więc $\left[g_{i\alpha}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$, a stąd $\left[g^{\alpha i}\right] = \left[g_{i\alpha}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Korzystając ze wzorów podanych w twierdzeniu 3.5 mamy $g^{\alpha}_{i} = g^{\alpha j} g_{ji}$ dla $\alpha = 1,2,3$ lub macierzowo $\left[g^{\alpha}{}_{i}\right] = \left[g^{\alpha j}\right]\left[g_{ji}\right]$,

stąd $\left[g^{\alpha}{}_{i}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Zatem

$$\left[A^{\alpha\beta}\right] = \left[g^{\alpha}{}_{i}\right]\left[A^{ij}\right]\left[g^{\beta}{}_{j}\right]^{T} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7.5. Tensory ortogonalne. Rozkład biegunowy tensora

Definicja 7.11. Tensor $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy ortogonalnym, jeśli spełnia warunki: $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1}$.

Jak wiadomo, zbiór tensorów ortogonalnych $\vartheta = \left\{ \underset{\sim}{Q} \in \mathcal{T}_2 : \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1} \right\}$ z działaniem prostego nasunięcia jest grupą. Łatwo zauważyć, że dla tensora ortogonalnego $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ istnieje tensor odwrotny $\underset{\sim}{Q}^{-1} = \underset{\sim}{Q}^T$ oraz $\det \underset{\sim}{Q} = 1$ lub $\det \underset{\sim}{Q} = -1$. Tensor ortogonalny $\underset{\sim}{Q}$ traktowany jako odwzorowanie liniowe $\underset{\sim}{Q} : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$ jest izomorfizmem ortogonalnym w przestrzeni $\mathcal{T}_1$, co oznacza, że zachowuje długości wektorów i kąty między wektorami (przykład 6.9).

W przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$ nad przestrzenią euklidesową E^3 tensor ortogonalny $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ ma co najmniej jedną wartość własną równą 1 lub -1. Tensor $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ taki, że det $\underset{\sim}{Q} = 1$, ma wartość własną $\lambda = 1$, a tensor $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ taki, że det $\underset{\sim}{Q} = -1$, ma wartość własną $\lambda = -1$.

<u>Twierdzenie</u> 7.17. Niech $\mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$. Wtedy dla każdego tensora ortogonalnego $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ istnieje baza ortonormalna $\{\underset{\sim}{q}_i\}$ przestrzeni E^3 i liczba rzeczywista $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ takie, że tensor $\underset{\sim}{Q}$ daje się przedstawić w postaci

$$\underset{\sim}{Q} = \det \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{q}_1 \otimes \underset{\sim}{q}_1 + \cos\varphi(\underset{\sim}{q}_2 \otimes \underset{\sim}{q}_2 + \underset{\sim}{q}_3 \otimes \underset{\sim}{q}_3) - \sin\varphi(\underset{\sim}{q}_2 \otimes \underset{\sim}{q}_3 - \underset{\sim}{q}_3 \otimes \underset{\sim}{q}_2))$$

Dowód twierdzenia pomijamy. Łatwo jednak na podstawie postaci tensora $\underset{\sim}{Q}$ wywnioskować, że $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1}$.

Z twierdzenia tego wynika, że dla każdego tensora ortogonalnego $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ istnieje baza ortonormalna $\{\underset{\sim}{q}_i\}$ przestrzeni E^3 i liczba $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ takie, że reprezentacja $[Q^{ij}]$ tensora $\underset{\sim}{Q}$ w bazie $\{\underset{\sim}{q}_i \otimes \underset{\sim}{q}_j\}$ jest macierzą o postaci

$$Q^{ij} = \det \underset{\sim}{Q} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

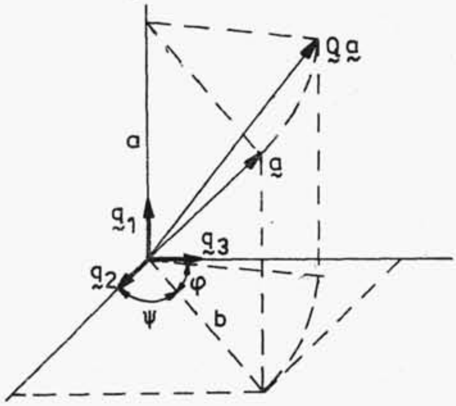
Tensor ortogonalny $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ nazywać będziemy tensorem obrotu, jeśli det $\underset{\sim}{Q} = 1$, lub lustrzanym tensorem obrotu, jeśli det $\underset{\sim}{Q} = -1$.

