ANALIZA TENSOROWA W PRZESTRZENIACH EUKLIDESOWYCH

9. PRZESTRZENIE EUKLIDESOWE PUNKTOWE

9.1. Definicja i własności przestrzeni euklidesowej punktowej Układ odniesienia

Definicja 9.1. Niech E^n będzie przestrzenią euklidesową n-wymiarową. Zbiór ε^n z działaniem zewnętrznym dodawania $+ : \varepsilon^n \times E^n \longrightarrow \varepsilon^n$ nazywamy przestrzenią euklidesową punktową n-wymiarową nad przestrzenią E^n, jeśli spełnione są aksjomaty:

1) $\bigwedge\limits_{A,B\in\varepsilon} \ \bigvee\limits_{\underset{\sim}{a}\in E^n} \quad A + \underset{\sim}{a} = B$

2) $\bigwedge\limits_{A\in\varepsilon^n} \ \bigwedge\limits_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}\in E^n} \quad A + (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = (A + \underset{\sim}{a}) + \underset{\sim}{b},$

przy czym wektor $\underset{\sim}{a}$ występujący w aksjomacie 1 jest dokładnie jednym wektorem spełniającym ten warunek. Wektor ten oznaczamy również przez $\underset{\sim}{AB}$, więc $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{AB}$. Elementy zbioru ε^n nazywamy punktami i oznaczamy przez A, B, C itp.

Niech punkty $A, B \in \varepsilon^n$. Wtedy jednoznacznie wyznaczony wektor $\underset{\sim}{a} \in E^n$ taki, że $B = A + \underset{\sim}{a}$, który oznaczamy również przez $\underset{\sim}{AB}$, można geometrycznie interpretować jako odcinek skierowany o początku w punkcie A i końcu w punkcie B.

Twierdzenie 9.1. Jeśli ε^n jest przestrzenią euklidesową punktową nad przestrzenią euklidesową E^n, to spełnione są warunki

1) $\bigwedge\limits_{A\in\varepsilon^n} \underset{\sim}{AA} = \underset{\sim}{0}$

2) $\bigwedge\limits_{A,B\in\varepsilon^n} \underset{\sim}{AB} = -\underset{\sim}{BA}$

3) $\bigwedge\limits_{A,B,C\in\varepsilon^n} \underset{\sim}{AB} + \underset{\sim}{BC} = \underset{\sim}{AC}$

Dowód

1) niech punkt $A\in\varepsilon^n$. Oznaczamy $\underset{\sim}{AA} = \underset{\sim}{a}$. Wtedy mamy

$$A = A + \underset{\sim}{a} = A + (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{0}) = (A + \underset{\sim}{a}) + \underset{\sim}{0} = A + \underset{\sim}{0},\ \text{stąd}\ \underset{\sim}{AA} = \underset{\sim}{0}$$

2) niech punkty $A,B\in\varepsilon^n$. Oznaczmy $\underset{\sim}{AB} = \underset{\sim}{a}$. Wtedy mamy

$$A = A + \underset{\sim}{0} = A + (\underset{\sim}{a} + (-\underset{\sim}{a})) = (A + \underset{\sim}{a}) + (-\underset{\sim}{a}) = B + (-\underset{\sim}{a}),$$

$$\text{stąd}\quad \underset{\sim}{BA} = -\underset{\sim}{a}$$

Zatem $\underset{\sim}{AB} = -\underset{\sim}{BA}$.

3) niech punkty $A,B,C\in\varepsilon^n$. Oznaczmy $\underset{\sim}{AB} = \underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{BC} = \underset{\sim}{b}$. Wtedy mamy

$$C = B + \underset{\sim}{b} = (A + \underset{\sim}{a}) + \underset{\sim}{b} = A + (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}),\quad \text{stąd}\quad \underset{\sim}{AC} = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}$$

Zatem $\underset{\sim}{AC} = \underset{\sim}{AB} + \underset{\sim}{BC}$.

