$$A^{1}{}_{22} = A^{1}{}_{1}{}^{1}\, g^{1}_{2} g_{12} + A^{1}{}_{2}{}^{1} g^{2}_{2} g_{12} + A^{1}{}_{1}{}^{2} g^{1}_{2} g_{22} + A^{1}{}_{2}{}^{2} g^{2}_{2} g_{22} =$$

$$= (-1)4(-1) + 0\cdot 1(-1) + 2\cdot 4(-2) + 1\cdot 1(-2) = -14$$

$$A^{2}{}_{11} = A^{2}{}_{1}{}^{1} g^{1}_{1} g_{11} + A^{2}{}_{2}{}^{1} g^{2}_{1} g_{11} + A^{2}{}_{1}{}^{2} g^{1}_{1} g_{21} + A^{2}{}_{2}{}^{2} g^{2}_{1} g_{21} =$$

$$= 0\cdot 3(-1) + 0\cdot 1(-1) + 1\cdot 3(-1) + (-1)1(-1) = -2$$

$$A^{2}{}_{21} = A^{2}{}_{1}{}^{1} g^{1}_{2} g_{11} + A^{2}{}_{2}{}^{1} g^{2}_{2} g_{11} + A^{2}{}_{1}{}^{2} g^{1}_{2} g_{21} + A^{2}{}_{2}{}^{2} g^{2}_{2} g_{21} =$$

$$= 0\cdot 4(-1) + 0\cdot 1(-1) + 1\cdot 4(-1) + (-1)1(-1) = -3$$

$$A^{2}{}_{12} = A^{2}{}_{1}{}^{1} g^{1}_{1} g_{12} + A^{2}{}_{2}{}^{1} g^{2}_{1} g_{12} + A^{2}{}_{1}{}^{2} g^{1}_{1} g_{22} + A^{2}{}_{2}{}^{2} g^{2}_{1} g_{22} =$$

$$= 0\cdot 3(-1) + 0\cdot 1(-1) + 1\cdot 3(-2) + (-1)\cdot 1(-2) = -4$$

$$A^{2}{}_{22} = A^{2}{}_{1}{}^{1} g^{1}_{2} g_{12} + A^{2}{}_{2}{}^{1} g^{2}_{2} g_{12} + A^{2}{}_{1}{}^{2} g^{1}_{2} g_{22} + A^{2}{}_{2}{}^{2} g^{2}_{2} g_{22} =$$

$$= 0\cdot 4(-1) + 0\cdot 1(-1) + 1\cdot 4(-2) + (-1)\cdot 1(-2) = -6$$

Zatem

$$\left[A^{1}{}_{kl}\right] = \begin{bmatrix} -4 & -11 \\ -5 & -14 \end{bmatrix} \qquad \left[A^{2}{}_{kl}\right] = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Reprezentację $\left[A^{j}{}_{kl}\right]$ tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\left\{\underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}^k \otimes \underset{\sim}{e}^l\right\}$ można znaleźć prościej. A mianowicie, zapisując wzór transformacyjny w postaci macierzowej otrzymamy

$$\left[A^{1}{}_{kl}\right] = \left[g^{\alpha}_{k}\right]\left[A^{1}{}_{\alpha}{}^{A}\right]\left[g_{Al}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -11 \\ -5 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\left[A^{2}{}_{kl}\right] = \left[g^{\alpha}_{k}\right]\left[A^{2}{}_{\alpha}{}^{A}\right]\left[g_{Al}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

6.2. Działania na tensorach

Można wykazać, że w bazie $\left\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}_A\right\}$ przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ działania dodawania tensorów i mnożenia tensora przez liczbę rzeczywistą (jak w każdej przestrzeni liniowej) wykonuje się następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathcal{T}_p} \underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B} = A^{i\dots A}_{\cdot\cdot\alpha\cdot\cdot}\,\underset{\sim}{e}_i\otimes\dots\otimes\underset{\sim}{d}^{\alpha}\otimes\dots\otimes\underset{\sim}{l}_A +$$

$$+ B^{i\dots A}_{\cdot\cdot\alpha\cdot\cdot}\,\underset{\sim}{e}_i\otimes\dots\otimes\underset{\sim}{d}^{\alpha}\otimes\dots\otimes\underset{\sim}{l}_A =$$

$$= \left(A^{i\dots A}_{\cdot\cdot\alpha\cdot\cdot} + B^{i\dots A}_{\cdot\cdot\alpha\cdot\cdot}\right)\underset{\sim}{e}_i\otimes\dots\otimes\underset{\sim}{d}^{\alpha}\otimes\dots\otimes\underset{\sim}{l}_A$$

$$\bigwedge_{\gamma\in R}\ \bigwedge_{\underset{\sim}{A}\in\mathcal{T}_p} \gamma\underset{\sim}{A} = \gamma\left(A^{i\dots A}_{\cdot\cdot\alpha\cdot\cdot}\,\underset{\sim}{e}_i\otimes\dots\otimes\underset{\sim}{d}^{\alpha}\otimes\dots\otimes\underset{\sim}{l}_A\right) =$$

$$= \left(\gamma A^{i\dots A}_{\cdot\cdot\alpha\cdot\cdot}\right)\underset{\sim}{e}_i\otimes\dots\otimes\underset{\sim}{d}^{\alpha}\otimes\dots\otimes\underset{\sim}{l}_A$$