Zbiór tensorów obrotu $\mathcal{R} = \{\underset{\sim}{Q} \in \vartheta : \det \underset{\sim}{Q} = 1\}$ jest grupą z działaniem prostego nasunięcia tensorów. Grupa ta jest podgrupą grupy tensorów ortogonalnych i nazywamy ją właściwą grupą ortogonalną. Natomiast zbiór tensorów lustrzanego obrotu $\mathcal{R}' = \{\underset{\sim}{Q} \in \vartheta : \det \underset{\sim}{Q} = -1\}$ nie jest grupą. Łatwo zauważyć, że $\vartheta = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$.

P r z y k ł a d 7.7. Niech $\{\underset{\sim}{q}_i\}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni E^3, a $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{q}_1 \otimes \underset{\sim}{q}_1 + \cos\varphi(\underset{\sim}{q}_2 \otimes \underset{\sim}{q}_2 + \underset{\sim}{q}_3 \otimes \underset{\sim}{q}_3) - \sin\varphi(\underset{\sim}{q}_2 \otimes \underset{\sim}{q}_3 - \underset{\sim}{q}_3 \otimes \underset{\sim}{q}_2)$ tensorem obrotu. Znajdziemy obraz dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in E^3$ przy odwzorowaniu $\underset{\sim}{Q}$.

Przedstawmy wektor $\underset{\sim}{a} \in E^3$ w bazie $\{\underset{\sim}{q}_i\}$ w postaci (rys.7.2)

$$\underset{\sim}{a} = a\underset{\sim}{q}_1 + b\cos\psi\,\underset{\sim}{q}_2 + b\sin\psi\,\underset{\sim}{q}_3$$



Rys.7.2

Znajdziemy $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}$, zatem otrzymamy

$$\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} = (\underset{\sim}{q}_1 \otimes \underset{\sim}{q}_1 + \cos\varphi(\underset{\sim}{q}_2 \otimes \underset{\sim}{q}_2 + \underset{\sim}{q}_3 \otimes \underset{\sim}{q}_3) -$$

$$- \sin\varphi(\underset{\sim}{q}_2 \otimes \underset{\sim}{q}_3 - \underset{\sim}{q}_3 \otimes \underset{\sim}{q}_2))(a\underset{\sim}{q}_1 + b\cos\psi\,\underset{\sim}{q}_2 + b\sin\psi\,\underset{\sim}{q}_3) =$$

$$= a\underset{\sim}{q}_1 + b\cos\varphi\,\cos\psi\,\underset{\sim}{q}_2 + b\sin\varphi\,\cos\psi\,\underset{\sim}{q}_3 + b\cos\varphi\,\sin\psi\,\underset{\sim}{q}_3 -$$

$$- b\sin\varphi\,\sin\psi\,\underset{\sim}{q}_2.$$

Stąd

$$\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} = a\underset{\sim}{q}_1 + b\cos(\psi + \varphi)\underset{\sim}{q}_2 + b\sin(\psi + \varphi)\underset{\sim}{q}_3$$

Porównując wektory $\underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}$ widać, że wektor $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}$ został otrzymany przez obrót wektora $\underset{\sim}{a}$ wokół osi wyznaczonej przez wektor $\underset{\sim}{q}_1$ o kąt φ. Zatem tensor $\underset{\sim}{Q}$ obraca wektory o kąt φ wokół osi $\underset{\sim}{q}_1$. Przykład ten wyjaśnia nazwę "tensor obrotu".

Tensory właściwej grupy ortogonalnej będziemy oznaczać przez $\underset{\sim}{R}^{\varphi}_{\underset{\sim}{k}}$. Zatem mamy

$$\underset{\sim}{R}^{\varphi}_{\underset{\sim}{k}} = \underset{\sim}{k} \otimes \underset{\sim}{k} + \cos\varphi(\underset{\sim}{l} \otimes \underset{\sim}{l} + \underset{\sim}{n} \otimes \underset{\sim}{n}) - \sin\varphi(\underset{\sim}{l} \otimes \underset{\sim}{n} - \underset{\sim}{n} \otimes \underset{\sim}{l})$$

gdzie $\{\underset{\sim}{k},\underset{\sim}{l},\underset{\sim}{n}\}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni E^3. Wektor $\underset{\sim}{k}\in E^3$ nazywamy wektorem obrotu, a liczbę $\varphi\in<0,2\pi)$ kątem obrotu. Ponieważ $(\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi})^T = \underset{\sim}{k}\otimes\underset{\sim}{k} + \cos\varphi(\underset{\sim}{l}\otimes\underset{\sim}{l} + \underset{\sim}{n}\otimes\underset{\sim}{n}) + \sin\varphi(\underset{\sim}{l}\otimes\underset{\sim}{n} - \underset{\sim}{n}\otimes\underset{\sim}{l}) = \underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{-\varphi}$, a więc tensor $(\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi})^T$ jest tensorem obrotu o kąt $-\varphi$ wokół wektora $\underset{\sim}{k}$. Łatwo zauważyć, że

$$\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi}\,\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\psi} = \underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi+\psi} \quad \text{dla} \quad \varphi,\psi\in R \;\text{ i }\; \underset{\sim}{k}\in E^3$$

