Ponieważ

$$\det\left[\gamma^{i}{}_{A}\right] = \det\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \\ 1 & 6 & 6 \end{bmatrix} = 2 > 0$$

a więc bazy są zgodnie zorientowane.

1.5. Zadania

Zadanie 1.1. Wprowadźmy w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich R^+ działania wewnętrzne $\circ$ i zewnętrzne $*$ określone następująco:

$$\bigwedge_{a,b\in R^+} a \circ b = a\, b$$

$$\bigwedge_{\alpha\in R}\ \bigwedge_{a\in R^+} \alpha * a = a^{\alpha}$$

Zbadać czy struktura $(R^+, R, \circ, *)$ jest przestrzenią liniową.

Zadanie 1.2. Wprowadźmy w zbiorze $R^{\infty} = \{a = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots] : \alpha_i \in R$ dla $i = 1,2,\ldots\}$ wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach rzeczywistych działania dodawania ciągów i mnożenia ciągu przez liczbę rzeczywistą określone następująco:

$$\bigwedge_{a\, b\in R^{\infty}} a + b = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots] + [\beta_1, \beta_2, \ldots] := [\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2, \ldots]$$

$$\bigwedge_{\gamma\in R}\ \bigwedge_{a\in R^{\infty}} \gamma a = \gamma[\alpha_1, \alpha_2, \ldots] := [\gamma\alpha_1,\ \gamma\alpha_2, \ldots]$$

Wykazać, że układ $(R^{\infty}, R, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową. Zbadać, czy podzbiory V_i zbioru R^{∞} dla $i = 1,2,3$ są podprzestrzeniami liniowymi, jeśli:

a) V_1 jest zbiorem ciągów geometrycznych,

b) V_2 jest zbiorem ciągów arytmetycznych,

c) V_3 jest zbiorem ciągów zbieżnych.

Zadanie 1.3. Niech R^3 będzie przestrzenią liniową ciągów 3-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych. Zbadać, czy podzbiory V_i zbioru R^3 dla $i = 1,2,3,4$ są podprzestrzeniami liniowymi, jeśli:

a) $V_1 = \{[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] \in R^3 : \alpha_1\alpha_3 = 0\}$

b) $V_2 = \{[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] \in R^3 : \alpha_1^2 = \alpha_2^2\}$

c) $V_3 = \{[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] \in R^3 : \alpha_1 + \alpha_2 = 0\}$

d) $V_4 = \{[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] \in R^3 : \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$

Zadanie 1.4. Niech $\mathcal{F}(R;R)$ będzie przestrzenią liniową funkcji nad ciałem liczb rzeczywistych. Zbadać, czy podzbiory $\mathcal{F}_i$ zbioru $\mathcal{F}(R;R)$ dla $i = 1,2,3,4$ są podprzestrzeniami liniowymi, jeśli:

a) $\mathcal{F}_1 = \{f \in \mathcal{F}(R;R) : f(x^2) = (f(x))^2 \text{ dla } x \in R\}$

b) $\mathcal{F}_2 = \{f \in \mathcal{F}(R;R) : f(0) = f(1)\}$

c) $\mathcal{F}_3 = \{f \in \mathcal{F}(R;R) : f(x) = 1 - f(-x) \text{ dla } x \in R\}$

d) $\mathcal{F}_4 = \{f \in \mathcal{F}(R;R) : f \text{ jest funkcją ciągłą na zbiorze } R\}$.

Zadanie 1.5. Niech $R[x]$ będzie przestrzenią liniową wielomianów nad ciałem liczb rzeczywistych. Zbadać, czy podzbiory A_i zbioru $R[x]$ dla $i = 1,2,3$ są podprzestrzeniami liniowymi, jeśli:

a) $A_1 = \{w \in R[x] : w(0) = 1\}$

b) $A_2 = \{w \in R[x] : w(0) = 0\}$

c) $A_3 = \{w \in R[x] : 2w(0) - 3w(1) = 0\}$

Zadanie 1.6. Niech R^3 będzie przestrzenią liniową ciągów 3-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych. Zbadać liniową zależność zbioru ciągów:

a) $\{[1,4,3], [-1,2,-1], [0,6,4]\}$

b) $\{[-1,2,3], [2,-1,2], [1,1,-1]\}$

c) $\{[1,-1,2], [2,-2,4]\}$

d) $\{[1,2,3], [1,0,-1]\}$

Zadanie 1.7. Niech $\mathcal{F}(R;R)$ będzie przestrzenią liniową funkcji nad ciałem liczb rzeczywistych. Zbadać liniową zależność zbioru funkcji:

a) $\{2, \sin^2 x, \sin x, \cos^2 x\}$

b) $\{\sin x, \cos x, \sin x \cos x\}$

c) $\{x, 1 + x, 1 + x^2\}$

d) $\{1, x, x^2, 1 + x^2\}$

Zadanie 1.8. Niech R^4 będzie przestrzenią liniową ciągów 4-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykazać, że zbiór

$$V = \{a=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4] \in R^4 : 3\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3+\alpha_4 = 0 \wedge \alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3-2\alpha_4 = 0\}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni R^4. Znaleźć bazę i wymiar tej podprzestrzeni.

Zadanie 1.9. Niech $R^{3\times3}$ będzie przestrzenią liniową macierzy kwadratowych 3-go stopnia nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykazać, że zbiory macierzy symetrycznych $V_1 = \{A \in R^{3\times3} : A = A^T\}$ i antysymetrycznych $V_2 = \{A \in R^{3\times3} : A = -A^T\}$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $R^{3\times3}$ oraz przestrzeń $R^{3\times3}$ jest sumą prostą podprzestrzeni V_1 i V_2.

Zadanie 1.10. Niech R^3 będzie przestrzenią liniową ciągów 3-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykazać, że zbiór ciągów $\{e_i\}$ takich, że $e_1 = [1,2,1]$, $e_2 = [1,1,3]$, $e_3 = [1,2,0]$ jest bazą przestrzeni R^3. Znaleźć współrzędne (reprezentację) wektora $a = [0,1,0] \in R^3$ w tej bazie.

Zadanie 1.11. Niech $R_2[x]$ będzie przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej drugiego nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykazać, że zbiór wielomianów $\{l_A\}$ takich, że $l_1 = 1 + x$, $l_2 = x^2 - x$, $l_3 = 2x + x^2$, jest bazą przestrzeni $R_2[x]$. Znaleźć współrzędne (reprezentację) wielomianu $w = 1 + x^2$ w tej bazie.

Zadanie 1.12. Niech R^3 będzie przestrzenią liniową ciągów 3-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych, a zbiory $\{e_i\}$ i $\{l_A\}$ takie, że $e_1 = [1,2,0]$, $e_2 = [1,1,1]$, $e_3 = [0,0,1]$ oraz $l_1 = [1,0,0]$, $l_2 = [1,1,0]$, $l_3 = [1,1,1]$ będą bazami tej przestrzeni.

a) znaleźć macierze przejścia między bazami $\{e_i\}$ i $\{l_A\}$,

b) zbadać czy bazy $\{e_i\}$ i $\{l_A\}$ są zgodnie zorientowane,

c) znaleźć reprezentację wektora $a = [-1,2,-1]$ w tych bazach i sprawdzić wzór transformacyjny.