Twierdzenie 4.3. Przestrzenie euklidesowe skończenie wymiarowe E i E' są izomorficznie ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim E = \dim E'$.

Dowód. $\Longrightarrow$ Wynika z twierdzenia 2.4.

$\Longleftarrow$ Niech $\dim E = \dim E' = n$. Wtedy istnieją bazy ortonormalne $\{\underset{\sim}{i}_1, \underset{\sim}{i}_2, \dots, \underset{\sim}{i}_n\}$ przestrzeni E i $\{\underset{\sim}{i}'_1, \underset{\sim}{i}'_2, \dots, \underset{\sim}{i}'_n\}$ przestrzeni E'. Wprowadzimy odwzorowanie $f : E \longrightarrow E'$ spełniające warunki: $f(\underset{\sim}{i}_1) = \underset{\sim}{i}'_1$, $f(\underset{\sim}{i}_2) = \underset{\sim}{i}'_2, \dots, f(\underset{\sim}{i}_n) = \underset{\sim}{i}'_n$. Z twierdzenia 2.3 wynika, że istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe spełniające powyższe warunki. Odwzorowanie to jest wzajemnie jednoznaczne, a więc jest izomorfizmem.

Sprawdzimy czy odwzorowanie f jest ortogonalne. Wystarczy to zrobić na wektorach bazy, więc

$$f(\underset{\sim}{i}_i) \circ f(\underset{\sim}{i}_j) = \bar{\underset{\sim}{i}}_i \circ \bar{\underset{\sim}{i}}_j = \delta_{ij} = \underset{\sim}{i}_i \circ \underset{\sim}{i}_j \quad \text{dla} \quad i,j = 1,\dots,n$$

Zatem odwzorowanie f jest izomorfizmem ortogonalnym.

Wniosek 4.1. Każda n-wymiarowa przestrzeń euklidesowa E^n jest izomorficzna ortogonalnie z n-wymiarową przestrzenią kartezjańską R^n.

4.2. Związki między formami liniowymi a wektorami w przestrzeniach euklidesowych

Twierdzenie 4.4. Niech E^n będzie n-wymiarową przestrzenią euklidesową. Forma $l : E^n \longrightarrow R$ jest liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jeden wektor $\underset{\sim}{l} \in E^n$ taki, że

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{a} \in E^n} l(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{l} \circ \underset{\sim}{a}$$

gdzie $\circ$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni E^n.

Dowód. $\Longrightarrow$ Niech forma $l : E^n \longrightarrow R$ będzie liniowa.

I s t n i e n i e . Weźmy dowolną bazę $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ przestrzeni E^n i przyjmijmy

$$\underset{\sim}{l} := l(\underset{\sim}{e}_i)\underset{\sim}{e}^i$$

Wtedy z własności iloczynu skalarnego i liniowości formy l, dla dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in E^n$ otrzymamy

$$\underset{\sim}{l} \circ \underset{\sim}{a} = (l(\underset{\sim}{e}_i)\underset{\sim}{e}^i) \circ \underset{\sim}{a} = l(\underset{\sim}{e}_i)(\underset{\sim}{e}^i \circ \underset{\sim}{a}) = l(\underset{\sim}{e}_i)a^i = l(a^i\underset{\sim}{e}_i) = l(\underset{\sim}{a})$$

a więc

$$\underset{\sim}{l} \circ \underset{\sim}{a} = l(\underset{\sim}{a}) \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a} \in E^n$$

J e d n o z n a c z n o ś ć . Przypuśćmy, że istnieją wektory $\underset{\sim}{l}$ i $\underset{\sim}{l}' \in E^n$ takie, że

$$l(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{l} \circ \underset{\sim}{a} \quad \text{i} \quad l(\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{l}' \circ \underset{\sim}{a} \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a} \in E^n.$$

Wtedy

$$\underset{\sim}{l} \circ \underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{l}' \circ \underset{\sim}{a} \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a} \in E^n$$

a stąd

$$(\underset{\sim}{l} - \underset{\sim}{l}') \circ a = 0 \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a} \in E^n$$

Przyjmując za $\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{l} - \underset{\sim}{l}'$ otrzymujemy $(\underset{\sim}{l} - \underset{\sim}{l}') \circ (\underset{\sim}{l} - \underset{\sim}{l}') = 0$, a stąd $\underset{\sim}{l} - \underset{\sim}{l}' = 0$, zatem $\underset{\sim}{l} = \underset{\sim}{l}'$. Wykazaliśmy więc istnienie i jednoznaczność wektora wyznaczającego odwzorowanie liniowe.

$\Leftarrow$ Niech będzie dany wektor $\underset{\sim}{l} \in E^n$. Wprowadzimy formę $l : E^n \to R$ określoną następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{a} \in E^n} l(\underset{\sim}{a}) := \underset{\sim}{l} \circ \underset{\sim}{a}$$

Z własności iloczynu skalarnego, dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in E^n$ i dowolnej liczby $\alpha \in R$ otrzymamy

1) $l(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{l} \circ \underset{\sim}{b} = l(\underset{\sim}{a}) + l(\underset{\sim}{b})$

2) $l(\alpha\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{l} \circ (\alpha\underset{\sim}{a}) = \alpha(\underset{\sim}{l} \circ \underset{\sim}{a}) = \alpha l(\underset{\sim}{a})$

Zatem forma l jest liniowa.

