10. POLA TENSOROWE. RÓŻNICZKOWANIE PÓL TENSOROWYCH

10.1. Definicja pola tensorowego. Reprezentacje pola tensorowego

Definicja 10.1. Niech D będzie obszarem przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^n$, a $\mathcal{T}_p$ przestrzenią tensorową o walencji p. Odwzorowanie $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ nazywamy polem tensorowym o walencji p na obszarze D.

Zatem pole tensorowe $\underset{\sim}{\mu}$ przyporządkowuje każdemu punktowi $X \in D$ tensor $\underset{\sim}{\mu}(X) \in \mathcal{T}_p$.

Jeśli p = 0, to pole tensorowe nazywamy skalarnym, a jeśli p = 1 to pole tensorowe nazywamy wektorowym.

Niech $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ będzie polem tensorowym o walencji p w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^n$.

a) jeśli $\{\underset{\sim}{e}_i(X) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}(X) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{1}_A(X)\}$ jest bazą przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ zależną od punktu $X \in D$, to pole tensorowe $\underset{\sim}{\mu}$ można przedstawić w postaci

$$\underset{\sim}{\mu}(X) = \mu^{i\ldots\ldots A}_{\ldots\alpha\ldots}(X)\underset{\sim}{e}_i(X) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}(X) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{1}_A(X) \quad \text{dla } x \in D$$

Funkcje rzeczywiste $\mu^{i\ldots\ldots A}_{\ldots\alpha\ldots}(X)$ dla $X \in D$; $i,\ldots,\alpha,\ldots,A = 1,\ldots,n$ nazywamy współrzędnymi, a macierz funkcją $\left[\mu^{i\ldots\ldots A}_{\ldots\alpha\ldots}(X)\right]$ reprezentacją pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i(X) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}(X) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{1}_A(X)\}$.

b) jeśli $(0,\{\underset{\sim}{i}_i\})$ jest kartezjańskim układem odniesienia w przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^n$, to pole tensorowe można przedstawić w postaci

$$\underset{\sim}{\mu}(\underset{\sim}{x}) = \mu^{i\ldots\ldots\ldots}_{\ldots j\ldots k}(x)\underset{\sim}{i}_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{i}^j \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{i}^k \quad \text{dla } x \in D$$

Funkcje rzeczywiste $\mu^{i\ldots\ldots\ldots}_{\ldots j\ldots k}(x)$ dla $x \in D$; $i,\ldots,j,\ldots k = 1,\ldots,n$ nazywamy współrzędnymi, a macierz funkcyjną $\left[\mu^{i\ldots\ldots\ldots}_{\ldots j\ldots k}(x)\right]$ reprezentacją pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w układzie kartezjańskim,

c) jeśli $X: D_\varphi \to D$ jest układem współrzędnych w obszarze D, to pole tensorowe $\underset{\sim}{\mu}$ można przedstawić w postaci

$$\underset{\sim}{\mu}(\varphi) = \mu^{\alpha\ldots\beta\ldots}_{\ldots\ldots\gamma}(\varphi)\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}_\beta(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}^\gamma(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi\in D$$

gdzie: $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$ jest bazą, a $\{\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)\}$ kobazą wyznaczonymi przez układ współrzędnych krzywoliniowych, oraz $\underset{\sim}{\mu}(\varphi) = \underset{\sim}{\mu}(X(\varphi))$ dla $\varphi\in D_\varphi$, lub w postaci

$$\underset{\sim}{\mu}(\varphi) = \hat{\mu}^{\alpha\ldots\beta\ldots}_{\ldots\ldots\gamma}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}_\alpha(\varphi)\otimes\ldots\otimes\hat{\underset{\sim}{d}}_\beta(\varphi)\otimes\ldots\otimes\hat{\underset{\sim}{d}}^\gamma(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi\in D_\varphi$$

gdzie $\{\hat{\underset{\sim}{d}}_\alpha(\varphi)\}$ i $\{\hat{\underset{\sim}{d}}^\alpha(\varphi)\}$ są bazami fizycznymi wyznaczonymi przez układ współrzędnych krzywoliniowych.

Funkcje rzeczywiste $\mu^{\alpha\ldots\beta\ldots}_{\ldots\ldots\gamma}(\varphi)$ dla $\varphi\in D_\varphi$; $\alpha,\ldots,\beta,\ldots\gamma = 1,\ldots,n$ nazywamy współrzędnymi, a macierz funkcyjną $[\mu^{\alpha\ldots\beta\ldots}_{\ldots\ldots\gamma}(\varphi)]$ reprezentacją pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w układzie współrzędnych krzywoliniowych.

