$$\underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{b} = b^i b^j g_{ij} = [b^i]^T [g_{ij}] [b^j] = [2,3,1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 50$$

Stąd

$$\cos \sphericalangle (\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\sqrt{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a}}\sqrt{\underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{b}}} = \frac{13}{\sqrt{10}\sqrt{50}} = \frac{13}{10\sqrt{5}}$$

3.3. Zadania

Zadanie 3.1. Zbadać, czy w przestrzeni liniowej ciągów 2-wyrazowych R^2 nad ciałem liczb rzeczywistych formy $f : R^2 \times R^2 \longrightarrow R$ określone następująco:

a) $f([\alpha_1, \alpha_2], [\beta_1, \beta_2]) := 3\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2$

b) $f([\alpha_1, \alpha_2], [\beta_1, \beta_2]) := 2\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 6\alpha_2\beta_2$

określają iloczyn skalarny w przestrzeni R^2.

Zadanie 3.2. W przestrzeni liniowej wielomianów $R_n[x]$ stopnia co najwyżej n-tego nad ciałem liczb rzeczywistych określono formy $f : R_n[x] \times R_n[x] \longrightarrow R$ następująco

a) $f(u,v) := \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx$

b) $f(u,v) = f(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2, \beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2) := \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$

Wykazać, że przestrzeń $R_n[x]$ z każdą z tych form jest przestrzenią euklidesową.

Zadanie 3.3. W przestrzeni euklidesowej $R_2[x]$ z iloczynem skalarnym określonym w zadaniu 3.2a znaleźć wielomiany ortogonalne do wielomianów $w_1(x) = 1$, $w_2(x) = x$.

Zadanie 3.4. W przestrzeni euklidesowej $R_2[x]$ z iloczynem skalarnym określonym w zadaniu 3.2b znaleźć dopełnienie ortogonalne do:

a) podprzestrzeni wielomianów dla których $w(1) = 0$,

b) podprzestrzeni wielomianów stopni parzystych.

Zadanie 3.5. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ będą bazami przestrzeni kartezjańskiej R^3 takimi, że $\underset{\sim}{e}_1 = [-2,1,0]$, $\underset{\sim}{e}_2 = [1,0,-1]$, $\underset{\sim}{e}_3 = [1,1,0]$ i $\underset{\sim}{d}^1 = [1,2,1]$, $\underset{\sim}{d}^2 = [0,1,1]$, $\underset{\sim}{d}^3 = [1,-1,1]$.

a) znaleźć kobazę $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ przestrzeni R^3 względem bazy $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ korzystając z definicji,

b) znaleźć kobazę $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ przestrzeni R^3 względem bazy $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ korzystając z własności macierzy przejścia,

c) znaleźć wszystkie macierze przejścia między tymi bazami i kobazami,

d) znaleźć reprezentację $[a^i]$ wektora $\underset{\sim}{a} = [1,4,5]\in R^3$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$,

e) znaleźć reprezentację wektora $\underset{\sim}{a}$ w pozostałych bazach (kobazach), korzystając ze wzorów transformacyjnych.

Zadanie 3.6. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ będą bazami przestrzeni euklidesowej E^3 takimi, że

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = -\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = \underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = -\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 - 2\underset{\sim}{e}_3 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = 2\underset{\sim}{e}^1 - \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{e}_2 = \underset{\sim}{e}^2 + 2\underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{e}_3 = -\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}^2 + 5\underset{\sim}{e}^3 \end{cases}$$

Znaleźć wszystkie macierze przejścia między tymi bazami.

Zadanie 3.7. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ będą bazami przestrzeni euklidesowej E^3 takimi, że

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = -\underset{\sim}{d}_1 + \underset{\sim}{d}_2 + 2\underset{\sim}{d}_3 \\ \underset{\sim}{e}_2 = -\underset{\sim}{d}_1 + \underset{\sim}{d}_2 + \underset{\sim}{d}_3 \\ \underset{\sim}{e}_3 = 2\underset{\sim}{d}_1 - \underset{\sim}{d}_2 - 3\underset{\sim}{d}_3 \end{cases}$$

oraz wektor $\underset{\sim}{a} \in E^3$ ma reprezentację $[a^i]^T = [-1,0,2]$ w bazie $\{e_i\}$. Znaleźć reprezentację $[a^\alpha]$ wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$.

4. ODWZOROWANIA LINIOWE W PRZESTRZENIACH EUKLIDESOWYCH

4.1. Definicja i własności odwzorowania ortogonalnego

Definicja 4.1. Niech E i E' będą przestrzeniami euklidesowymi. Odwzorowanie liniowe $f : E \longrightarrow E'$ nazywamy ortogonalnym, jeśli spełnia aksjomat