Z powyższego twierdzenia wynika, że formę liniową l określoną na przestrzeni euklidesowej można utożsamiać z wektorem $\underset{\sim}{l} := l(\underset{\sim}{e}_i)\underset{\sim}{e}^i$ tej przestrzeni.

P r z y k ł a d 4.3. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ będzie bazą przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej E^3, a $l : E^3 \to R$ formą liniową określoną następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{a} \in E^n} l(\underset{\sim}{a}) = l(a^1\underset{\sim}{e}_1 + a^2\underset{\sim}{e}_2 + a^3\underset{\sim}{e}_3) := a^1 - 2a^2 - a^3$$

Znajdziemy wektor $\underset{\sim}{l} \in E^3$ wyznaczający formę liniową l.

Z twierdzenia 4.2 wynika, że wektor $\underset{\sim}{l}$ ma postać

$$\underset{\sim}{l} = l(\underset{\sim}{e}_i)\underset{\sim}{e}^i = l(\underset{\sim}{e}_1)\underset{\sim}{e}^1 + l(\underset{\sim}{e}_2)\underset{\sim}{e}^2 + l(\underset{\sim}{e}_3)\underset{\sim}{e}^3$$

gdzie $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ jest kobazą przestrzeni E^3 względem bazy $\{\underset{\sim}{e}_i\}$.
Z określenia formy liniowej mamy

$$l(\underset{\sim}{e}_1) = 1, \quad l(\underset{\sim}{e}_2) = -2, \quad l(\underset{\sim}{e}_3) = -1$$

Zatem

$$\underset{\sim}{l} = \underset{\sim}{e}^1 - 2\underset{\sim}{e}^2 - \underset{\sim}{e}^3$$

Twierdzenie 4.5. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ będzie bazą n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Odwzorowanie $f : E^n \to E^n$ jest izomorfizmem ortogonalnym wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentacja $[f^k{}_i]$ odwzorowania f w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ spełnia warunek

$$[f^k{}_i]^T[g_{kl}][f^l{}_j] = [g_{ij}]$$

gdzie $[g_{ij}]$ jest reprezentacją iloczynu skalarnego $\circ$ w kobazie $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ względem bazy $\{\underset{\sim}{e}_i\}$.

Dowód. Z określenia reprezentacji odwzorowania f w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ wynika, że

$$f(\underset{\sim}{e}_i) = f^k{}_i\underset{\sim}{e}_k \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,n$$

Odwzorowanie f jest ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(\underset{\sim}{e}_i) \circ f(\underset{\sim}{e}_j) = \underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{e}_j \quad \text{dla} \quad i,j = 1,\dots,n$$

Stąd dla $i,j = 1,\dots,n$ kolejno otrzymamy:

$$(f^k{}_i\underset{\sim}{e}_k)(f^l{}_j\underset{\sim}{e}_l) = \underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{e}_j$$

$$f^k{}_i f^l{}_j(\underset{\sim}{e}_k \circ \underset{\sim}{e}_l) = \underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{e}_j$$

$$f^k{}_i f^l{}_j g_{kl} = g_{ij}$$

Zatem mamy

$$\left[f^k{}_i\right]^T \left[g_{kl}\right] \left[f^l{}_j\right] = \left[g_{ij}\right]$$

Wniosek 4.2. Niech $\{i_i\}$ będzie bazą ortonormalną n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Odwzorowanie $f : E^n \to E^n$ jest izomorfizmem ortogonalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jego reprezentacja $\left[f^k{}_i\right]$ jest macierzą ortogonalną, tzn. spełnia warunek

$$\left[f^k{}_i\right]^T \left[f^k{}_j\right] = \left[\delta_{ij}\right]$$

Dowód wynika z twierdzenia 4.5 i faktu, że macierz $\left[g_{ij}\right]$ jest macierzą jednostkową.

4.3. Zadania

Zadanie 4.1. Niech w przestrzeni liniowej wielomianów $R_3[x]$ stopnia co najwyżej trzeciego nad ciałem liczb rzeczywistych iloczyn skalarny będzie określony wzorem

$$\bigwedge_{u,v \in R_3[x]} u \circ v := \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx$$

Zbadać, czy odwzorowania $f : R_3[x] \to R_3[x]$ określone następująco:

a) $\bigwedge_{u \in R_3[x]} f(u)(x) := u(-x)$

b) $\bigwedge_{u \in R_3[x]} f(u)(x) := x^3 u\left(\frac{1}{x}\right)$

są odwzorowaniami ortogonalnymi.

Zadanie 4.2. Niech w przestrzeni liniowej wielomianów $R_3[x]$ będzie określony iloczyn skalarny wzorem:

$$\bigwedge_{w_\alpha, w_\beta \in R_3[x]} w_\alpha \circ w_\beta = (\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3) \circ (\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\beta_3 x^3) :=$$

$$:= \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$