Funkcje rzeczywiste $\hat{\mu}^{\alpha\ldots\beta\ldots}_{\ldots\ldots\gamma}(\varphi)$ dla $\varphi\in D_\varphi$; $\alpha,\ldots,\beta,\ldots,\gamma = 1,2,\ldots,n$ nazywamy fizycznymi współrzędnymi, a macierz funkcyjną $[\hat{\mu}^{\alpha\ldots\beta\ldots}_{\ldots\ldots\gamma}(\varphi)]$ fizyczną reprezentacją pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w układzie współrzędnych krzywoliniowych.

Można wykazać, że między współrzędnymi a fizycznymi współrzędnymi pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w danym układzie współrzędnych krzywoliniowych zachodzą zależności:

1) $$\mu^{\alpha\ldots\beta\ldots}_{\ldots\ldots\gamma}(\varphi) = \hat{\mu}^{\alpha\ldots\beta\ldots}_{\ldots\ldots\gamma}(\varphi)\frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}(\varphi)}}\ldots\frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}(\varphi)}}\ldots\frac{1}{\sqrt{g^{\gamma\gamma}(\varphi)}}$$

dla $\varphi\in D_\varphi$; $\alpha,\ldots,\beta,\ldots,\gamma = 1,\ldots,n$

2) $$\hat{\mu}^{\alpha\ldots\beta\ldots}_{\ldots\ldots\gamma}(\varphi) = \mu^{\alpha\ldots\beta\ldots}_{\ldots\ldots\gamma}(\varphi)\sqrt{g_{\alpha\alpha}(\varphi)}\ldots\sqrt{g_{\beta\beta}(\varphi)}\ldots\sqrt{g^{\gamma\gamma}(\varphi)}$$

dla $\varphi\in D_\varphi$; $\alpha,\ldots,\beta,\ldots,\gamma = 1,\ldots,n$

gdzie $g_{\alpha\beta} = \underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\underset{\sim}{d}_\beta(\varphi)$, $g^{\alpha\beta}(\varphi) = \underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)\underset{\sim}{d}^\beta(\varphi)$ dla $\varphi\in D_\varphi$; $\alpha,\beta = 1,\ldots,n$.

Pole tensorowe $\underset{\sim}{\mu}: D \to \mathcal{T}_p$ będziemy nazywać klasy C^k w obszarze $D\subset\mathcal{E}^n$, jeśli w układzie współrzędnych krzywoliniowych obszaru D klasy co najmniej C^k, współrzędne tego pola są funkcjami rzeczywistymi klasy C^k w obszarze $D_\varphi\subset R^n$.

Twierdzenie 10.1. Niech $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ będzie polem tensorowym w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n, a $X : D_\varphi \to D$ i $X : D_\theta \to D$ będą układami współrzędnych krzywoliniowych w obszarze D. Jeśli funkcje $\mu^{\alpha\cdots\beta\cdots}_{\cdots\cdots\gamma}(\varphi)$ dla $\varphi \in D_\varphi$; $\alpha,\ldots,\beta,\ldots\gamma = 1,\ldots,n$ są współrzędnymi pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w układzie współrzędnych krzywoliniowych $X = X(\varphi)$ dla $\varphi \in D$, a funkcje $\mu^{\mathfrak{A}}{}_{\cdots\mathfrak{B}\cdots\Omega}(\theta)$ dla $\theta \in D_\theta$; $\mathfrak{A},\ldots,\mathfrak{B}\ldots,\Omega = 1,\ldots,n$ są współrzędnymi pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w układzie współrzędnych krzywoliniowych $X = X(\theta)$ dla $\theta \in D_\theta$, to otrzymamy wzór

$$\mu^{\mathfrak{A}\cdots\cdots\cdots}_{\cdots\mathfrak{B}\cdots\Omega}(\theta) = \mu^{\alpha\cdots\beta\cdots}_{\cdots\cdots\gamma}(\varphi(\theta))g^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(\theta)\ \ldots\ g_{\beta\mathfrak{B}}(\theta)\ \ldots\ g^{\gamma}_{\Omega}(\theta)$$

dla $\theta \in D_\theta$; $\mathfrak{A},\ldots,\mathfrak{B},\ldots,\Omega = 1,\ldots,n$

gdzie:

$$g^{\mathfrak{A}}_{\alpha}(\theta) = \underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi(\theta))\underset{\sim}{h}^{\mathfrak{A}}(\theta),\ldots,g_{\alpha\mathfrak{A}}(\theta) = \underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi(\theta))\underset{\sim}{h}_{\Omega}(\theta),\ldots,g^{\alpha}_{\mathfrak{A}}(\theta) =$$

$$= \underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi(\theta))\underset{\sim}{h}_{\mathfrak{A}}(\theta) \quad \text{dla} \quad \alpha, \mathfrak{A} = 1,\ldots,n$$

