeśli wektory jednej bazy przedstawimy w postaci kombinacji liniowej wektorów drugiej bazy, tzn.

$l_A = \gamma^i_A e_i$ $\quad \left[\gamma^i{}_A\right]$ - macierz przejścia od bazy $\{l_A\}$ do bazy $\{e_i\}$

$e_i = \gamma^A_i l_A$ $\quad \left[\gamma^A{}_i\right]$ - macierz przejścia od bazy $\{e_i\}$ do bazy $\{l_A\}$

$e_i = \gamma^j_i e_j$ $\quad \left[\gamma^j{}_i\right]$ - macierz przejścia od bazy $\{e_i\}$ do bazy $\{e_j\}$

$l_A = \gamma^B_A l_B$ $\quad \left[\gamma^B{}_A\right]$ - macierz przejścia od bazy $\{l_A\}$ do bazy $\{l_B\}$

to otrzymamy wzory

$\gamma^j_i = \delta^j_i$ $\quad \left[\gamma^j{}_i\right]$ jest macierzą jednostkową

co oznacza, że

$\gamma^B_A = \delta^B_A$ $\quad \left[\gamma^B{}_A\right]$ jest macierzą jednostkową

gdzie δ^j_i i δ^B_A są symbolami Kroneckera;

$\gamma^i_A\gamma^A_j = \delta^i_j$ $\quad \left[\gamma^i{}_A\right]\left[\gamma^A{}_j\right] = \left[\delta^i{}_j\right]$

lub macierzowo

$\gamma^A_i\gamma^i_B = \delta^A_B$ $\quad \left[\gamma^A{}_i\right]\left[\gamma^i{}_B\right] = \left[\delta^A{}_B\right]$

co oznacza, że macierz $\left[\gamma^A{}_i\right]$ jest odwrotna do macierzy $\left[\gamma^i{}_A\right]$.

Dowód. Dla przykładu udowodnimy ostatni wzór. Z założeń twierdzenia i powyższych wzorów wynika, że

$$l_B = \gamma^i_B e_i = \gamma^i_B\left(\gamma^A_i l_A\right) = \gamma^i_B\gamma^A_i l_A \quad \text{i} \quad l_B = \delta^A_B l_A$$

Stąd mamy

$$\gamma^i_B\gamma^A_i l_A = \delta^A_B l_A \quad \text{dla} \quad B = 1,\dots,n$$

Przedstawienie wektora w bazie jest jednoznaczne, a więc

$$\gamma^i_B\gamma^A_i = \delta^A_B \quad \text{dla} \quad A,B = 1,\dots,n.$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że macierze przejścia od bazy do bazy są nieosobliwe. Oznaczamy je przez γ z odpowiednimi indeksami. Jeśli indeksy dwu baz oznaczamy literami różnych alfabetów, to układ odpowiednich indeksów w macierzy przejścia określa jednoznacznie bazy związane z tą macierzą. Np. $\left[\gamma^i{}_A\right]$ jest macierzą przejścia od bazy $\{1_A\}$ do bazy $\{e_i\}$.

Twierdzenie 1.8. Niech $\{e_i\}$ i $\{1_A\}$ będą bazami przestrzeni liniowej n-wymiarowej V^n nad ciałem K. Jeśli dowolny wektor $a \in V^n$ przedstawimy w postaci kombinacji liniowej jednej i drugiej bazy, tzn.

$a = \alpha^i e_i$ $\quad [\alpha^i]$ - reprezentacja wektora a w bazie $\{e_i\}$

$a = \alpha^A 1_A$ $\quad [\alpha^A]$ - reprezentacja wektora a w bazie $\{1_A\}$

to otrzymamy wzory transformacyjne:

$$\alpha^A = \gamma_i^A \alpha^i \qquad\qquad [\alpha^A] = [\gamma^A{}_i]\,[\alpha^i]$$

lub macierzowo

$$\alpha^i = \gamma_A^i \alpha^A \qquad\qquad [\alpha^i] = [\gamma^i{}_A]\,[\alpha^A]$$

gdzie γ_i^A, $\gamma_A^i \in K$ dla $i = 1,\dots,n$; $A = 1,\dots,n$ są współczynnikami macierzy przejścia.