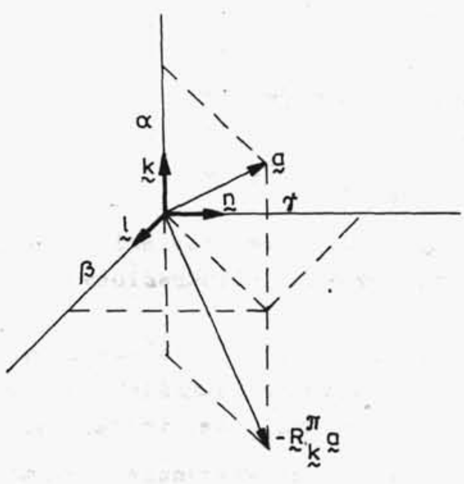
Zbiór tensorów $\mathcal{R}_{\underset{\sim}{k}} = \{\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi}\in\mathcal{R} : \underset{\sim}{k}$ - ustalony wektor, $\varphi\in R\}$ obrotu wokół wektora $\underset{\sim}{k}$ jest grupą abelową. Grupa ta jest podgrupą właściwej grupy ortogonalnej.

Tensory ze zbioru $\mathcal{R}'$ mają postać $-\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi}$, gdzie $\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi}\in\mathcal{R}$.

P r z y k ł a d 7.8. Niech $\{\underset{\sim}{k},\underset{\sim}{l},\underset{\sim}{n}\}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni E^3, a $-\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\pi} = -\underset{\sim}{k}\otimes\underset{\sim}{k} + \underset{\sim}{l}\otimes\underset{\sim}{l} + \underset{\sim}{n}\otimes\underset{\sim}{n}$ tensorem ze zbioru $\mathcal{R}'$. Znajdziemy obraz dowolnego wektora $\underset{\sim}{a}\in E^3$ przy odwzorowaniu $-\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\pi}$.

Przedstawmy wektor $\underset{\sim}{a}\in E^3$ w bazie $\{\underset{\sim}{k},\underset{\sim}{l},\underset{\sim}{n}\}$ w postaci (rys.7.3)

$$\underset{\sim}{a} = \alpha\underset{\sim}{k} + \beta\underset{\sim}{l} + \gamma\underset{\sim}{n} \quad \text{gdzie } \alpha,\beta,\gamma\in R$$



Rys.7.3

Znajdziemy $-\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\pi}\underset{\sim}{a}$, zatem otrzymamy

$$-\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\pi}\underset{\sim}{a} = (-\underset{\sim}{k}\otimes\underset{\sim}{k} + \underset{\sim}{l}\otimes\underset{\sim}{l} + \underset{\sim}{n}\otimes\underset{\sim}{n})(\alpha\underset{\sim}{k} + \beta\underset{\sim}{l} + \gamma\underset{\sim}{n}) = -\alpha\underset{\sim}{k} + \beta\underset{\sim}{l} + \gamma\underset{\sim}{n}$$

Porównując wektory $\underset{\sim}{a}$ i $-\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\pi}\underset{\sim}{a}$ widać, że wektor $-\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\pi}\underset{\sim}{a}$ został otrzymany przez lustrzane odbicie wektora $\underset{\sim}{a}$ względem płaszczyzny prostopadłej do wektora $\underset{\sim}{k}$. Zatem tensor $-\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\pi}$ odbija wektory względem płaszczyzny prostopadłej do wektora $\underset{\sim}{k}$. Oznaczamy go przez $\underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{k}}$, więc

$$\underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{k}} = -\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\pi}$$

Stąd wynika, że dowolny tensor $-\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi} \in \mathcal{R}'$ można przedstawić w postaci

$$-\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi} = -\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\pi}\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi-\pi} = \underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{k}}\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi-\pi}$$

Zatem tensor $-\underset{\sim}{R}_{\underset{\sim}{k}}^{\varphi}$ dokonuje lustrzanego obrotu wektorów o kąt $\varphi-\pi$ wokół wektora $\underset{\sim}{k}$.

<u>Definicja</u> 7.12. Niech $\mathcal{T}_2 = E^n\otimes E^n$. Tensor symetryczny $\underset{\sim}{A}\in\mathcal{T}_2^s$ nazywamy określonym

a) dodatnio (nieujemnie), jeśli

$$\bigwedge_{0\neq\underset{\sim}{c}\in E^n} \underset{\sim}{c}\,\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{c} > 0 \qquad (\geqslant 0)$$

b) ujemnie (niedodatnio), jeśli

$$\bigwedge_{0\neq\underset{\sim}{c}\in E^n} \underset{\sim}{c}\,\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{c} < 0 \qquad (\leqslant 0)$$

Tensor symetryczny, który nie jest ani niedodatnio ani nieujemnie określony, nazywamy nieokreślonym.