Bezpośrednio stąd i z twierdzenia 3.2 wynika:

<u>Wniosek</u> 9.1. Niech ε^n będzie przestrzenią euklidesową punktową nad przestrzenią euklidesową E^n. Wtedy funkcja $\varrho : \varepsilon^n \times \varepsilon^n \longrightarrow R$ określona następująco:

$$\bigwedge\limits_{A,B\in\varepsilon^n} \varrho(A,B) := \|\underset{\sim}{AB}\| = \sqrt{\underset{\sim}{AB}\circ\underset{\sim}{AB}} \tag{9.1}$$

jest metryką w przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n, gdzie "$\circ$" oznacza iloczyn skalarny w przestrzeni E^n.

Zatem przestrzeń euklidesowa punktowa jest przestrzenią metryczną z metryką określoną wzorem (9.1).

<u>Twierdzenie</u> 9.2. Niech ε^n będzie przestrzenią euklidesową punktową nad przestrzenią euklidesową E^n, 0 - ustalonym punktem przestrzeni ε^n. Jeśli w zbiorze ε^n wprowadzimy działania:

dodawania punktów, mnożenia punktu przez liczbę rzeczywistą i iloczyn skalarny punktów określone następująco:

1) $\bigwedge_{A,B\in\varepsilon^n} A + B = (0 + \underset{\sim}{OA}) + (0 + \underset{\sim}{OB}) := 0 + (\underset{\sim}{OA} + \underset{\sim}{OB})$

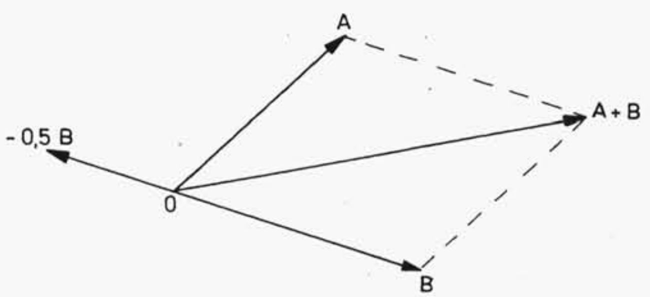
2) $\bigwedge_{\alpha\in R} \bigwedge_{A\in\varepsilon^n} \alpha A = \alpha(0 + \underset{\sim}{OA}) := 0 + \alpha\underset{\sim}{OA}$

3) $\bigwedge_{A,B\in\varepsilon^n} A\circ B = (0 + \underset{\sim}{OA})\circ(0 + \underset{\sim}{OB}) := \underset{\sim}{OA}\circ\underset{\sim}{OB}$

to zbiór ε^n z powyższymi działaniami jest przestrzenią euklidesową.

Łatwy dowód pomijamy.

Należy zaznaczyć, że działania zdefiniowane powyżej zależą od wyboru ustalonego punktu $0\in\varepsilon^n$. Punkt ten nazywamy bazowym. Metryka wyznaczona przez iloczyn skalarny punktów pokrywa się z metryką określoną we wniosku 9.1. Interpretacja geometryczna dodawania punktów i mnożenia punktu przez liczbę rzeczywistą w przestrzeni euklidesowej punktowej ε^2 pokazana jest na rys.9.1.



Rys.9.1

Twierdzenie 9.3. Niech ε^n będzie przestrzenią euklidesową punktową nad przestrzenią euklidesową E^n, 0 - punktem bazowym przestrzeni ε^n. Wtedy odwzorowanie $f:\varepsilon^n \longrightarrow E^n$ określone następująco:

$$\bigwedge_{A\in\varepsilon^n} f(A) = f(0 + \underset{\sim}{OA}) := \underset{\sim}{OA}$$

jest izomorfizmem ortogonalnym. Izomorfizm ten zależy od wyboru punktu bazowego.