Stąd, w ustalonej bazie dodając do siebie tensory dodajemy ich współrzędne (reprezentacje), a mnożąc tensor przez liczbę mnożymy współrzędne (reprezentację) tego tensora przez tę liczbę. Tensory proste (np. bazy) można dodawać i mnożyć przez liczby rzeczywiste zgodnie z własnościami iloczynu tensorowego wektorów.

P r z y k ł a d 6.2. Niech tensory $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}\in\mathcal{T}_3 = E^3\otimes E^3\otimes E^3$ będą miały postać

$$\underset{\sim}{A} = 2\underset{\sim}{e}_2\otimes\underset{\sim}{d}^2\otimes\underset{\sim}{e}^1 - 3\underset{\sim}{e}_2\otimes\underset{\sim}{d}^3\otimes\underset{\sim}{e}^2 \quad \text{w bazie} \quad \left\{\underset{\sim}{e}_i\otimes\underset{\sim}{d}^{\alpha}\otimes\underset{\sim}{e}^j\right\}$$

$$\underset{\sim}{B} = -2\underset{\sim}{e}_2\otimes\underset{\sim}{e}_2\otimes\underset{\sim}{e}^1 + 4\underset{\sim}{e}_2\otimes\underset{\sim}{e}_3\otimes\underset{\sim}{e}^1 \quad \text{w bazie} \quad \left\{\underset{\sim}{e}_i\otimes\underset{\sim}{e}_j\otimes\underset{\sim}{e}^k\right\}$$

Znajdziemy tensor $\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}$, jeśli dana jest zależność

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = 2\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = \underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 + 2\underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = -\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3 \end{cases}$$

W tym celu zapiszemy tensory $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$ w tej samej bazie. Jeśli przyjmiemy bazę $\left\{\underset{\sim}{e}_i\otimes\underset{\sim}{e}_j\otimes\underset{\sim}{e}^k\right\}$, to wystarczy zapisać tensor $\underset{\sim}{A}$ w tej bazie, zatem

$$\underset{\sim}{A} = 2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 - 3\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{e}^2 = 2\underset{\sim}{e}_2 \otimes (\underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 + 2\underset{\sim}{e}_3) \otimes \underset{\sim}{e}^1 +$$

$$- 3\underset{\sim}{e}_2 \otimes (-\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3) \otimes \underset{\sim}{e}^2$$

Z własności iloczynu tensorowego wektorów otrzymamy

$$\underset{\sim}{A} = 2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}^1 - 2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 + 4\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}^1 + 3\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}^2 +$$

$$- 6\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}^2 - 3\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}^2$$

Zatem mamy

$$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = 2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}^1 + 3\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}^2 - 6\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}^2 - 3\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}^2$$

Tensor ten można zapisać w postaci sumy tensorów prostych, np.

$$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1 \otimes (2\underset{\sim}{e}^1 + 3\underset{\sim}{e}^2) + \underset{\sim}{e}_2 \otimes (-6\underset{\sim}{e}_2 - 3\underset{\sim}{e}_3) \otimes \underset{\sim}{e}^2 =$$

$$= \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{b} \otimes \underset{\sim}{e}^2$$

gdzie $\underset{\sim}{a} = 2\underset{\sim}{e}^1 + 3\underset{\sim}{e}^2$ i $\underset{\sim}{b} = -6\underset{\sim}{e}_2 - 3\underset{\sim}{e}_3$.

<u>Definicja</u> 6.2. Zwężeniem tensorów z przestrzeni $\mathcal{T}_p$, $p \geq 2$ po wskaźnikach r i s takich, że $1 \leq r < s \leq p$, nazywamy odwzorowanie $\underset{(r,s)}{\mathrm{tr}} : \mathcal{T}_p \longrightarrow \mathcal{T}_{p-2}$ określone następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p} \underset{(r,s)}{\mathrm{tr}}\, \underset{\sim}{A} = \underset{(r,s)}{\mathrm{tr}} \big(A^{i \cdots\cdots\cdots \beta}_{\cdots \underset{r}{j} \cdots \underset{s}{\alpha} \cdots}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{e}^j \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}_{\beta} \big) :=$$