<u>Twierdzenie</u> 7.18. Niech $\mathcal{T}_2 = E^n\otimes E^n$. Symetryczny tensor $\underset{\sim}{A}\in\mathcal{T}_2^s$ jest dodatnio (ujemnie) określony wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne tensora $\underset{\sim}{A}$ są liczbami dodatnimi (ujemnymi).

Dowód. Z twierdzenia o rozkładzie widmowym dla tensora symetrycznego wynika, że istnieje baza ortonormalna $\{\underset{\sim}{i}_i\}$ przestrzeni E^n taka, że tensor $\underset{\sim}{A}\in\mathcal{T}_2^s$ można przedstawić w postaci

$$\underset{\sim}{A} = \lambda_1 \underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_1 + \lambda_2 \underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_2 + \ldots + \lambda_n \underset{\sim}{i}_n \otimes \underset{\sim}{i}_n$$

gdzie liczby $\lambda_i \in R$ dla $i = 1,\ldots,n$ są wartościami własnymi tensora $\underset{\sim}{A}$.

Weźmy dowolny niezerowy wektor $\underset{\sim}{c} \in E^n$ i przedstawmy go w bazie $\{\underset{\sim}{i}_i\}$, więc $\underset{\sim}{c} = c^j \underset{\sim}{i}_j = c^1 \underset{\sim}{i}_1 + c^2 \underset{\sim}{i}_2 + \ldots + c^n \underset{\sim}{i}_n$. Wtedy warunek na to, że tensor $\underset{\sim}{A}$ jest dodatnio określony, tzn. $\underset{\sim}{c}\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{c} > 0$ dla $\underset{\sim}{c} \in E^n$ i $\underset{\sim}{c} \neq 0$ jest równoważny warunkowi $\lambda_1 (c^1)^2 + \lambda_2 (c^2)^2 + \ldots + \lambda_n (c^n)^2 > 0$ dla niezerowych $[c^1, c^2, \ldots, c^n] \in R^n$, a to jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$. Zatem wartości własne tensora $\underset{\sim}{A}$ są liczbami dodatnimi.

Podobnie można wykazać, że tensor symetryczny jest nieujemnie (niedodatnio) określony wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne tego tensora są liczbami nieujemnymi (niedodatnimi).

<u>Definicja</u> 7.13. Niech $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$ a μ będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Potęgą μ-tą tensora dodatnio określonego $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2^s$ nazywamy tensor $\overset{\mu}{\underset{\sim}{A}}$ określony wzorem

$$\overset{\mu}{\underset{\sim}{A}} = \overset{\mu}{\lambda}_1 \underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_1 + \overset{\mu}{\lambda}_2 \underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_2 + \ldots + \overset{\mu}{\lambda}_n \underset{\sim}{i}_n \otimes \underset{\sim}{i}_n$$

gdzie $\lambda_i \in R$ dla $i = 1,\ldots,n$ są wartościami własnymi tensora $\underset{\sim}{A}$, a $\{\underset{\sim}{i}_i\}$ bazą ortonormalną utworzoną z wektorów własnych.

<u>Twierdzenie</u> 7.19 (o rozkładzie biegunowym). Każdy tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ można przedstawić w postaci biegunowej $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{P} = \hat{\underset{\sim}{P}}\hat{\underset{\sim}{Q}}$, gdzie:

1) tensory $\underset{\sim}{P}$ i $\hat{\underset{\sim}{P}}$ są symetryczne, nieujemnie określone i jednoznacznie wyznaczone;

2) tensory $\underset{\sim}{Q}$ i $\hat{\underset{\sim}{Q}}$ są ortogonalne.

Jeśli $\det \underset{\sim}{A} \neq 0$, to tensory $\underset{\sim}{P}$ i $\hat{\underset{\sim}{P}}$ są dodatnio określone, a tensory $\underset{\sim}{Q}$ i $\hat{\underset{\sim}{Q}}$ wyznaczone są jednoznacznie i $\underset{\sim}{Q} = \hat{\underset{\sim}{Q}}$ oraz ponadto

3) $\mathrm{sgn}(\det \underset{\sim}{A}) = \mathrm{sgn}(\det \underset{\sim}{Q}) = \mathrm{sgn}(\det \hat{\underset{\sim}{Q}})$

Dowód w przypadku gdy det $\underset{\sim}{A} \neq 0$:

1) tensory $\underset{\sim}{P}$ i $\underset{\sim}{\hat{P}}$ określmy wzorami

$$\underset{\sim}{P} := \sqrt{\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}} \qquad \text{i} \qquad \underset{\sim}{\hat{P}} := \sqrt{\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T}$$

Wykażemy, że tensor $\underset{\sim}{P}$ jest symetryczny, dodatnio określony i wyznaczony jednoznacznie.

Ponieważ $(\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A})^T = \underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}$ i dla dowolnego niezerowego wektora $\underset{\sim}{c} \in E^n$ mamy $\underset{\sim}{c}\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{c} = (\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{c})(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{c}) > 0$, to stąd wnioskujemy, że tensor $\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}$ jest symetryczny i dodatnio określony. Zatem można go przedstawić w postaci widmowej, a więc

$$\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A} = \lambda_1\underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_1 + \lambda_2\underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_2 + \ldots + \lambda_n\underset{\sim}{i}_n \otimes \underset{\sim}{i}_n$$

gdzie λ_i dla $i = 1,\ldots,n$ są dodatnimi wartościami własnymi, a $\underset{\sim}{i}_i$ dla $i = 1,\ldots,n$ ortogonalnymi wersorami własnymi tensora $\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}$. Zatem mamy

$$\underset{\sim}{P} = \sqrt{\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}} = \sqrt{\lambda_1}\,\underset{\sim}{i}_1 \otimes \underset{\sim}{i}_1 + \sqrt{\lambda_2}\,\underset{\sim}{i}_2 \otimes \underset{\sim}{i}_2 + \ldots + \sqrt{\lambda_n}\,\underset{\sim}{i}_n \otimes \underset{\sim}{i}_n$$

Stąd już łatwo zauważyć, że tensor $\underset{\sim}{P}$ jest symetryczny i dodatnio określony.

Przypuśćmy, że istnieją tensory $\underset{\sim}{P}$ i $\underset{\sim}{P}'$ symetryczne dodatnio określone oraz tensory $\underset{\sim}{Q}$ i $\underset{\sim}{Q}'$ ortogonalne takie, że $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{P}'$. Dokonując transpozycji tej równości mamy $\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{P}'\underset{\sim}{Q}'^T$. Korzystając z powyższych zależności otrzymamy

$$\underset{\sim}{P}^2 = \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}'\underset{\sim}{Q}'^T\underset{\sim}{Q}'\underset{\sim}{P}' = \underset{\sim}{P}'\underset{\sim}{1}\,\underset{\sim}{P}' = \underset{\sim}{P}'^2$$

Ponieważ tensory $\underset{\sim}{P}$ i $\underset{\sim}{P}'$ są dodatnio określone, to stąd $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}'$. Zatem tensor $\underset{\sim}{P}$ jest wyznaczony jednoznacznie.

Podobnie można udowodnić, że tensor $\underset{\sim}{\hat{P}}$ jest symetryczny, dodatnio określony i jednoznacznie wyznaczony.

2) tensory $\underset{\sim}{Q}$ i $\underset{\sim}{\hat{Q}}$ określone wzorami

$$\underset{\sim}{Q} := \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P}^{-1} \qquad \text{i} \qquad \underset{\sim}{\hat{Q}} := \underset{\sim}{\hat{P}}^{-1}\underset{\sim}{A}$$

są, jak łatwo zauważyć, wyznaczone jednoznacznie.

Ponieważ $\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = (\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P}^{-1})^T(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P}^{-1}) = \underset{\sim}{P}^{-1T}\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{P}^{-1} = \underset{\sim}{P}^{-1}\underset{\sim}{P}^2\underset{\sim}{P}^{-1} = \underset{\sim}{1}$, to tensor $\underset{\sim}{Q}$ jest ortogonalny. Podobnie można wykazać, że tensor $\hat{\underset{\sim}{Q}}$ jest ortogonalny.

Ponieważ $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q}$ i $\underset{\sim}{A} = \hat{\underset{\sim}{P}}\hat{\underset{\sim}{Q}}$, to z jednoznaczności biegunowego rozkładu tensora $\underset{\sim}{A}$ w przypadku gdy det $\underset{\sim}{A} \neq 0$ wynika, że

$$\hat{\underset{\sim}{P}} = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{P}\underset{\sim}{Q}^T \quad \text{i} \quad \hat{\underset{\sim}{Q}} = \underset{\sim}{Q}$$

3) niech $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{P} = \hat{\underset{\sim}{P}}\hat{\underset{\sim}{Q}}$. Wtedy otrzymamy

$$\det \underset{\sim}{A} = \det \underset{\sim}{Q} \det \underset{\sim}{P} = \det \hat{\underset{\sim}{P}} \det \hat{\underset{\sim}{Q}}$$

Ponieważ det $\underset{\sim}{P} > 0$ i det $\hat{\underset{\sim}{P}} > 0$, zatem

$$\operatorname{sgn}(\det \underset{\sim}{A}) = \operatorname{sgn}(\det \underset{\sim}{Q}) = \operatorname{sgn}(\det \hat{\underset{\sim}{Q}})$$

P r z y k ł a d 7.9. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$\left[A^{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

oraz dana jest macierz dodatnio określona

$$\left[g_{ij}\right] = \left[\underset{\sim}{e}_i\underset{\sim}{e}_j\right] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a stąd} \quad \left[g^{ij}\right] = \left[g_{ij}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Znajdziemy rozkład biegunowy tensora $\underset{\sim}{A}$.

