7. PRZESTRZENIE TENSOROWE O WALENCJI DWA

7.1. Pierścień tensorów

Przestrzeń tensorowa $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$ o walencji dwa nad przestrzenią euklidesową E^n z działaniami dodawania tensorów i mnożenia tensorów przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych R. Bazę tej przestrzeni stanowi np. zbiór tensorów prostych $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}\}$, przy czym $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{d}^{\alpha}\}$ są bazami przestrzeni euklidesowej E^n. Wymiar tej przestrzeni wynosi $\dim \mathcal{T}_2 = n^2$. Przestrzeń tensorowa $\mathcal{T}_2$ jest przestrzenią euklidesową z iloczynem skalarnym określonym jako pełne nasunięcie tensorów tej przestrzeni.

Ponadto można udowodnić:

Twierdzenie 7.1. Przestrzeń tensorowa $\mathcal{T}_2$ o walencji dwa z działaniami dodawania tensorów i prostego nasuwania tensorów jest pierścieniem nieprzemiennym z jedynką.

Jedynką pierścienia $\mathcal{T}_2$ jest tensor jednostkowy $\underset{\sim}{1}$ określony w przykładzie 6.7.

Twierdzenie 7.2. Niech $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$. Wtedy otrzymamy wzory:

1) $\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2} \quad \mathrm{tr}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{1} \circ \underset{\sim}{A}$

2) $\bigwedge_{\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2} \quad \mathrm{tr}(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}) = \mathrm{tr}(\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A})$

3) $\bigwedge_{\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in E^n} \quad \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{b}$

gdzie "$\circ$" jest pełnym nasunięciem tensorów.

Dowód

1) dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ mamy

$$\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{A} = \mathrm{tr}(A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j) = A^i{}_j (\underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{e}^j) = A^i{}_j \delta^j_i = A^i{}_i$$

$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{1} = (A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j) \circ (\underset{\sim}{e}^k \otimes \underset{\sim}{e}_k) = \underset{(1,3)}{\mathrm{tr}}\ \underset{(2,4)}{\mathrm{tr}}\ A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j \otimes \underset{\sim}{e}^k \otimes \underset{\sim}{e}_k =$$

$$= A^i{}_j \delta^k_i \delta^j_k = A^k{}_k$$

$$\underset{\sim}{1} \circ \underset{\sim}{A} = (\underset{\sim}{e}^k \otimes \underset{\sim}{e}_k) \circ (A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j) = \underset{(1,3)}{\mathrm{tr}}\ \underset{(2,4)}{\mathrm{tr}}\ A^i{}_j \underset{\sim}{e}^k \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j =$$

$$= A^i{}_j \delta^k_i \delta^j_k = A^k{}_k .$$

Stąd $\mathrm{tr}\ \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{1} \circ \underset{\sim}{A}$.

2) dla dowolnych tensorów $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2$ mamy

$$\mathrm{tr}(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}) = \mathrm{tr}((A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j)(B^k{}_l \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}^l)) = \mathrm{tr}\ A^i{}_j B^k{}_l \delta^j_k \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^l =$$

$$= A^i{}_j B^k{}_l \delta^j_k \delta^l_i = A^i{}_k B^k{}_i$$

$$\mathrm{tr}(\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}) = \mathrm{tr}((B^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j)(A^k{}_l \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}^l)) = \mathrm{tr}\ B^i{}_j A^k{}_l \delta^j_k e_i \otimes e^l =$$

$$= B^i{}_j A^k{}_l \delta^j_k \delta^l_i = B^i{}_k A^k{}_i$$

Stąd $\mathrm{tr}(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B}) = \mathrm{tr}(\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A})$.

3) dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathcal{T}_1$ mamy

$$\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b} = (a^i \underset{\sim}{e}_i)(b_j \underset{\sim}{e}^j) = a^i b_j \delta^j_i = a^i b_i$$

$$\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{b} = (a^i \underset{\sim}{e}_i)(\underset{\sim}{e}^k \otimes \underset{\sim}{e}_k)(b_j \underset{\sim}{e}^j) = a^i b_j \delta^k_i \delta^j_k = a^k b_k$$

Stąd $\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{b}$.

Ze wzoru 3) tego twierdzenia wynika, że za pomocą tensora jednostkowego daje się zapisać iloczyn skalarny wektorów, który wyznacza metrykę w przestrzeni euklidesowej $\mathcal{T}_1$. Dlatego też, tensor jednostkowy nazywamy często tensorem metrycznym.

Definicja 7.1. Tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy odwracalnym, jeśli istnieje tensor $\underset{\sim}{A}' \in \mathcal{T}_2$ taki, że

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}' = \underset{\sim}{A}'\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{1}$$

Tensor $\underset{\sim}{A}'$ nazywamy odwrotnym do tensora $\underset{\sim}{A}$ i oznaczamy przez $\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$, więc $\underset{\sim}{A}' = \overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$.

Można wykazać, że zachodzą warunki:

1) jeśli tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ jest odwracalny, to tensor odwrotny $\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$ jest odwracalny i zachodzi wzór $\left(\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}\right)^{-1} = \underset{\sim}{A}$,

2) jeśli tensory $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2$ są odwracalne, to tensor $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2$ jest odwracalny i zachodzi wzór $(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B})^{-1} = \overset{-1}{\underset{\sim}{B}}\,\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$.

Definicja 7.2. Tensorem transponowanym do tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy tensor $\underset{\sim}{A}^T \in \mathcal{T}_2$ taki, że

$$\underset{\sim}{A}^T := (2,1) * \underset{\sim}{A}$$

gdzie $(2,1)$ jest permutacją z grupy permutacji $\Sigma_2 = \{(1,2),\ (2,1)\}$.

Łatwo wykazać, że transpozycja tensorów ma własności:

1) $\bigwedge\limits_{\alpha \in R} \bigwedge\limits_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2} (\alpha \underset{\sim}{A})^T = \alpha \underset{\sim}{A}^T$

2) $\bigwedge\limits_{\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2} (\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B})^T = \underset{\sim}{A}^T + \underset{\sim}{B}^T$

3) $\bigwedge\limits_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2} (\underset{\sim}{A}^T)^T = \underset{\sim}{A}$

4) $\bigwedge\limits_{\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2} (\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B})^T = \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{A}^T$

5) $\bigwedge\limits_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2} (\overset{-1}{\underset{\sim}{A}})^T = (\underset{\sim}{A}^T)^{-1}$ o ile tensor $\underset{\sim}{A}$ jest odwracalny.

7.2. Rozkład tensora na część symetryczną i antysymetryczną oraz kulistą i dewiatorową

Definicja 7.3:

a) tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy symetrycznym, jeśli $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^T$,

b) tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy antysymetrycznym, jeśli $\underset{\sim}{A} = -\underset{\sim}{A}^T$.

Twierdzenie 7.3. Tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ jest symetryczny (antysymetryczny) wtedy i tylko wtedy, gdy jego reprezentacja w ba-