$$:= A^{i \cdots\cdots\cdots \beta}_{\cdots j \cdots \alpha \cdots} (\underset{\sim}{e}^j \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha})\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \ldots \otimes \check{\underset{\sim}{e}}^j \otimes \ldots \otimes \check{\underset{\sim}{d}}^{\alpha} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}_{\beta} =$$

$$= A^{i \cdots\cdots\cdots \beta}_{\cdots j \cdots \alpha \cdots}\, g^{j\alpha}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \ldots \otimes \check{\underset{\sim}{e}}^j \otimes \ldots \otimes \check{\underset{\sim}{d}}^{\alpha} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}_{\beta} =$$

$$= A^{i \cdots\cdots j \cdots \beta}_{\cdots j \cdots\cdots\cdots}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \ldots \otimes \check{\underset{\sim}{e}}^j \otimes \ldots \otimes \check{\underset{\sim}{d}}^{\alpha} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}_{\beta}$$

przy czym wektory oznaczone symbolem ∨ należy z bazy usunąć.

Tensor $\underset{(r,s)}{\mathrm{tr}}\ \underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_{p-2}$ nazywamy zwężeniem tensora $\underset{\sim}{A}$ po wskaźnikach r i s.

Zwężenie tensorów jest odwzorowaniem liniowym. Odwzorowanie to nie zależy od wyboru bazy przestrzeni tensorowej.

Najłatwiej dokonywać zwężenia tensora po wskaźnikach r i s, jeśli jest on zapisany w takiej bazie przestrzeni tensorowej, w której na r-tym miejscu występuje baza przestrzeni euklidesowej, a na s-tym miejscu kobaza względem tej bazy.

P r z y k ł a d 6.3. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_3 = E^3 \otimes E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację $\left[A^{ij}{}_{\alpha}\right]$ w bazie $\{e_i \otimes e_j \otimes d^{\alpha}\}$ taką, że

$$\left[A^{1j}{}_{\alpha}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left[A^{2j}{}_{\alpha}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[A^{3j}{}_{\alpha}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Znajdziemy tensor $\underset{(1,3)}{\mathrm{tr}}\ \underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_1$, jeśli dana jest zależność

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = 3\underset{\sim}{d}_1 + 4\underset{\sim}{d}_2 - \underset{\sim}{d}_3 \\ \underset{\sim}{e}_2 = \underset{\sim}{d}_1 + \underset{\sim}{d}_2 \\ \underset{\sim}{e}_3 = -\underset{\sim}{d}_2 \end{cases}$$

Z definicji zwężenia tensorów wynika, że

$$\underset{(1,3)}{\mathrm{tr}}\ \underset{\sim}{A} = \underset{(1,3)}{\mathrm{tr}}\left(A^{ij}{}_{\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}\right) = A^{ij}{}_{\alpha}(\underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{d}^{\alpha})\underset{\sim}{e}_j = A^{ij}{}_{\alpha}g^{\alpha}{}_{i}\underset{\sim}{e}_j$$

a więc należy znaleźć macierz $\left[g^{\alpha}{}_{i}\right]$. Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{d}_{\alpha}\}$ przestrzeni euklidesowej E^3 dana jest w postaci

$$\underset{\sim}{e}_i = g^{\alpha}_{i}\underset{\sim}{d}_{\alpha} \quad \text{dla } i = 1,2,3, \quad \text{stąd} \quad \left[g^{\alpha}{}_{i}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dokonując sumowania we wzorze na zwężenie tensora $\underset{\sim}{A}$ otrzymamy

$$\underset{(1,3)}{\mathrm{tr}}\ \underset{\sim}{A} = (A^{11}{}_1 g_1^1 + A^{11}{}_2 g_1^2 + A^{11}{}_3 g_1^3 + A^{21}{}_1 g_2^1 + A^{21}{}_2 g_2^2 +$$

$$+ A^{21}{}_3 g_2^3 + A^{31}{}_1 g_3^1 + A^{31}{}_2 g_3^2 + A^{31}{}_3 g_3^3)\underset{\sim}{e}_1 +$$

$$+ (A^{12}{}_1 g_1^1 + A^{12}{}_2 g_1^2 + A^{12}{}_3 g_1^3 + A^{22}{}_1 g_2^1 + A^{22}{}_2 g_2^2 +$$

$$+ A^{22}{}_3 g_2^3 + A^{32}{}_1 g_3^1 + A^{32}{}_2 g_3^2 + A^{32}{}_3 g_3^3)\underset{\sim}{e}_2 +$$

$$+ (A^{13}{}_1 g_1^1 + A^{13}{}_2 g_1^2 + A^{13}{}_3 g_1^3 + A^{23}{}_1 g_2^1 +$$