Dowód wynika z określenia współrzędnych pola tensorowego i wzorów transformacyjnych.

P r z y k ł a d 10.1. Niech pole wektorowe $\underset{\sim}{u} : \varepsilon^3 \to \mathcal{T}_1$ ma współrzędne $u^i(x)$ dla $x \in \varepsilon^3$; $i = 1,2,3$ w kartezjańskim układzie odniesienia

a) znajdziemy współrzędne $u_\alpha(\varphi)$ dla $\varphi \in D_\varphi$; $\alpha = 1,2,3$ tego pola w układzie współrzędnych walcowych. Korzystając ze wzorów transformacyjnych podanych w twierdzeniu 10.1 mamy

$$u_\alpha(\varphi) = u^i(x(\varphi))g_{i\alpha}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \alpha = 1,2,3$$

lub macierzowo

$$\left[u_\alpha(\varphi)\right] = \left[g_{\alpha i}(\varphi)\right]\left[u^i(x(\varphi))\right]$$

a więc należy znaleźć macierze $\left[g_{\alpha i}(\varphi)\right]$ i $\left[u^i(x(\varphi))\right]$.

Ze wzorów podanych w przykładzie 9.1 wynika, że

$$\left[g_{\alpha i}(\varphi)\right] = \left[\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)\underset{\sim}{i}_{i}\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi^2 & \sin\varphi^2 & 0 \\ -\varphi^1\sin\varphi^2 & \varphi^1\cos\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u^i(x(\varphi)) = \begin{bmatrix} u^1(\varphi^1\cos\varphi^2, & \varphi^1\sin\varphi^2, & \varphi^3) \\ u^2(\varphi^1\cos\varphi^2, & \varphi^1\sin\varphi^2, & \varphi^3) \\ u^3(\varphi^1\cos\varphi^2, & \varphi^1\sin\varphi^2, & \varphi^3) \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\left[u_{\alpha}(\varphi)\right] = \left[g_{\alpha i}(\varphi)\right]\left[u^i(x(\varphi))\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi^2 & \sin\varphi^2 & 0 \\ -\varphi^1\sin\varphi^2 & \varphi^1\cos\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1(\varphi^1\cos\varphi^2, \varphi^1\sin\varphi^2, \varphi^3) \\ u^2(\varphi^1\cos\varphi^2, \varphi^1\sin\varphi^2, \varphi^3) \\ u^3(\varphi^1\cos\varphi^2, \varphi^1\sin\varphi^2, \varphi^3) \end{bmatrix}$$

a stąd

$$u_1(\varphi) = u^1(\varphi^1\cos\varphi^2, \varphi^1\sin\varphi^2, \varphi^3)\cos\varphi^2 +$$

$$+ u^2(\varphi^1\cos\varphi^2, \varphi^1\sin\varphi^2, \varphi^3)\sin\varphi^2$$

$$u_2(\varphi) = -u^1(\varphi^1\cos\varphi^2, \varphi^1\sin\varphi^2, \varphi^3)\varphi^1\sin\varphi^2 +$$

$$+ u^2(\varphi^1\cos\varphi^2, \varphi^1\sin\varphi^2, \varphi^3)\varphi^1\cos\varphi^2$$

$$u_3(\varphi) = u^3(\varphi^1\cos\varphi^2, \varphi^1\sin\varphi^2, \varphi^3).$$

b) znajdziemy fizyczne współrzędne $\hat{u}_{\alpha}(\varphi)$ dla $\varphi \in D_{\varphi}$; $\alpha = 1,2,3$ tego pola w układzie współrzędnych walcowych. Korzystając ze wzorów na fizyczne współrzędne pola tensorowego mamy

$$\hat{u}_{\alpha}(\varphi) = u_{\alpha}(\varphi)\sqrt{g^{\alpha\alpha}(\varphi)} \quad \text{dla} \quad \alpha = 1,2,3$$

a więc należy znaleźć macierz $\left[g^{\alpha\beta}(\varphi)\right]$. Macierz ta podana jest w przykładzie 9.1. Zatem

$$\hat{u}_1(\varphi) = u^1(\varphi^1\cos\varphi^2,\ \varphi^1\sin\varphi^2,\ \varphi^3)\cos\varphi^2 +$$
$$+\ u^2(\varphi^1\cos\varphi^2,\ \varphi^1\sin\varphi^2,\ \varphi^3)\sin\varphi^2$$
$$\hat{u}_2(\varphi) = -u^1(\varphi^1\cos\varphi^2,\ \varphi^1\sin\varphi^2,\ \varphi^3)\sin\varphi^2 +$$
$$+\ u^2(\varphi^1\cos\varphi^2,\ \varphi^1\sin\varphi^2,\ \varphi^3)\cos\varphi^2$$
$$\hat{u}_3(\varphi) = u^3(\varphi^1\cos\varphi^2,\ \varphi^1\sin\varphi^2,\ \varphi^3)$$

P r z y k ł a d 10.2. Niech pole tensorowe $\underset{\sim}{A} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{T}_2$ ma reprezentację

$$\left[A^i{}_j(x)\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dla} \quad x \in \mathcal{E}^3$$

w kartezjańskim układzie odniesienia.

a) znajdziemy reprezentację $\left[A_{\Omega\Phi}(\theta)\right]$ dla $\theta \in D_\theta$ pola tensorowego $\underset{\sim}{A}$ w układzie współrzędnych kulistych. Ze wzorów transformacyjnych podanych w twierdzeniu 10.2 mamy

$$A_{\Omega\Phi}(\theta) = A^i{}_j(X(\theta))g_{\Omega i}(\theta)g^j_\Phi(\theta) \quad \text{dla} \quad \theta \in D_\theta; \quad \Omega, \Phi = 1,2,3$$

lub macierzowo

$$\left[A_{\Omega\Phi}(\theta)\right] = \left[g_{\Omega i}(\theta)\right]\left[A^i{}_j(X(\theta))\right]\left[g^j{}_\Phi(\theta)\right] \quad \text{dla} \quad \theta \in D_\theta$$

a więc należy znaleźć macierze $\left[g_{\Omega i}(\theta)\right]$, $\left[g^j{}_\Phi(\theta)\right]$, $\left[A^i{}_j(X(\theta))\right]$. Korzystając z wyników podanych w przykładzie 9.2 otrzymamy

$$\left[g_{\Omega i}(\theta)\right] = \left[g_\Omega^{\ i}(\theta)\right] = \left[\underset{\sim}{h}_\Omega(\theta)\underset{\sim}{i}_i\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta^2\sin\theta^3 & \sin\theta^2\sin\theta^3 & \cos\theta^3 \\ -\theta^1\sin\theta^2\sin\theta^3 & \theta^1\cos\theta^2\sin\theta^3 & 0 \\ \theta^1\cos\theta^2\cos\theta^3 & \theta^1\sin\theta^2\cos\theta^3 & -\theta^1\sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

$$\left[A^{i}{}_{j}(X(\theta))\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\theta^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta^2 & 0 \end{bmatrix}$$

zatem mamy

$$\left[A_{\Omega\Phi}(\theta)\right] = \left[g_{\Omega i}(\theta)\right]\left[A^{i}{}_{j}(X(\theta))\right]\left[g_{\Phi}{}^{j}(\theta)\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta^2\sin\theta^3 & \sin\theta^2\sin\theta^3 & \cos\theta^3 \\ \theta^1\sin\theta^2\sin\theta^3 & \theta^1\cos\theta^2\sin\theta^3 & 0 \\ \theta^1\cos\theta^2\cos\theta^3 & \theta^1\sin\theta^2\cos\theta^3 & \theta^1\sin\theta^3 \end{bmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cos\theta^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta^2\sin\theta^3 & \theta^1\sin\theta^2\sin\theta^3 & \theta^1\cos\theta^2\cos\theta^3 \\ \sin\theta^2\sin\theta^3 & \theta^1\cos\theta^2\sin\theta^3 & \theta^1\sin\theta^2\cos\theta^3 \\ \cos\theta^3 & 0 & -\theta^1\sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