Szukamy tensorów symetrycznych dodatnio określonych $\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T$, więc

$$\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A} = (A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j)^T(A^{kl}\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_l) = (A^{ij}\underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i)(A^{kl}\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_l) =$$

$$= A^{ij}A^{kl}g_{ik}\underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_l$$

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T = (A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j)(A^{kl}\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_l)^T = (A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j)(A^{kl}\underset{\sim}{e}_l \otimes \underset{\sim}{e}_k) =$$

$$= A^{ij}A^{kl}g_{jl}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_k$$

Stąd wynika, że

$$\left[(A^TA)^{jl}\right] = \left[A^{ij}\right]^T\left[g_{ik}\right]\left[A^{kl}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[(AA^T)^{ik}\right] = \left[A^{ij}\right]\left[g_{jl}\right]\left[A^{kl}\right]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -11 & 10 \\ -11 & 22 & -21 \\ 10 & -21 & 22 \end{bmatrix}$$

przy czym macierze $\left[(A^TA)^{ij}\right]$ i $\left[(AA^T)^{ij}\right]$ są reprezentacjami tensorów $\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$.

Rozkładamy widmowo tensory symetryczne $\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T$. Szukamy więc wartości własnych i wektorów tych tensorów, tzn. liczb $\lambda \in R$ i niezerowych wektorów $\underset{\sim}{a} \in E^3$ spełniających równania wektorowe

$$(\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A} - \lambda\underset{\sim}{1})\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}, \qquad (\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T - \lambda\underset{\sim}{1})\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$$

Podstawiając $\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A} = (A^TA)^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$, $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T = (AA^T)^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$, $\underset{\sim}{1} = g^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$, $\underset{\sim}{a} = a_k\underset{\sim}{e}^k$ do powyższych równań otrzymamy równania

$$((A^TA)^{ij} - \lambda g^{ij})a_j\underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{0}, \qquad ((AA^T)^{ij} - \lambda g^{ij})a_j\underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{0}$$

które są równoważne równaniom macierzowym

$$\left[(A^TA)^{ij} - \lambda g^{ij}\right]\left[a_j\right] = \left[0\right], \quad \left[(AA^T)^{ij} - \lambda g^{ij}\right]\left[a_j\right] = \left[0\right]$$

Rozpisując i podstawiając dane liczbowe otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 6-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ -1+\lambda & 2-2\lambda & -1+\lambda \\ 0 & -1+\lambda & 2-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6-\lambda & -11+\lambda & 10 \\ -11+\lambda & 22-2\lambda & -21+\lambda \\ 10 & -21+\lambda & 22-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Równania te mają niezerowe rozwiązania, tzn. $[a_i] \neq [0]$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det\begin{bmatrix} 6-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ -1+\lambda & 2-2\lambda & -1+\lambda \\ 0 & -1+\lambda & 2-2\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad \det\begin{bmatrix} 6-\lambda & -11+\lambda & 10 \\ -11+\lambda & 22-2\lambda & -21+\lambda \\ 10 & -21+\lambda & 22-2\lambda \end{bmatrix} = 0$$

a stąd w obu przypadkach otrzymamy

$$-(\lambda - 1)^2(\lambda - 16) = 0$$

co oznacza, że liczby $\lambda = 1$ lub $\lambda = 16$ są wartościami własnymi tensorów $\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T$. Współrzędne wektorów własnych dla tensorów $\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T$ odpowiadających wartości własnej $\lambda = 1$ spełniają układy równań

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & -10 & 10 \\ -10 & 20 & -20 \\ 10 & -20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

stąd otrzymamy

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = t \quad \text{dla} \quad t,s \in R \\ a_3 = s \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 2t - 2s \\ a_2 = t \quad \text{dla} \quad t,s \in R \\ a_3 = s \end{cases}$$