$$+ A^{23}{}_2 g_2^2 + A^{23}{}_3 g_2^3 + A^{33}{}_1 g_3^1 + A^{33}{}_2 g_3^2 + A^{33}{}_3 g_3^3)\underset{\sim}{e}_3 =$$

$$= ((-1)\cdot 3 + 0\cdot 4 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + (-1)1 + 0\cdot 0 +$$

$$+ (-1)\cdot 0 + 3\cdot(-1) + 0\cdot 0)\underset{\sim}{e}_1 + (1\cdot 3 + 3\cdot 4 + 0\cdot(-1) +$$

$$+ 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\,(-1) + (-2)\,0)\,\underset{\sim}{e}_2 +$$

$$+ ((-2)3 + 0\cdot 4 + 1\,(-1) + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 +$$

$$+ 1\cdot 0 + 2\,(-1) + 0\cdot 0)\underset{\sim}{e}_3 = -8\underset{\sim}{e}_1 + 17\underset{\sim}{e}_2 - 9\underset{\sim}{e}_3$$

Przykład ten można rozwiązać inną metodą. Stosując do wzoru na zwężenie tensora wzór transformacyjny otrzymamy

$$\underset{(1,3)}{\mathrm{tr}}\ \underset{\sim}{A} = A^{ij}{}_{\alpha} g_i^{\alpha}\, \underset{\sim}{e}_j = A^{ij}{}_i \underset{\sim}{e}_j$$

Zatem wystarczy znaleźć reprezentację $[A^{ij}{}_k]$ tensora $\underset{\sim}{A}$. Ze wzoru transformacyjnego dostaniemy

$$A^{ij}{}_k = A^{ij}{}_{\alpha}\, g_k^{\alpha} \quad \text{dla} \quad i,j,k = 1,2,3$$

a stąd mamy

$$[A^{1j}{}_k] = [A^{1j}{}_{\alpha}][g^{\alpha}{}_k] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 15 & 4 & -3 \\ -7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[A^{2j}{}_{k}\right] = \left[A^{2j}{}_{\alpha}\right]\left[g^{\alpha}{}_{k}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 11 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[A^{3j}{}_{k}\right] = \left[A^{3j}{}_{\alpha}\right]\left[g^{\alpha}{}_{k}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 12 & 3 & -1 \\ 11 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\underset{(1,3)}{\mathrm{tr}}\ \underset{\sim}{A} = A^{ij}{}_{i}\underset{\sim}{e}_j = \left(A^{11}{}_{1} + A^{21}{}_{2} + A^{31}{}_{3}\right)\underset{\sim}{e}_1 +$$

$$+ \left(A^{12}{}_{1} + A^{22}{}_{2} + A^{32}{}_{3}\right)\underset{\sim}{e}_2 + \left(A^{13}{}_{1} + A^{23}{}_{2} + A^{33}{}_{3}\right)\underset{\sim}{e}_3 =$$

$$= (-5 + 0 - 3)\underset{\sim}{e}_1 + (15 + 3 - 1)\underset{\sim}{e}_2 + (-7 + 0 - 2)\underset{\sim}{e}_3 =$$

$$= -8\underset{\sim}{e}_1 + 17\underset{\sim}{e}_2 - 9\underset{\sim}{e}_3$$

Stąd $\left[(\underset{(1,3)}{\mathrm{tr}}\ A)^j\right] = \begin{bmatrix} -8 \\ 17 \\ -9 \end{bmatrix}$ jest reprezentacją tensora $\underset{(1,3)}{\mathrm{tr}}\ \underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_j\}$.

<u>Definicja</u> 6.3. **Mnożeniem tensorowym tensorów z przestrzeni $\mathcal{T}_p$ przez tensory z przestrzeni $\mathcal{T}_q$ nazywamy odwzorowanie**

$$\otimes : \mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_q \longrightarrow \mathcal{T}_{p+q}$$

określone następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p} \ \bigwedge_{\underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_q} \underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B} = \left(A^{i \ldots\ldots A}_{\ \ldots\alpha\ldots}\underset{\sim}{e}_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{1}_A\right) \otimes$$

$$\otimes \left(B^{\ldots\Omega}_{\beta\ldots}\underset{\sim}{d}^{\beta} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{h}_{\Omega}\right) :=$$

$$= A^{i \ldots A}_{\ \ldots\alpha\ldots} B^{\ldots\Omega}_{\beta\ldots}\underset{\sim}{e}_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{h}_{\Omega}$$

Tensor $\underset{\sim}{A} \otimes B \in \mathcal{T}_{p-q}$ nazywamy iloczynem tensorowym tensorów $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$.

Mnożenie tensorowe tensorów jest odwzorowaniem dwuliniowym. Odwzorowanie to nie zależy od wyboru baz w przestrzeniach tensorowych.

Łatwo zauważyć, że aby napisać reprezentację iloczynu tensorowego należy dopisać do siebie reprezentacje obu tensorów.

Definicja 6.4. Prostym nasunięciem tensorów z przestrzeni $\mathcal{T}_p$, $p \geqslant 1$, na tensory z przestrzeni $\mathcal{T}_q$, $q \geqslant 1$ nazywamy odwzorowanie: $\mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_q \rightarrow \mathcal{T}_{p+q-2}$ określone następująco

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p} \bigwedge_{\underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_q} \underset{\sim\sim}{AB} := \underset{(p,p+1)}{\mathrm{tr}} \underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B}$$

Tensor $\underset{\sim\sim}{AB} \in \mathcal{T}_{p+q-2}$ nazywamy prostym nasunięciem tensora $\underset{\sim}{A}$ na tensor $\underset{\sim}{B}$.

Działanie prostego nasunięcia tensorów jest odwzorowaniem dwuliniowym.

Definicja 6.5. Pełnym nasunięciem tensorów z przestrzeni $\mathcal{T}_p$, na tensory z przestrzeni $\mathcal{T}_q$ nazywamy odwzorowanie $\circ : \mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_q \longrightarrow \mathcal{T}_{|p-q|}$ określone następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p} \bigwedge_{\underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_q} \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} := \begin{cases} \underset{(p+1-q,p+1)}{\mathrm{tr}} \ \underset{(p+2-q,p+2)}{\mathrm{tr}} \cdots \underset{(p,p+q)}{\mathrm{tr}} \underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B} & \text{dla } p \geqslant q \\ \underset{(1,p+1)}{\mathrm{tr}} \ \underset{(2,p+2)}{\mathrm{tr}} \cdots \underset{(p,p+p)}{\mathrm{tr}} \underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B} & \text{dla } p < q \end{cases}$$

Tensor $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_{|p-q|}$ nazywamy pełnym nasunięciem tensora $\underset{\sim}{A}$ na tensor $\underset{\sim}{B}$.

Działanie pełnego nasunięcia tensorów jest odwzorowaniem dwuliniowym.

Łatwo wykazać, że działanie pełnego nasunięcia tensorów z przestrzeni $\mathcal{T}_p$ na tensory z przestrzeni $\mathcal{T}_p$, a więc odwzorowanie $\circ : \mathcal{T}_p \times \mathcal{T}_p \rightarrow \mathcal{T}_0 = R$ określone następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_p} \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} = \underset{(1,p+1)}{\mathrm{tr}} \ \underset{(2,p+2)}{\mathrm{tr}} \cdots \underset{(p,2p)}{\mathrm{tr}} \underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B}$$

jest iloczynem skalarnym w przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$.

Wniosek 6.2. Przestrzeń tensora $\mathcal{T}_p$ nad przestrzenią euklidesową E^n jest przestrzenią euklidesową o wymiarze $\dim \mathcal{T}_p = n^p$.

Iloczyn skalarny tensorów w przestrzeni tensorowej euklidesowej najwygodniej obliczać, jeśli jeden z tensorów zapiszemy w bazie, a drugi w kobazie względem tej bazy lub obydwa zapiszemy w bazie ortonormalnej.

P r z y k ł a d 6.4. Niech między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ przestrzeni euklidesowej E^3 zachodzą zależności:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = \underset{\sim}{e}^1 - \underset{\sim}{e}^2 \\ \underset{\sim}{e}_2 = -\underset{\sim}{e}^1 + 2\underset{\sim}{e}^2 - \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{e}_3 = -\underset{\sim}{e}^2 + 2\underset{\sim}{e}^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = \underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = 2\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = 3\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3 \end{cases}$$

Macierze przejścia między tymi bazami zostały znalezione w przykładzie 3.10. Niech będą dane tensory $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_3$ i $\underset{\sim}{C} \in \mathcal{T}_2$ takie, że

$$\underset{\sim}{A} = 2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 - 3\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{e}^2 \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$$

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{d}^1 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 - \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^3 \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{d}^\alpha \otimes \underset{\sim}{d}^\beta \otimes \underset{\sim}{e}^i\}$$

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{d}_2 - \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}_3 \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$$

a) znajdziemy iloczyny tensorowe tensorów $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{C}$ oraz $\underset{\sim}{C}$ i $\underset{\sim}{A}$, więc

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{C} &= (2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 - 3\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{e}^2) \otimes (\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{d}_2 - \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}_3) = \\ &= 2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 \otimes \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{d}_2 - 3\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{e}^2 \otimes \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{d}_2 - \\ &- 2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}_3 + 3\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{e}^2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{C} \otimes \underset{\sim}{A} &= (\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{d}_2 - \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}_3) \otimes (2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 - 3\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{e}^2) = \\ &= 2\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{d}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 - 2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 - \\ &- 3\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{d}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{e}^2 + 3\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{e}^2\end{aligned}$$

b) nasuniemy prosto tensory $\mathbf{A}$ na $\mathbf{C}$ i $\mathbf{C}$ na $\mathbf{A}$, więc

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AC} = \underset{(3,4)}{\mathrm{tr}}\ \mathbf{A}\otimes\mathbf{C} &= 2(\mathbf{e}^1\circ\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{d}^2\otimes\mathbf{d}_2 - 3(\mathbf{e}^2\circ\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{d}^3\otimes\mathbf{d}_2 - \\
&- 2(\mathbf{e}^1\circ\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{d}^2\otimes\mathbf{d}_3 + 3(\mathbf{e}^2\circ\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{d}^3\otimes\mathbf{d}_3 = \\
&= 2\delta^1_1\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{d}^2\otimes\mathbf{d}_2 - 3\delta^2_1\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{d}^3\otimes\mathbf{d}_2 - 2\delta^1_2\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{d}^2\otimes\mathbf{d}_3 + \\
&+ 3\delta^2_2\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{d}^3\otimes\mathbf{d}_3 = 2\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{d}^2\otimes\mathbf{d}_2 + 3\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{d}^3\otimes\mathbf{d}_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{CA} = \underset{(2,3)}{\mathrm{tr}}\ \mathbf{C}\otimes\mathbf{A} &= 2(\mathbf{d}_2\circ\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{d}^2\otimes\mathbf{e}^1 - 2(\mathbf{d}_3\circ\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{d}^2\otimes\mathbf{e}^1 - \\
&- 3(\mathbf{d}_2\circ\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{d}^3\otimes\mathbf{e}^2 + 3(\mathbf{d}_3\circ\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{d}^3\otimes\mathbf{e}^2 = \\
&= 2g_{22}\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{d}^2\otimes\mathbf{e}^1 - 2g_{32}\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{d}^2\otimes\mathbf{e}^1 - 3g_{23}\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{d}^3\otimes\mathbf{e}^2 + \\
&+ 3g_{33}\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{d}^3\otimes\mathbf{e}^2 = 4\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{d}^2\otimes\mathbf{e}^1 + 6\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{d}^2\otimes\mathbf{e}^1 - \\
&- 3\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{d}^3\otimes\mathbf{e}^2 - 3\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{d}^3\otimes\mathbf{e}^2
\end{aligned}
$$

c) wykonamy pełne nasunięcie tensorów $\mathbf{A}$ na $\mathbf{C}$ i $\mathbf{C}$ na $\mathbf{A}$, więc

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\circ\mathbf{C} = \underset{(2,4)}{\mathrm{tr}}\ \underset{(3,5)}{\mathrm{tr}}\ \mathbf{A}\otimes\mathbf{C} &= 2(\mathbf{d}^2\circ\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}^1\circ\mathbf{d}_2)\mathbf{e}_2 - \\
&- 3(\mathbf{d}^3\circ\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}^2\circ\mathbf{d}_2)\mathbf{e}_3 - 2(\mathbf{d}^2\circ\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}^1\circ\mathbf{d}_3)\mathbf{e}_2 + \\
&+ 3(\mathbf{d}^3\circ\mathbf{e}_2)(\mathbf{e}^2\circ\mathbf{d}_3)\mathbf{e}_3 = 2g^2_1g^1_2\mathbf{e}_2 - 3g^3_1g^2_2\mathbf{e}_3 - \\
&- 2g^2_2g^1_3\mathbf{e}_2 + 3g^3_2g^2_3\mathbf{e}_3 = 2\cdot1\cdot2\mathbf{e}_2 - 3\cdot1\cdot3\mathbf{e}_3 \\
&(-2)\cdot(-1)\cdot(-1)\mathbf{e}_2 + 3\cdot2(-3)\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_2 - 27\mathbf{e}_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}\circ\mathbf{A} = \underset{(1,3)}{\mathrm{tr}}\ \underset{(2,4)}{\mathrm{tr}}\ \mathbf{C}\otimes\mathbf{A} &= 2(\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_2)(\mathbf{d}_2\circ\mathbf{d}^2)\mathbf{e}^1 - \\
&- 2(\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_2)(\mathbf{d}_3\circ\mathbf{d}^2)\mathbf{e}^1 - 3(\mathbf{e}_1\circ\mathbf{e}_3)(\mathbf{d}_2\circ\mathbf{d}^3)\mathbf{e}^2 + \\
&+ 3(\mathbf{e}_2\circ\mathbf{e}_3)(\mathbf{d}_3\circ\mathbf{d}^3)\mathbf{e}^2 = 2g_{12}\delta^2_2\mathbf{e}^1 - 2g_{22}\delta^2_3\mathbf{e}^1 - \\
&- 3g_{13}\delta^3_2\mathbf{e}^2 + 3g_{23}\delta^3_3\mathbf{e}^2 = 2\cdot(-1)\cdot1\mathbf{e}^1 - 2\cdot2\cdot0\mathbf{e}^1 - \\
&- 3\cdot0\cdot0\mathbf{e}^2 + 3\cdot(-1)\cdot1\mathbf{e}^2 = -2\mathbf{e}^1 - 3\mathbf{e}^2
\end{aligned}
$$

d) obliczymy iloczyn skalarny tensorów $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$, więc

$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} = \underset{(1,4)}{\mathrm{tr}} \; \underset{(2,5)}{\mathrm{tr}} \; \underset{(3,6)}{\mathrm{tr}} \; \underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B} =$$

$$= \underset{(1,4)}{\mathrm{tr}} \; \underset{(2,5)}{\mathrm{tr}} \; \underset{(3,6)}{\mathrm{tr}} \; (2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 \otimes \underset{\sim}{d}^1 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 -$$

$$- 3\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{e}^2 \otimes \underset{\sim}{d}^1 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 - 2\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^1 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^3 +$$

$$+ 3\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{e}^2 \otimes \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{e}^3) =$$

$$= 2g^1_2 g^{22} g^{11} - 3g^1_3 g^{32} g^{21} - 2g^3_2 g^{22} g^{13} + 3g^3_3 g^{32} g^{23} =$$

$$= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 - 3(-3)\,0\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1 + 3(-4)\,0\cdot 1 = 8$$

Definicja 6.6. Niech $\sum_p$ będzie grupą permutacji zbioru $\{1,2,\dots,p\}$. Permutacją tensorów z przestrzeni $\mathcal{T}_p$ nazywamy odwzorowanie $*: \sum_p \times \mathcal{T}_p \longrightarrow \mathcal{T}_p$ liniowe względem tensorów określone na tensorach prostych (np. bazy) następująco:

$$\bigwedge_{\sigma \in \Sigma_p} \; \bigwedge_{\underset{\sim}{a}_1, \underset{\sim}{a}_2, \dots, \underset{\sim}{a}_p \in E^n} \sigma * (\underset{\sim}{a}_1 \otimes \underset{\sim}{a}_2 \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{a}_p) = \underset{\sim}{a}_{\sigma(1)} \otimes \underset{\sim}{a}_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{a}_{\sigma(p)}$$

Tensor $\sigma * \underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ nazywamy permutacją tensora $\underset{\sim}{A}$.

Dla dowolnych permutacji $\sigma_1, \sigma_2 \in \sum_p$ i dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ mamy

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2) * \underset{\sim}{A} = \sigma_1 * (\sigma_2 * \underset{\sim}{A})$$

gdzie "$\circ$" jest składaniem permutacji.

Niech $p = 2$, to $\sum_2 = \{(1,2), (2,1)\}$. Tensorem transponowanym do tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy tensor $\underset{\sim}{A}^T := (2,1) * \underset{\sim}{A}$.

P r z y k ł a d 6.5. Niech będzie dana permutacja $\sigma \in \sum_3$ i tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_3$ takie, że $\sigma = (2,3,1)$ i $\underset{\sim}{A} = A^i{}_{\alpha j} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha \otimes \underset{\sim}{e}^j$. Znajdziemy permutację σ tensora $\underset{\sim}{A}$. Zatem

$$\sigma * \underset{\sim}{A} = (2,3,1) * (A^i{}_{\alpha j} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha \otimes \underset{\sim}{e}^j) = A^i{}_{\alpha j} \underset{\sim}{d}^\alpha \otimes \underset{\sim}{e}^j \otimes \underset{\sim}{e}_i$$

Definicja 6.7. Niech $\vartheta(E^n,E^n)$ będzie grupą odwzorowań ortogonalnych przestrzeni euklidesowej E^n z przykładu 4.2. Obrotem tensorów z przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ nazywamy odwzorowanie $* : \vartheta \times \mathcal{T}_p \longrightarrow \mathcal{T}_p$ określone następująco:

$$\bigwedge_{Q\in\vartheta} \bigwedge_{\underset{\sim}{A}\in\mathcal{T}_p} Q * \underset{\sim}{A} = Q * \left(A^{i\dots A}_{\cdot\cdot\alpha\cdot\cdot\cdot} \underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}_A \right) :=$$

$$= A^{i\dots A}_{\cdot\cdot\alpha\cdot\cdot\cdot} Q(\underset{\sim}{e}_i) \otimes \dots \otimes Q(\underset{\sim}{d}^{\alpha}) \otimes \dots \otimes Q(\underset{\sim}{l}_A)$$

Tensor $Q * \underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ nazywamy obrotem Q tensora $\underset{\sim}{A}$.