a stąd

$$\left[A_{\Omega\Phi}(\theta)\right] = \begin{bmatrix} \sin\theta^3\cos\theta^3, & \theta^1\sin\theta^2\cos\theta^2\sin\theta^2\cos\theta^3, & \theta^1\sin^2\theta^2\cos^2\theta^2\sin^2\theta^3 \\ -\theta^1\sin\theta^2\cos\theta^2\sin\theta^3\cos\theta^3, & 0, & (\theta^1)^2\sin\theta^2\cos\theta^2\sin\theta^3 \\ \theta^1\cos^2\theta^2\cos^2\theta^3 - \sin^2\theta^2\sin^2\theta^3, & (\theta^1)^2\sin\theta^2\cos\theta^2\sin^2\theta^3, & -(\theta^1)^2\sin\theta^3\cos\theta^3 \end{bmatrix}$$

b) znajdziemy fizyczną reprezentację $[A_{\Omega\Phi}(\theta)]$ dla $\theta \in D_\theta$ pola tensorowego $\underset{\sim}{A}$ w układzie współrzędnych kulistych. Ze wzorów transformacyjnych wiążących współrzędne i fizyczne współrzędne pola tensorowego mamy

$$\underset{\sim}{\hat{A}}_{\Omega\Phi}(\theta) = A_{\Omega\Phi}(\theta)\sqrt{g^{\Omega\Omega}(\theta)}\sqrt{g^{\Phi\Phi}(\theta)} \quad \text{dla } \theta \in D_\theta;\ \Omega, \Phi = 1,2,3$$

a więc należy znaleźć macierz $[g^{\Omega\Phi}(\theta)]$. Macierz ta podana jest w przykładzie 9.2. Zatem

$$\hat{A}_{\Omega\Phi}(\theta) = \begin{bmatrix} \sin\theta^3 \cos\theta^3 & \sin\theta^2\cos\theta^2\cos\theta^3, & \sin^2\theta^2\cos^2\theta^3 - \cos^2\theta^2\sin^2\theta^3 \\ -\sin\theta^2\cos\theta^2\cos\theta^3 & 0 & \sin\theta^2\cos\theta^2\sin\theta^3 \\ (\cos^2\theta^2\cos^2\theta^3 - \sin^2\theta^2\sin^2\theta^3), & \sin\theta^2\cos\theta^2\sin\theta^3, & -\sin\theta^3\cos\theta^3 \end{bmatrix}$$

10.2. Definicje gradientu, dywergencji, laplasjanu i rotacji pola tensorowego. Pochodne kowariantne

Definicja 10.2. Niech $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ będzie polem tensorowym o walencji p na obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^n$. Gradientem pola tensorowego w punkcie $X_0 \in D$ nazywamy tensor $\nabla\underset{\sim}{\mu}(X_0) \in \mathcal{T}_{p+1}$ taki, że

$$\lim_{\underset{\sim}{h} \to \underset{\sim}{0}} \frac{\underset{\sim}{\mu}(X_0 + \underset{\sim}{h}) - \underset{\sim}{\mu}(X_0) - \nabla\underset{\sim}{\mu}(X_0)\underset{\sim}{h}}{\|\underset{\sim}{h}\|} = \underset{\sim}{0}$$

gdzie granicę występującą w tym wzorze obliczamy w przestrzeni euklidesowej (unormowanej) $\mathcal{T}_p$.

Jeśli gradient istnieje w każdym punkcie obszaru, to jest polem tensorowym o walencji p+1 w tym obszarze.

Gradientem k-tego rzędu pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w punkcie $X_0 \in D$ nazywamy tensor $\overset{k}{\nabla}\underset{\sim}{\mu}(X_0) \in \mathcal{T}_{p+k}$ określony rekurencyjnie

$$\overset{k}{\nabla}\underset{\sim}{\mu}(X_0) := \begin{cases} \nabla\underset{\sim}{\mu}(X_0) & \text{dla } k = 1 \\ \nabla(\overset{k-1}{\nabla}\underset{\sim}{\mu})(X_0) & \text{dla } k = 2,3,\ldots \end{cases}$$

Jeśli gradient k-tego rzędu istnieje w każdym punkcie obszaru, to jest polem tensorowym o walencji p+k w tym obszarze.

Definicja 10.3. Niech $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ będzie polem tensorowym o walencji $p \geq 1$ na obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^n$, a q - liczbą naturalną taką, że $1 \leq q \leq p$. q-tą diwer-