Dowód. Łatwo zauważyć, że odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne. Ponieważ:

1) dla dowolnych punktów $A,B \in \varepsilon^n$ mamy

$$f(A + B) = f((O + \underset{\sim}{OA}) + (O + \underset{\sim}{OB})) = f(O + (\underset{\sim}{OA} + \underset{\sim}{OB})) =$$
$$= \underset{\sim}{OA} + \underset{\sim}{OB} = f(A) + f(B)$$

2) dla dowolnego punktu $A \in \varepsilon^n$ i dowolnej liczby $\alpha \in R$ mamy

$$f(\alpha A) = f(\alpha(O + \underset{\sim}{OA})) = f(O + \alpha\underset{\sim}{OA}) = \alpha\underset{\sim}{OA} = \alpha f(A)$$

3) dla dowolnych punktów $A,B \in \varepsilon^n$ mamy

$$f(A) \circ f(B) = f(O + \underset{\sim}{OA}) \circ f(O + \underset{\sim}{OB}) = \underset{\sim}{OA} \circ \underset{\sim}{OB} =$$
$$= (O + \underset{\sim}{OA}) \circ (O + \underset{\sim}{OB}) = A \circ B$$

a więc odwzorowanie f zachowuje działania w przestrzeniach euklidesowych. Zatem na mocy definicji 4.1 odwzorowanie f jest izomorfizmem ortogonalnym.

Zgodnie z definicją tego izomorfizmu dowolny punkt $A \in \varepsilon^n$ utożsamiamy z wektorem $\underset{\sim}{OA} \in E^n$, więc $A \approx \underset{\sim}{OA}$.

Wniosek 9.2. Przestrzeń euklidesowa punktowa ε^n z ustalonym punktem bazowym jest izomorficzna ortogonalnie z przestrzenią euklidesową E^n.

Definicja 9.2. Niech O będzie punktem bazowym przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n, a $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ bazą przestrzeni euklidesowej E^n. Układ $(O,\{\underset{\sim}{e}_i\})$ nazywamy układem odniesienia w przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n.

Jeśli baza w układzie odniesienia jest ortogonalna (ortonormalna), to bazowy układ odniesienia nazywamy ortogonalnym (kartezjańskim). Każdy punkt $A \in \varepsilon^n$ w układzie odniesienia można przedstawić w postaci

$$A = O + \underset{\sim}{OA} = O + \alpha^i \underset{\sim}{e}_i = O + (\alpha^1 \underset{\sim}{e}_1 + \alpha^2 \underset{\sim}{e}_2 + \ldots + \alpha^n \underset{\sim}{e}_n)$$

Liczby $\alpha^i \in R$ dla $i = 1,\ldots,n$ nazywamy współrzędnymi, a ciąg $(\alpha^i) = (\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n) \in R^n$ reprezentacją punktu A w układzie odniesienia $(0,\{\underset{\sim}{e}_i\})$.

Twierdzenie 9.4. Niech $(0,\{\underset{\sim}{i}_i\})$ będzie kartezjańskim układem odniesienia w przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n, a R^n przestrzenią kartezjańską. Wtedy odwzorowanie $g : \varepsilon^n \to R^n$ określone następująco:

$$\bigwedge_{A\in\varepsilon^n} g(A) = g(0 + \alpha^i \underset{\sim}{i}_i) := (\alpha^i) = (\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n)$$

jest izomorfizmem ortogonalnym, gdzie ciąg $(\alpha^i) \in R^n$ jest reprezentacją punktu A w układzie odniesienia $(0,\{\underset{\sim}{i}_i\})$. Izomorfizm ten zależy od wyboru układu odniesienia.