Dowód. Dla przykładu udowodnimy pierwszy wzór. Z założeń tego twierdzenia i twierdzenia 1.7 wynika, że dla dowolnego $a \in V^n$ mamy

$$a = \alpha^i e_i = \alpha^i\left(\gamma_i^A 1_A\right) = \alpha^i \gamma_i^A 1_A \quad \text{i} \quad a = \alpha^A 1_A$$

Stąd

$$\alpha^i \gamma_i^A 1_A = \alpha^A 1_A$$

Ponieważ przedstawienie wektora w bazie jest jednoznaczne, zatem

$$\alpha^A = \alpha^i \gamma_i^A \quad \text{dla} \quad A = 1,\dots,n$$

Jeśli indeksy różnych baz przestrzeni liniowej oznaczymy literami innego alfabetu, to wystarczy podać samą reprezentację i określa już ona jednoznacznie wektor, gdyż rodzaj indeksu reprezentacji wskazuje na to, w jakiej ona jest bazie. Np. $[\alpha^A]$ jest reprezentacją wektora w bazie $\{1_A\}$. Ze wzorów transformacyjnych wynika, że zmiana współrzędnych wektora odbywa się za pomocą układu skalarów γ indeksowanych tak, aby zachodziła konwencja sumacyjna.

Definicja 1.9. Niech V^n będzie przestrzenią liniową n-wymiarową nad ciałem liczb rzeczywistych R. Mówimy, że bazy $\{e_i\}$ i $\{1_A\}$ wyznaczają zgodne orientacje przestrzeni V^n, jeśli wyznacznik z macierzy przejścia $[\gamma^i{}_A]$ od bazy $\{1_A\}$do bazy $\{e_i\}$ jest dodatni, tzn. det $[\gamma^i{}_A] > 0$.

Przestrzeń V^n ze zbiorem baz wyznaczających zgodne orientacje nazywamy przestrzenią liniową zorientowaną i oznaczamy przez V^n_+.

P r z y k ł a d 1.15. Niech w przestrzeni liniowej ciągów 3-wyrazowych R^3 nad ciałem liczb rzeczywistych będą dane bazy $\{e_i\}$ i $\{1_A\}$, gdzie $e_1 = [1,2,0]$, $e_2 = [3,4,2]$, $e_3 = [2,2,1]$ oraz $1_1 = [1,-1,2]$, $1_2 = [3,1,1]$, $1_3 = [4,0,2]$.

a) znajdziemy macierze przejścia $[\gamma^i{}_A]$ i $[\gamma^A{}_i]$ między bazami $\{e_i\}$ i $\{1_A\}$.

Z definicji macierzy przejścia $[\gamma^i{}_A]$ od bazy $\{1_A\}$ do bazy $\{e_i\}$ wynika, że

$$1_A = \gamma^i_A e_i = \gamma^1_A e_1 + \gamma^2_A e_2 + \gamma^3_A e_3 \quad \text{dla} \quad A = 1,2,3$$

Rozpisując powyższe równanie otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} 1_1 = \gamma^1_1 e_1 + \gamma^2_1 e_2 + \gamma^3_1 e_3 \\ 1_2 = \gamma^1_2 e_1 + \gamma^2_2 e_2 + \gamma^3_2 e_3 \\ 1_3 = \gamma^1_3 e_1 + \gamma^2_3 e_2 + \gamma^3_3 e_3 \end{cases}$$

Układ ten po podstawieniu danych i znalezieniu rozwiązania przyjmie postać

$$\begin{cases} [1,-1,2] = -\frac{5}{2}[1,2,0] + \frac{1}{2}[3,4,2] + 1[2,2,1] \\ [3,1,1] = \frac{3}{2}[1,2,0] - \frac{7}{2}[3,4,2] + 6[2,2,1] \\ [4,0,2] = -2[1,2,0] - 2[3,4,2] + 6[2,2,1] \end{cases}$$