Odwzorowanie obrotu tensorów jest liniowe względem tensorów. Dla dowolnych izomorfizmów ortogonalnych $Q_1, Q_2 \in \vartheta$ i dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ mamy $(Q_1 \circ Q_2) * \underset{\sim}{A} = Q_1 * (Q_2 * \underset{\sim}{A})$, gdzie $\circ$ jest składaniem odwzorowań.

P r z y k ł a d 6.6. Niech $\{\underset{\sim}{i}_i\}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej E^3. Odwzorowanie liniowe $Q : E^3 \longrightarrow E^3$ określone na wektorach bazy następująco:

$$\begin{cases} Q(\underset{\sim}{i}_1) = \underset{\sim}{i}_1 \\ Q(\underset{\sim}{i}_2) = \cos\varphi \underset{\sim}{i}_2 + \sin\varphi \underset{\sim}{i}_3 \\ Q(\underset{\sim}{i}_3) = -\sin\varphi \underset{\sim}{i}_2 + \cos\varphi \underset{\sim}{i}_3 \end{cases}$$

jest izomorfizmem ortogonalnym (obrotem) w przestrzeni E^3. Znajdziemy obrót Q tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ takiego, że $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_2 - 2\underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_3$.

$$Q * \underset{\sim}{A} = Q * (\underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_2 - 2\underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_3) = Q(\underset{\sim}{i}_1) \otimes Q(\underset{\sim}{i}_2) - 2Q(\underset{\sim}{i}_2) \otimes Q(\underset{\sim}{i}_3) =$$

$$= \underset{\sim}{i}_1 \otimes (\cos\varphi \underset{\sim}{i}_2 + \sin\varphi \underset{\sim}{i}_3) +$$

$$- 2(\cos\varphi \underset{\sim}{i}_2 + \sin\varphi \underset{\sim}{i}_3) \otimes (-\sin\varphi \underset{\sim}{i}_2 + \cos\varphi \underset{\sim}{i}_3)$$

Stąd

$$Q * \underset{\sim}{A} = \cos\varphi \underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_2 + \sin\varphi \underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_3 + 2\sin\varphi \cos\varphi \underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_2 -$$

$$- 2\cos^2\varphi \underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_3 + 2\sin^2\varphi \underset{\sim}{i}_3 \otimes \underset{\sim}{i}_2 - 2\sin\varphi \cos\varphi \underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_3$$

Zatem w bazie $\{\underset{\sim}{i}_i \otimes \underset{\sim}{i}_j\}$ tensory $\underset{\sim}{A}$ i $Q * \underset{\sim}{A}$ mają reprezentację odpowiednio

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [(Q * A)^{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & \sin 2\varphi & -2\cos^2\varphi \\ 0 & 2\sin^2\varphi & -\sin 2\varphi \end{bmatrix}$$

Izomorfizm ortogonalny $Q \in \vartheta(E^n, E^n)$ przestrzeni euklidesowej E^n wyznacza odwzorowanie $Q : \mathcal{T}_p \to \mathcal{T}_p$ obrotu tensorów określone następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p} Q(\underset{\sim}{A}) := Q * \underset{\sim}{A}$$

które, jak łatwo sprawdzić, jest izomorfizmem ortogonalnym w przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ nad przestrzenią euklidesową E^n.

Należy zaznaczyć, że w przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ istnieją izomorfizmy ortogonalne, które nie są wyznaczone przez izomorfizmy ortogonalne przestrzeni euklidesowej E^n.

6.3. Związki między formami wieloliniowymi i odwzorowaniami liniowymi a tensorami

Twierdzenie 6.3. Niech $\mathcal{T}_p$ będzie przestrzenią tensorową nad przestrzenią euklidesową E^n. Forma $1 : E^n \times E^n \times \ldots \times E^n \to R$ jest p-liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jeden tensor $\underset{\sim}{1} \in \mathcal{T}_p$ taki, że

$$\bigwedge_{\underset{1}{\underset{\sim}{a}}, \underset{2}{\underset{\sim}{a}}, \ldots, \underset{p}{\underset{\sim}{a}} \in E^n} 1(\underset{1}{\underset{\sim}{a}}, \underset{2}{\underset{\sim}{a}}, \ldots, \underset{p}{\underset{\sim}{a}}) = \underset{\sim}{1} \circ (\underset{1}{\underset{\sim}{a}} \otimes \underset{2}{\underset{\sim}{a}} \otimes \ldots \otimes \underset{p}{\underset{\sim}{a}})$$

gdzie $\circ$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni euklidesowej $\mathcal{T}_p$.

Dowód analogiczny do dowodu twierdzenia 5.3.

Z twierdzenia tego wynika, że forma p-liniowa 1 wyznacza jednoznacznie tensor $\underset{\sim}{1}$ określony wzorem