Zatem

$$N_{\lambda=1} = \{\underset{\sim}{a} \in E^3 : \underset{\sim}{a} = t\underset{\sim}{e}^2 + s\underset{\sim}{e}^3 \text{ dla } t,s \in R\}$$

$$\hat{N}_{\lambda=1} = \{\underset{\sim}{a} \in E^3 : \underset{\sim}{a} = 2(t - s)\underset{\sim}{e}^1 + t\underset{\sim}{e}^2 + s\underset{\sim}{e}^3 \text{ dla } t,s \in R\}$$

a stąd

$$\dim N_{\lambda=1} = \dim \hat{N}_{\lambda=1} = 2$$

Współrzędne wektorów własnych dla tensorów $\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T$ odpowiadających wartości własnej $\lambda = 16$ spełniają układy równań

$$\begin{bmatrix} -10 & 15 & 0 \\ 15 & -30 & 15 \\ 0 & 15 & -30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} -10 & 5 & 10 \\ 5 & -10 & -5 \\ 10 & -5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a stąd otrzymamy

$$\begin{cases} a_1 = 3r \\ a_2 = 2r \quad \text{dla} \quad r \in R \\ a_3 = r \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = r \\ a_2 = 0 \quad \text{dla} \quad r \in R \\ a_3 = r \end{cases}$$

Zatem

$$N_{\lambda=16} = \left\{ \underset{\sim}{a} \in E^3 : \underset{\sim}{a} = 3r\underset{\sim}{e}^1 + 2r\underset{\sim}{e}^2 + r\underset{\sim}{e}^2 \quad \text{dla} \quad r \in R \right\}$$

$$\hat{N}_{\lambda=16} = \left\{ a \in E^3 : a = r\underset{\sim}{e}^1 + r\underset{\sim}{e}^3 \quad \text{dla} \quad r \in R \right\}$$

a stąd

$$\dim N_{\lambda=16} = \dim \hat{N}_{\lambda=16} = 1$$

Szukamy baz ortogonalnych $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ i $\{\hat{\underset{\sim}{d}}_\alpha\}$ przestrzeni E^3 złożonych z wektorów własnych tensorów odpowiednio $\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T$. Z podprzestrzeni dwuwymiarowych $N_{\lambda=1}$ i $\hat{N}_{\lambda=1}$ wybieramy po dwa wektory ortogonalne $\underset{\sim}{d}_1$, $\underset{\sim}{d}_2 \in N_{\lambda=1}$ i $\hat{\underset{\sim}{d}}_1$, $\hat{\underset{\sim}{d}}_2 \in \hat{N}_{\lambda=1}$, a z podprzestrzeni jednowymiarowych $N_{\lambda=16}$ i $\hat{N}_{\lambda=16}$ po jednym wektorze $\underset{\sim}{d}_3 \in N_{\lambda=16}$ i $\hat{\underset{\sim}{d}}_3 \in \hat{N}_{\lambda=16}$. A więc

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}_1 = \underset{\sim}{e}^2 \\ \underset{\sim}{d}_2 = \underset{\sim}{e}^2 + 2\underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{d}_3 = 3\underset{\sim}{e}^1 + 2\underset{\sim}{e}^2 + \underset{\sim}{e}^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\underset{\sim}{d}}_1 = 2\underset{\sim}{e}^1 + \underset{\sim}{e}^2 \\ \hat{\underset{\sim}{d}}_2 = 2\underset{\sim}{e}^1 + 3\underset{\sim}{e}^2 + 2\underset{\sim}{e}^3 \\ \hat{\underset{\sim}{d}}_3 = \underset{\sim}{e}^1 + \underset{\sim}{e}^3 \end{cases}$$

są bazami ortogonalnymi przestrzeni E^3 złożonymi z wektorów własnych tensorów odpowiednio $\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T$, ponieważ

$$\underset{\sim}{d}_1\underset{\sim}{d}_2 = \underset{\sim}{e}^2(\underset{\sim}{e}^2 + 2\underset{\sim}{e}^3) = g^{22} + 2g^{23} = 2 + 2\ (-1) = 0$$

$$\hat{\underset{\sim}{d}}_1\hat{\underset{\sim}{d}}_2 = (2\underset{\sim}{e}^1 + \underset{\sim}{e}^2)(2\underset{\sim}{e}^1 + 3\underset{\sim}{e}^2 + 2\underset{\sim}{e}^3) = 4g^{11} + 8g^{12} + 3g^{22} +$$

$$+ 4g^{13} + 2g^{23} = 4 - 8 + 6 + 0 - 2 = 0$$

Dokonując ortonormalizacji tych baz otrzymamy

$$\begin{cases} \underset{\sim}{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\sim}{e}^2 \\ \underset{\sim}{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\underset{\sim}{e}^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{n}_3 = \frac{3}{\sqrt{3}}\underset{\sim}{e}^1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\underset{\sim}{e}^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\underset{\sim}{e}^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\underset{\sim}{n}}_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}\underset{\sim}{e}^1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\sim}{e}^2 \\ \hat{\underset{\sim}{n}}_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}\underset{\sim}{e}^1 + \frac{3}{\sqrt{6}}\underset{\sim}{e}^2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\underset{\sim}{e}^3 \\ \hat{\underset{\sim}{n}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underset{\sim}{e}^1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\underset{\sim}{e}^3 \end{cases}$$

Zależności między bazami $\{\underset{\sim}{n}_\alpha\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ oraz $\{\hat{\underset{\sim}{n}}_\alpha\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ mają postać

$$\underset{\sim}{n}_\alpha = g_{\alpha i}\underset{\sim}{e}^i \qquad \hat{\underset{\sim}{n}}_\alpha = \hat{g}_{\alpha i}\underset{\sim}{e}^i$$

Stąd wynika, że

$$[g_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad [\hat{g}_{\alpha i}] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Z twierdzenia o rozkładzie widmowym dla tensora symetrycznego wynika, że

$$\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A} = 1\underset{\sim}{n}_1 \otimes \underset{\sim}{n}_1 + 1\underset{\sim}{n}_2 \otimes \underset{\sim}{n}_2 + 16\underset{\sim}{n}_3 \otimes \underset{\sim}{n}_3$$

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T = 1\hat{\underset{\sim}{n}}_1 \otimes \hat{\underset{\sim}{n}}_1 + 1\hat{\underset{\sim}{n}}_2 \otimes \hat{\underset{\sim}{n}}_2 + 16\hat{\underset{\sim}{n}}_3 \otimes \hat{\underset{\sim}{n}}_3$$

a stąd mamy

$$\underset{\sim}{P} = \sqrt{\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}} = 1\underset{\sim}{n}_1 \otimes \underset{\sim}{n}_1 + 1\underset{\sim}{n}_2 \otimes \underset{\sim}{n}_2 + 4\underset{\sim}{n}_3 \otimes \underset{\sim}{n}_3$$

$$\hat{\underset{\sim}{P}} = \sqrt{\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{A}^T} = 1\hat{\underset{\sim}{n}}_1 \otimes \hat{\underset{\sim}{n}}_1 + 1\hat{\underset{\sim}{n}}_2 \otimes \hat{\underset{\sim}{n}}_2 + 4\hat{\underset{\sim}{n}}_3 \otimes \hat{\underset{\sim}{n}}_3$$

Zatem jest oczywiste, że

$$\overset{-1}{\underset{\sim}{P}} = 1\underset{\sim}{n}_1 \otimes \underset{\sim}{n}_1 + 1\underset{\sim}{n}_2 \otimes \underset{\sim}{n}_2 + \frac{1}{4}\, \underset{\sim}{n}_3 \otimes \underset{\sim}{n}_3$$

$$\overset{-1}{\underset{\sim}{\hat{P}}} = 1\hat{\underset{\sim}{n}}_1 \otimes \hat{\underset{\sim}{n}}_1 + 1\hat{\underset{\sim}{n}}_2 \otimes \hat{\underset{\sim}{n}}_2 + \frac{1}{4}\, \hat{\underset{\sim}{n}}_3 \otimes \hat{\underset{\sim}{n}}_3$$

Znajdziemy tensory ortogonalne $\underset{\sim}{Q}$ i $\hat{\underset{\sim}{Q}}$, więc

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{A}\, \overset{-1}{\underset{\sim}{P}} = (A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j)\left(\overset{-1}{P}{}^{\alpha\beta}\underset{\sim}{n}_\alpha \otimes \underset{\sim}{n}_\beta\right) = A^{ij}\, \overset{-1}{P}{}^{\alpha\beta} g_{j\alpha} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{n}_\beta$$

$$\hat{\underset{\sim}{Q}} = \overset{-1}{\underset{\sim}{\hat{P}}}\, \underset{\sim}{A} = \left(\overset{-1}{\hat{P}}{}^{\alpha\beta}\hat{\underset{\sim}{n}}_\alpha \otimes \hat{\underset{\sim}{n}}_\beta\right)(A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) = \overset{-1}{\hat{P}}{}^{\alpha\beta} A^{ij} \hat{g}_{\beta i} \hat{\underset{\sim}{n}}_\alpha \otimes \underset{\sim}{e}_j$$

a stąd

$$\left[Q^{i\beta}\right] = \left[A^{ij}\right]\left[g_{j\alpha}\right]\left[\overset{-1}{P}{}^{\alpha\beta}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{2}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{Q}^{\alpha j}\right] = \left[\overset{-1}{\hat{P}}{}^{\alpha\beta}\right]\left[\hat{g}_{\beta i}\right]\left[A^{ij}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Znajdziemy reprezentacje tensorów $\underset{\sim}{Q}$ i $\hat{\underset{\sim}{Q}}$ w bazie wyjściowej $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$, zatem

$$\left[Q^{ij}\right] = \left[Q^{i\beta}\right]\left[g_{\beta k}\right]\left[g^{kj}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{2}{3}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \sqrt{3} & \frac{2}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\hat{Q}^{ij}\right] = \left[g^{ik}\right]\left[\hat{g}_{k\alpha}\right]\left[\hat{Q}^{\alpha j}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{6} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{6} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$