Stąd mamy

$$\left[\gamma^{i}{}_{A}\right] = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Z twierdzenia 1.7 wynika, że

$$\gamma^{i}_{A}\gamma^{A}_{j} = \delta^{i}_{j} \qquad \left[\gamma^{i}{}_{A}\right]\left[\gamma^{A}{}_{j}\right] = \left[\delta^{i}{}_{j}\right]$$

lub macierzowo

$$\gamma^{A}_{i}\gamma^{i}_{B} = \delta^{A}_{B} \qquad \left[\gamma^{A}{}_{i}\right]\left[\gamma^{i}{}_{B}\right] = \left[\delta^{A}{}_{B}\right]$$

Stąd otrzymamy macierz

$$\left[\gamma^{A}{}_{i}\right] = \left[\gamma^{i}{}_{A}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{21}{2} & -5 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{13}{4} & -3 \\ \frac{13}{4} & \frac{33}{4} & 4 \end{bmatrix}$$

przejścia od bazy $\{e_i\}$ do bazy $\{l_A\}$.

b) niech wektor $a \in R^3$ ma reprezentację $[\alpha^i]$ w bazie $\{e_i\}$ taką, że $\alpha^1 = -2$, $\alpha^2 = 2$, $\alpha^3 = -1$. Znajdziemy reprezentację $\{\alpha^A\}$ wektora a w bazie $\{l_A\}$.

Ze wzorów transformacyjnych podanych w twierdzeniu 1.8 mamy

$$\alpha^A = \gamma^{A}_{i}\alpha^i \quad \text{dla} \quad A = 1,2,3$$

Stąd otrzymamy

$$[\alpha^A] = \left[\gamma^{A}{}_{i}\right][\alpha^i] = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & -\frac{21}{2} & -5 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{13}{2} & -3 \\ \frac{13}{4} & \frac{33}{4} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

c) Zbadamy, czy bazy $\{e_i\}$ i $\{l_A\}$ są zgodnie zorientowane.

Ponieważ

$$\det\left[\gamma^{i}{}_{A}\right] = \det\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} = 2 > 0$$

a więc bazy są zgodnie zorientowane.

1.5. Zadania

Zadanie 1.1. Wprowadźmy w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich R^+ działania wewnętrzne $\circ$ i zewnętrzne $*$ określone następująco:

$$\bigwedge_{a,b \in R^+} a \circ b = a\, b$$

$$\bigwedge_{\alpha \in R}\ \bigwedge_{a \in R^+} \alpha * a = a^{\alpha}$$

Zbadać czy struktura $(R^+, R, \circ, *)$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 1.2. Wprowadźmy w zbiorze $R^{\infty} = \{a = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots] : \alpha_i \in R$ dla $i = 1,2,\ldots\}$ wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych działania dodawania ciągów i mnożenia ciągu przez liczbę rzeczywistą określone następująco:

$$\bigwedge_{a\, b \in R^{\infty}} a + b = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots] + [\beta_1, \beta_2, \ldots] := [\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2, \ldots]$$

$$\bigwedge_{\gamma \in R}\ \bigwedge_{a \in R^{\infty}} \gamma a = \gamma[\alpha_1, \alpha_2, \ldots] := [\gamma\alpha_1,\ \gamma\alpha_2, \ldots]$$

Wykazać, że układ $(R^{\infty}, R, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową. Zbadać, czy podzbiory V_i zbioru R^{∞} dla $i = 1,2,3$ są podprzestrzeniami liniowymi, jeśli:

a) V_1 jest zbiorem ciągów geometrycznych,

b) V_2 jest zbiorem ciągów arytmetycznych,

c) V_3 jest zbiorem ciągów zbieżnych.

Zadanie 1.3. Niech R^3 będzie przestrzenią liniową ciągów 3-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych. Zbadać, czy pod-