Dowód. Łatwo zauważyć, że odwzorowanie g jest wzajemnie jednoznaczne. Ponieważ:

1) dla dowolnych punktów $A,B \in \varepsilon^n$ mamy

$$g(A + B) = g((0 + \alpha^i \underset{\sim}{i}_i) + (0 + \beta^i \underset{\sim}{i}_i)) = g(0 + (\alpha^i + \beta^i)\underset{\sim}{i}_i) :=$$
$$:= (\alpha^i + \beta^i) = (\alpha^i) + (\beta^i) =$$
$$= g(0 + \alpha^i \underset{\sim}{i}_i) + g(0 + \beta^i \underset{\sim}{i}_i) = g(A) + g(B)$$

2) dla dowolnego punktu $A \in \varepsilon^n$ i dowolnej liczby $\gamma \in R$ mamy

$$g(\gamma A) = g(\gamma(0 + \alpha^i \underset{\sim}{i}_i)) = g(0 + \gamma\alpha^i \underset{\sim}{i}_i) = (\gamma\alpha^i) = \gamma(\alpha^i) =$$
$$= \gamma g(0 + \alpha^i \underset{\sim}{i}_i) = \gamma g(A)$$

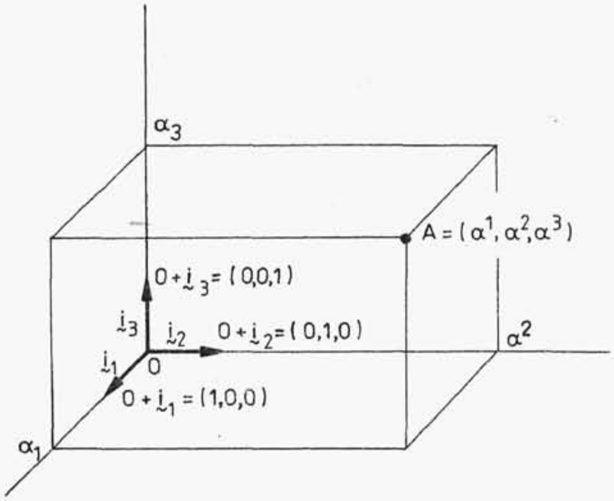
3) dla dowolnych punktów $A,B \in \varepsilon^n$ mamy

$$g(A) \circ g(B) = g(0 + \alpha^i \underset{\sim}{i}_i) \circ g(0 + \beta^j \underset{\sim}{i}_j) = (\alpha^i \underset{\sim}{i}_i) \circ (\beta^j \underset{\sim}{i}_j) = \alpha^i \beta^j \delta_{ij}$$

$$A \circ B = (0 + \alpha^i \underset{\sim}{i}_i) \circ (0 + \beta^j \underset{\sim}{i}_j) = (\alpha^i \underset{\sim}{i}_i) \circ (\beta^j \underset{\sim}{i}_j) = \alpha^i \beta^j \delta_{ij}$$

stąd $g(A) \circ g(B) = A \circ B$, zatem na mocy definicji 4.1 odwzorowanie g jest izomorfizmem ortogonalnym.

Zgodnie z definicją tego izomorfizmu dowolny punkt $A \in \varepsilon^n$ utożsamiamy z reprezentacją tego punktu $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) \in R^n$ w kartezjańskim układzie odniesienia, więc $A = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$. Stąd mamy np. $0 + \underset{\sim}{e}_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$. Interpretacja geometryczna tego izomorfizmu pokazana jest na rys.9.2.



Rys.9.2

<u>Wniosek</u> 9.3. Przestrzeń euklidesowa punktowa ε^n z kartezjańskim układem odniesienia jest izomorficzna ortogonalnie z przestrzenią kartezjańską R^n.

W dalszym ciągu zakładamy, że w przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n dany jest kartezjański układ odniesienia $(0, \{\underset{\sim}{i}_i\})$. Wtedy przestrzeń euklidesową punktową ε^n utożsamiamy euklidesowo z przestrzenią kartezjańską R^n, a dowolny punkt $X \in \varepsilon^n$ z reprezentacją $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in R^n$ tego punktu w tym układzie kartezjańskim.

9.2. Układ współrzędnych krzywoliniowych, baza i kobaza Symbole Christoffela drugiego rodzaju

<u>Definicja</u> 9.3. Układem współrzędnych krzywoliniowych (klasy C^k) w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n nazywamy odwzorowanie $X : D_\varphi \longrightarrow D$ spełniające aksjomaty: