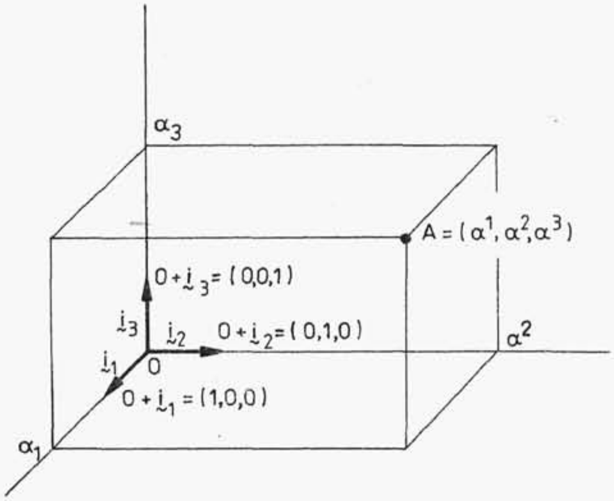
Zgodnie z definicją tego izomorfizmu dowolny punkt $A \in \varepsilon^n$ utożsamiamy z reprezentacją tego punktu $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) \in R^n$ w kartezjańskim układzie odniesienia, więc $A = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$. Stąd mamy np. $O + \underset{\sim}{e}_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$. Interpretacja geometryczna tego izomorfizmu pokazana jest na rys.9.2.



Rys.9.2

<u>Wniosek</u> 9.3. Przestrzeń euklidesowa punktowa ε^n z kartezjańskim układem odniesienia jest izomorficzna ortogonalnie z przestrzenią kartezjańską R^n.

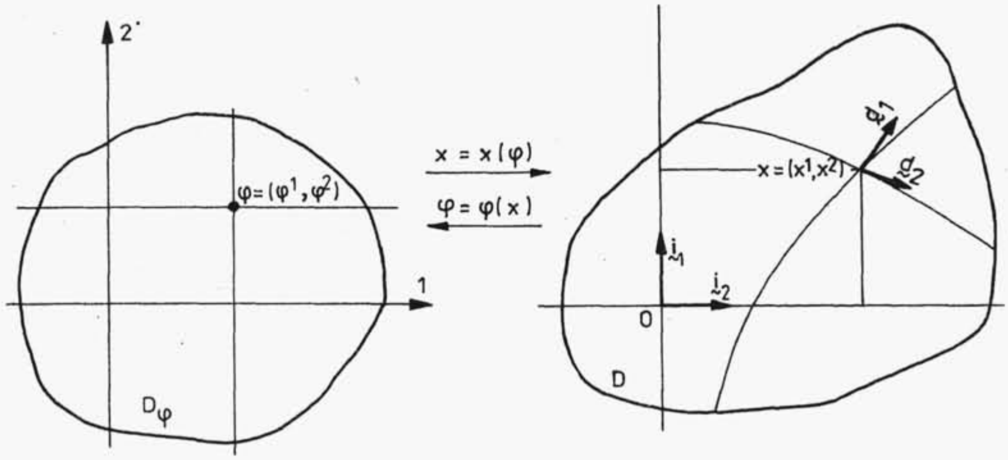
W dalszym ciągu zakładamy, że w przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n dany jest kartezjański układ odniesienia $(0, \{\underset{\sim}{i}_i\})$. Wtedy przestrzeń euklidesową punktową ε^n utożsamiamy euklidesowo z przestrzenią kartezjańską R^n, a dowolny punkt $X \in \varepsilon^n$ z reprezentacją $(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in R^n$ tego punktu w tym układzie kartezjańskim.

9.2. Układ współrzędnych krzywoliniowych, baza i kobaza Symbole Christoffela drugiego rodzaju

<u>Definicja</u> 9.3. Układem współrzędnych krzywoliniowych (klasy C^k) w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n nazywamy odwzorowanie $X : D_\varphi \longrightarrow D$ spełniające aksjomaty:

1) zbiór D_φ jest obszarem w przestrzeni kartezjańskiej R^n,

2) odwzorowanie X jest wzajemnie jednoznaczne, klasy C^k dla $k \geqslant 1$ o jakobianie różnym od zera, w każdym punkcie obszaru D_φ.



Rys.9.3

W kartezjańskim układzie odniesienia odwzorowanie $X : D_\varphi \longrightarrow D$ można przedstawić w postaci

$$\begin{cases} x^1 = x^1(\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^n) \\ x^2 = x^2(\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = x^n(\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^n) \end{cases} \quad \text{dla} \quad \varphi = (\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^n) \in D_\varphi$$

lub krócej

$$x^i = x^i(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi, \quad i = 1,\ldots,n$$

Liczby $x^i \in R$ dla $i = 1,\ldots,n$ są współrzędnymi, a ciąg

$$x = (x^1,x^2,\ldots,x^n) \in R^n$$

reprezentacją punktu $X \in D$ w kartezjańskim układzie odniesienia.

Liczby $\varphi^{\alpha} \in R$ dla $\alpha = 1,\dots,n$ nazywamy współrzędnymi krzywoliniowymi, a ciąg $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n) \in R^n$ reprezentacją krzywoliniową punktu $X \in D$ w danym układzie krzywoliniowym.

Z definicji krzywoliniowego układu współrzędnych wynika, że funkcje rzeczywiste $x^i = x^i(\varphi)$ dla $i = 1,\dots,n$ są klasy C^k, $k \geq 1$, w obszarze D_φ, i jakobian tego odwzorowania $\det\left[\frac{\partial x^i}{\partial \varphi^{\alpha}}(\varphi)\right] \neq 0$ dla $\varphi \in D_\varphi$.

Odwzorowanie odwrotne $\varphi : D \to D_\varphi$ do krzywoliniowego układu współrzędnych można w kartezjańskim układzie odniesienia przedstawić w postaci

$$\begin{cases} \varphi^1 = \varphi^1(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \varphi^2 = \varphi^2(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi^n = \varphi^n(x^1, x^2, \dots, x^n) \end{cases} \quad \text{dla} \quad x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in D$$

lub krócej

$$\varphi^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(x) \quad \text{dla} \quad x \in D, \quad \alpha = 1,2,\dots,n$$

Można wykazać, że funkcje rzeczywiste $\varphi^{\alpha} = \varphi^{\alpha}(x)$ dla $\alpha = 1,\dots,n$ są klasy C^k, $k \geq 1$, w obszarze D, i jakobian tego odwzorowania $\det\left[\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial x^i}(x)\right] \neq 0$ dla $x \in D$.

Powyższe odwzorowania wiążą ze sobą współrzędne kartezjańskie i krzywoliniowe dowolnego punktu obszaru. W celu bardziej przejrzystego zapisu, odwzorowania i wartości tych odwzorowań oznaczono tymi samymi literami. Należy zaznaczyć, że kartezjański układ odniesienia jest szczególnym przypadkiem układu współrzędnych krzywoliniowych.

Niech $X : D_\varphi \to D$ będzie układem współrzędnych krzywoliniowych w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^n$, gdzie $D_\varphi \subset R^n$. Można wykazać, że wektory określone wzorami:

$$\underset{\sim}{g}_{\alpha}(\varphi) := \frac{\partial}{\partial \varphi^{\alpha}} \underset{\sim}{OX}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \alpha = 1,\dots,n; \quad \varphi \in D_\varphi$$

tworzą bazę w przestrzeni euklidesowej E^n. Bazę $\{\underset{\sim}{g}_{\alpha}(\varphi)\}$ będziemy nazywać bazą wyznaczoną przez dany układ współrzędnych krzywoliniowych w punkcie $X = X(\varphi) \in D$. Można wykazać, że definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru punktu bazowego $O \in \mathcal{E}^n$.

Uwaga 9.1. W dalszym ciągu pochodne cząstkowe będziemy oznaczać następująco: $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x^i} := (\cdot)_{,i}$, $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi^\alpha} := (\cdot)_{,\alpha}$ itd.

Twierdzenie 9.5. Niech $X : D_\varphi \rightarrow D$ będzie układem współrzędnych krzywoliniowych w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^n$, gdzie $D_\varphi \subset R^n$.

1) jeśli $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$ jest bazą przestrzeni euklidesowej E^n w punkcie $X(\varphi) \in D$ wyznaczoną przez układ współrzędnych krzywoliniowych, to

$$\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) := x^i{}_{,\alpha}(\varphi)\underset{\sim}{i}_i \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi; \quad \alpha = 1,\dots,n$$

gdzie $x^i = x^i(\varphi)$ dla $\varphi \in D_\varphi$; $i = 1,\dots,n$, jest układem współrzędnych krzywoliniowych zapisanym w układzie kartezjańskim,

2) jeśli $\{\underset{\sim}{d}^\beta(\varphi)\}$ jest kobazą przestrzeni euklidesowej E^n w punkcie $X(\varphi) \in D$ względem bazy wyznaczonej przez układ współrzędnych krzywoliniowych, to

$$\underset{\sim}{d}^\beta(\varphi) = \varphi^\beta{}_{,j}(x(\varphi))\underset{\sim}{i}^j \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi, \quad \beta = 1,\dots,n$$

gdzie: $\varphi^\beta = \varphi^\beta(x)$ dla $x \in D$; $\beta = 1,\dots,n$, jest odwzorowaniem odwrotnym do układu współrzędnych krzywoliniowych zapisanym w układzie kartezjańskim.

Dowód:

1) odwzorowanie $X = X(\varphi)$ dla $\varphi \in D_\varphi$ w kartezjańskim układzie odniesienia $(O, \{\underset{\sim}{i}_i\})$ można przedstawić w postaci:

$$X(\varphi) = O + x^i(\varphi)\underset{\sim}{i}_i \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

a stąd mamy

$$\underset{\sim}{OX}(\varphi) = x^i(\varphi)\underset{\sim}{i}_i$$

Z określenia bazy wyznaczonej przez krzywoliniowy układ współrzędnych wynika, że

$$\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) = \underset{\sim}{O}\underset{\sim}{X}(\varphi)_{,\alpha} = (x^i(\varphi)\underset{\sim}{i}_i)_{,\alpha} = x^i{}_{,\alpha}(\varphi)\underset{\sim}{i}_i + x^i(\varphi)\underset{\sim}{i}_{i,\alpha}$$

Ponieważ $\underset{\sim}{i}_{i,\alpha} = \underset{\sim}{0}$ dla $i = 1,\ldots,n$; $\alpha = 1,\ldots,n$, zatem

$$\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) = x^i{}_{,\alpha}(\varphi)\underset{\sim}{i}_i \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi;\ \alpha = 1,\ldots,n$$

2) ponieważ odwzorowanie $\varphi = \varphi(X)$ dla $X \in D$ jest odwrotne do krzywoliniowego układu współrzędnych $X = X(\varphi)$ dla $\varphi = D_\varphi$ w obszarze D, zatem zachodzi tożsamość

$$(\varphi \circ X)(\varphi) = \varphi \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

Zapisując powyższą tożsamość w kartezjańskim układzie odniesienia, mamy

$$\varphi^\beta(x^1(\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^n),\ldots,x^n(\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^n)) = \varphi^\beta \quad \text{dla } \beta = 1,\ldots,n$$

Różniczkując powyższą tożsamość cząstkowo względem zmiennej otrzymamy

$$\varphi^\beta{}_{,i}(x(\varphi))x^i{}_{,\alpha}(\varphi) = \delta^\beta_\alpha \quad \text{dla} \quad \alpha,\beta = 1,\ldots,n$$

Korzystając z powyższego wzoru dostaniemy

$$\underset{\sim}{d}^\beta(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) = \left(\varphi^\beta{}_{,j}(x(\varphi))\underset{\sim}{i}^j\right) \circ \left(x^i{}_{,\alpha}(\varphi)\underset{\sim}{i}_i\right) =$$

$$= \varphi^\beta{}_{,j}(x(\varphi))x^i{}_{,\alpha}(\varphi)\delta^j_i = \varphi^\beta{}_{,i}(x(\varphi))x^i{}_{,\alpha}(\varphi) = \delta^\beta_\alpha$$

$$\text{dla } \alpha,\beta = 1,\ldots,n$$

Zatem $\{\underset{\sim}{d}^\beta(\varphi)\}$ jest kobazą względem bazy $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$ wyznaczonej przez krzywoliniowy układ współrzędnych w punkcie $X(\varphi) \in D$.

Interpretacja geometryczna bazy i kobazy wyznaczonych przez krzywoliniowy układ współrzędnych w obszarze $D \subset \mathcal{E}^2$ pokazana jest na rys.9.3. Krzywoliniowy układ współrzędnych w każdym punkcie $X \in D$ wyznacza lokalne układy odniesienia $(X,\underset{\sim}{d}_\alpha(X))$ i $(X,\underset{\sim}{d}^\alpha(X))$ w przestrzeni $\mathcal{E}^n$.

Oznaczmy przez $g^i_\alpha(\varphi) := x^i{}_{,\alpha}(\varphi)$ i $g^\alpha_i(\varphi) := \varphi^\alpha{}_{,i}(x(\varphi))$ dla $\varphi \in D_\varphi$; $i = 1,\ldots,n$, $\alpha = 1,\ldots,n$. Wtedy z twierdzenia 9.5 otrzymamy

$\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) = g^i_\alpha(\varphi)\underset{\sim}{i}_i$ $\quad [g^i{}_\alpha(\varphi)]$ jest macierzą przejścia od bazy $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$ do bazy $\{\underset{\sim}{i}_i\}$

$\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi) = g^\alpha_i(\varphi)\underset{\sim}{i}^i$ $\quad [g_i{}^\alpha(\varphi)]$ jest macierzą przejścia od bazy $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$ do bazy $\{\underset{\sim}{i}^i\}$

Oznaczmy przez $g_{\alpha\beta}(\varphi) = \underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\underset{\sim}{d}_\beta(\varphi)$ i $g^{\alpha\beta}(\varphi) = \underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)\underset{\sim}{d}^\beta(\varphi)$ dla $\varphi \in D_\varphi$, $\alpha, \beta = 1,\dots,n$. Wtedy mamy

$\underset{\sim}{d}_\beta(\varphi) = g_{\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)$ $\quad [g_{\alpha\beta}(\varphi)]$ jest macierzą przejścia od bazy $\{\underset{\sim}{d}_\beta(\varphi)\}$ do bazy $\{\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)\}$

$\underset{\sim}{d}^\beta(\varphi) = g^{\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)$ $\quad [g^{\alpha\beta}(\varphi)]$ jest macierzą przejścia od bazy $\{\underset{\sim}{d}^\beta(\varphi)\}$ do bazy $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$

Tensor jednostkowy (metryczny) można przedstawić w postaciach:

$\underset{\sim}{1} = g^{\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}_\beta(\varphi)$ $\quad [g^{\alpha\beta}(\varphi)]$ jest reprezentacją tensora jednostkowego w bazie $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}_\beta(\varphi)\}$

$\underset{\sim}{1} = g_{\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^\beta(\varphi)$ $\quad [g_{\alpha\beta}(\varphi)]$ jest reprezentacją tensora jednostkowego w bazie $\{\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^\beta(\varphi)\}$

Należy zaznaczyć, że wektory bazy i kobazy wyznaczone przez krzywoliniowy układ odniesienia oraz macierze przejścia można uważać za funkcje wektorowe lub macierzowe określone na obszarze D_φ przestrzeni R^n lub obszarze D przestrzeni ε^n.

Twierdzenie 9.6. Niech $X : D_\varphi \to D$ i $X : D_\theta \to D$ będą układami współrzędnych krzywoliniowych w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n, gdzie D_φ, $D_\theta \subset R^n$. Jeśli $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(X)\}$ jest bazą, a $\{\underset{\sim}{d}^\alpha(X)\}$ kobazą wyznaczonymi przez krzywoliniowy układ współrzędnych $X = X(\varphi)$ dla $\varphi \in D_\varphi$, i $\{h_\Omega(X)\}$ jest bazą a $\{\underset{\sim}{h}^\Omega(X)\}$ kobazą wyznaczonymi przez krzywoliniowy układ współrzędnych $X = X(\theta)$ dla $\theta \in D_\theta$, to otrzymamy wzory:

$$\underset{\sim}{h}^\Omega(X) = (\theta \circ X)^\Omega{}_{,\alpha}(\varphi(X))\underset{\sim}{d}^\alpha(X)$$

$$\text{dla } \Omega = 1,\dots,n$$

$$\underset{\sim}{h}_\Omega(X) = (\varphi \circ X)^\alpha{}_{,\Omega}(\theta(X))\underset{\sim}{d}_\alpha(X)$$

$$\underset{\sim}{d}_\alpha(X) = (\theta \circ X)^\Omega_{,\alpha}(\varphi(X))\underset{\sim}{h}_\Omega(X)$$
$$\underset{\sim}{d}^\alpha(X) = (\varphi \circ X)^\alpha_{,\Omega}(\theta(X))\underset{\sim}{h}^\Omega(X) \qquad \text{dla } \alpha = 1,\dots,n$$

Dowód twierdzenia pomijamy.

Niech $X : D_\varphi \to D$ będzie układem współrzędnych krzywoliniowych w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^n$, gdzie $D_\varphi \subset R^n$. Bazy $\{\hat{\underset{\sim}{d}}_\alpha(\varphi)\}$ i $\{\hat{\underset{\sim}{d}}^\alpha(\varphi)\}$ przestrzeni euklidesowej E^n nazywamy bazami fizycznymi wyznaczonymi przez dany układ współrzędnych krzywoliniowych w punkcie $X = X(\varphi) \in D$, jeśli określone są wzorami:

$$\hat{\underset{\sim}{d}}_\alpha(\varphi) := \frac{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)}{\|\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\|} = \frac{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}(\varphi)}}$$
$$\hat{\underset{\sim}{d}}^\alpha(\varphi) := \frac{\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)}{\|\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)\|} = \frac{\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}(\varphi)}} \qquad \text{dla } \alpha = 1,\dots,n$$

gdzie $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$ jest bazą, a $\{\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)\}$ kobazą wyznaczonymi przez układ współrzędnych krzywoliniowych w punkcie $X = X(\varphi) \in D$.

Z definicji wynika, że wektory baz fizycznych $\{\hat{\underset{\sim}{d}}_\alpha(\varphi)\}$ i $\{\hat{\underset{\sim}{d}}^\alpha(\varphi)\}$ są wersorami odpowiednio wektorów bazy $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$ i kobazy $\{\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)\}$. Baza fizyczna $\{\hat{\underset{\sim}{d}}^\alpha(\varphi)\}$ nie musi być kobazą względem bazy fizycznej $\{\hat{\underset{\sim}{d}}_\alpha(\varphi)\}$. Jeśli natomiast baza $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$ jest ortogonalna, to kobaza $\{\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)\}$ względem tej bazy jest też ortogonalna, a bazy fizyczne $\{\hat{\underset{\sim}{d}}_\alpha(\varphi)\}$ i $\{\hat{\underset{\sim}{d}}^\alpha(\varphi)\}$ są ortonormalne i pokrywają się, tzn. $\hat{\underset{\sim}{d}}_\alpha(\varphi) = \hat{\underset{\sim}{d}}^\alpha(\varphi)$ dla $\alpha = 1,\dots,n$.

Niech $X : D_\varphi \to D$ będzie układem współrzędnych krzywoliniowych klasy C^2 w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^n$, gdzie $D_\varphi \subset R^n$. Liczby $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\varphi) \in R$ dla $\alpha, \beta, \gamma = 1,\dots,n$ nazywać będziemy symbolami Christoffela drugiego rodzaju dla danego układu współrzędnych krzywoliniowych w punkcie $X = X(\varphi) \in D$, jeśli określone są wzorami:

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\varphi) := \underset{\sim}{d}_{\alpha,\beta}(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}^\gamma(\varphi) = -\underset{\sim}{d}^\gamma{}_{,\beta}(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) \quad \text{dla } \alpha,\beta,\gamma = 1,\dots,n$$

gdzie $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$ jest bazą, a $\{\underset{\sim}{d}^\gamma(\varphi)\}$ kobazą wyznaczonymi przez krzywoliniowy układ współrzędnych w punkcie $X(\varphi) \in D$.

Wykażemy, że obie definicje są równoważne. Ponieważ dla dowolnego $\varphi \in D_\varphi$ mamy

$$\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}^\gamma(\varphi) = \delta_\alpha^\gamma(\varphi) \quad \text{dla } \alpha, \gamma = 1, \ldots, n$$

to różniczkując powyższą tożsamość cząstkowo względem zmiennej φ^β otrzymamy

$$\underset{\sim}{d}_{\alpha,\beta}(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}^\gamma(\varphi) + \underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}^\gamma{}_{,\beta}(\varphi) = 0$$

Stąd

$$\underset{\sim}{d}_{\alpha,\beta}(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}^\gamma(\varphi) = -\underset{\sim}{d}^\gamma{}_{,\beta}(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) \quad \text{dla } \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n.$$

Twierdzenie 9.7. Niech $X : D_\varphi \to D$ będzie układem współrzędnych krzywoliniowych klasy C^2 w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^n$, gdzie $D_\varphi \subset R^n$. Jeśli $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$ jest bazą, a $\{\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)\}$ kobazą wyznaczonymi przez układ współrzędnych krzywoliniowych w punkcie $X = X(\varphi) \in D$, to otrzymamy wzory:

$$\begin{aligned} &1)\ \underset{\sim}{d}_{\alpha,\beta}(\varphi) = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_\gamma(\varphi) \\ &2)\ \underset{\sim}{d}^\alpha{}_{,\beta}(\varphi) = -\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}^\gamma(\varphi) \end{aligned} \qquad \text{dla } \alpha, \beta = 1, \ldots, n$$

gdzie $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\varphi) \in R$ dla $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n$ są symbolami Christoffela drugiego rodzaju dla układu współrzędnych krzywoliniowych w punkcie $X = X(\varphi) \in D$.

Dowód:

1) wektor $\underset{\sim}{d}_{\alpha,\beta}(\varphi)$ dla $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$ rozłóżmy w bazie $\{\underset{\sim}{d}_\delta(\varphi)\}$, więc

$$\underset{\sim}{d}_{\alpha,\beta}(\varphi) = A^\delta_{\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_\delta(\varphi)$$

gdzie liczby $A^\gamma_{\alpha\beta}(\varphi) \in R$ dla $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n$ są współczynnikami tego rozkładu. Mnożąc powyższą tożsamość skalarnie przez wektor $\underset{\sim}{d}^\gamma(\varphi)$ dla $\gamma = 1, \ldots, n$ kolejno otrzymamy:

$$\underset{\sim}{d}_{\alpha,\beta}(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}^\gamma(\varphi) = A^\delta_{\alpha\beta}(\varphi)\,\delta^\gamma_\delta$$

$$A^\gamma_{\alpha\beta}(\varphi) = \underset{\sim}{d}_{\alpha,\beta}(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}^\gamma(\varphi)$$

Z określenia symboli Christoffela drugiego rodzaju wynika, że

$$A^{\gamma}_{\alpha\beta}(\gamma) = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\varphi)$$

Zatem otrzymujemy

$$\underset{\sim}{d}_{\alpha,\beta}(\varphi) = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi) \quad \text{dla } \alpha,\beta = 1,2,\dots,n$$

2) dowodzi się podobnie.

Z powyższego twierdzenia wynika, że za pomocą symboli Christoffela drugiego rodzaju można przedstawić pochodne cząstkowe wektorów bazy wyznaczonych przez krzywoliniowy układ współrzędnych w tej bazie i pochodne cząstkowe wektorów kobazy wyznaczonych przez krzywoliniowy układ współrzędnych w tej kobazie.

P r z y k ł a d 9.1. Walcowym układem współrzędnych w przestrzeni euklidesowej punktowej ε^3 nazywamy odwzorowanie $X : D_\varphi \to \varepsilon^3$ określone w kartezjańskim układzie odniesienia $(0,\{\underset{\sim}{i}_i\})$ następująco (rys.9.4):

$$\begin{cases} x^1(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3) = \varphi^1\cos\varphi^2 \\ x^2(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3) = \varphi^1\sin\varphi^2 & \text{dla } \varphi = (\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3) \in D_\varphi \\ x^3(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3) = \varphi^3 \end{cases}$$

gdzie:

$$D_\varphi = \{\varphi = (\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3) \in R^3 : 0 < \varphi^1 < \infty,\ 0 < \varphi^2 < 2\pi,\ -\infty < \varphi^3 < \infty\}$$

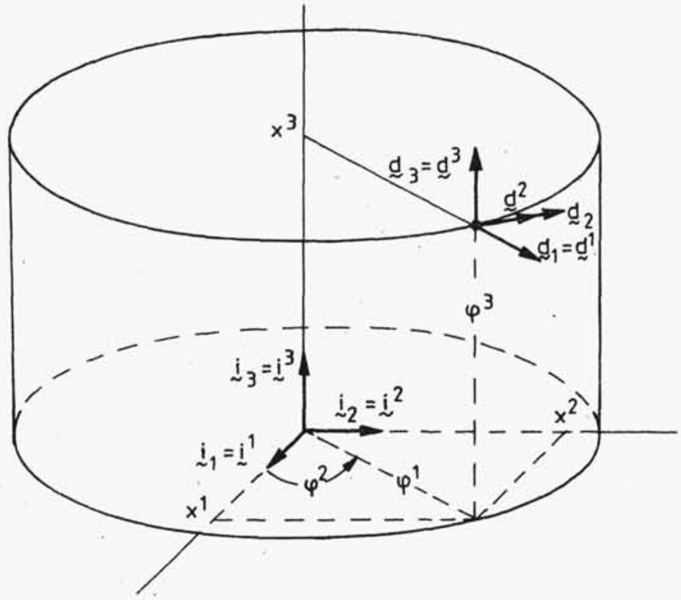
Obrazem zbioru D_φ przez odwzorowanie X nie jest cała przestrzeń ε^3, lecz obszar $X(D_\varphi) = \varepsilon^3 - \{x = (x^1,0,x^3) \in \varepsilon^3 : x^1 \geqslant 0\}$.

Odwzorowaniem odwrotnym do walcowego układu współrzędnych jest odwzorowanie $\varphi : X(D_\varphi) \to D_\varphi$, które jest określone następująco:

$$\begin{cases} \varphi^1(x^1,x^2,x^3) = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ \varphi^2(x^1,x^2,x^3) = \operatorname{arcctg}\dfrac{x^1}{x^2} + \varepsilon\pi & \text{dla } (x^1,x^2,x^3) \in X(D_\varphi) \\ \varphi^3(x^1,x^2,x^3) = x^3 \end{cases}$$

przy czym $\varepsilon = 0$ dla $x^2 \geqslant 0$ i $\varepsilon = 1$ dla $x^2 < 0$.

Interpretację geometryczną walcowego układu współrzędnych przedstawia rys.9.4.



Rys.9.4

a) znajdziemy bazę $\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)$ i kobazę $\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)$ wyznaczone przez walcowy układ współrzędnych. Z twierdzenia 9.5 wynika, że

$$\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) = g^i_\alpha(\varphi)\underset{\sim}{i}_i \quad \text{dla } i = 1,2,3 \qquad \underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi) = g^\alpha_i(\varphi)\underset{\sim}{i}^i \text{ dla } \alpha = 1,2,3$$

a więc należy znaleźć macierze przejścia $[g^i{}_\alpha(\varphi)]$ i $[g_i{}^\alpha(\varphi)]$ przy czym $g^i_\alpha(\varphi) = x^i{}_{,\alpha}(\varphi)$ i $g^\alpha_i(\varphi) = \varphi^\alpha{}_{,i}(x(\varphi))$ dla $i,\alpha =$ $= 1,2,3$. Zatem

$$[g^i{}_\alpha(\varphi)] = [x^i{}_{,\alpha}(\varphi)] = \begin{bmatrix} \cos\varphi^2 & -\varphi^1\sin\varphi^2 & 0 \\ \sin\varphi^2 & \varphi^1\cos\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[g^{\alpha}{}_{i}(\varphi)\right] = \left[\varphi^{\alpha}{}_{,i}(x(\varphi))\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} & \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}} & 0 \\ \dfrac{-x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2} & \dfrac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{x=x(\varphi)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi^2 & \sin\varphi^2 & 0 \\ -\dfrac{1}{\varphi^1}\sin\varphi^2 & \dfrac{1}{\varphi^1}\cos\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stąd otrzymamy

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}_1 = g_1^i(\varphi)\underset{\sim}{i}_i = g_1^1(\varphi)\underset{\sim}{i}_1 + g_1^2(\varphi)\underset{\sim}{i}_2 + g_1^3(\varphi)\underset{\sim}{i}_3 = \\ \qquad = \cos\varphi^2\underset{\sim}{i}_1 + \sin\varphi^2\underset{\sim}{i}_2 \\ \underset{\sim}{d}_2 = g_2^i(\varphi)\underset{\sim}{i}_i = g_2^1(\varphi)\underset{\sim}{i}_1 + g_2^2(\varphi)\underset{\sim}{i}_2 + g_2^3(\varphi)\underset{\sim}{i}_3 = -\varphi^1\sin\varphi^2\underset{\sim}{i}_1 + \\ \qquad + \varphi^1\cos\varphi^2\underset{\sim}{i}_2 \\ \underset{\sim}{d}_3 = g_3^i(\varphi)\underset{\sim}{i}_i = g_3^1(\varphi)\underset{\sim}{i}_1 + g_3^2(\varphi)\underset{\sim}{i}_2 + g_3^3(\varphi)\underset{\sim}{i}_3 = \underset{\sim}{i}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}^1(\varphi) = g_i^1(\varphi)\underset{\sim}{i}^i = g_1^1(\varphi)\underset{\sim}{i}^1 + g_2^1(\varphi)\underset{\sim}{i}^2 + g_3^1(\varphi)\underset{\sim}{i}^3 = \\ \qquad = \cos\varphi^2\underset{\sim}{i}_1 + \sin\varphi^2\underset{\sim}{i}_2 \\ \underset{\sim}{d}^2(\varphi) = g_i^2(\varphi)\underset{\sim}{i}^i = g_1^2(\varphi)\underset{\sim}{i}^1 + g_2^2(\varphi)\underset{\sim}{i}^2 + g_3^2(\varphi)\underset{\sim}{i}^3 = \\ \qquad = -\dfrac{1}{\varphi^1}\sin\varphi^2\underset{\sim}{i}_1 + \dfrac{1}{\varphi^1}\cos\varphi^2\underset{\sim}{i}_2 \\ \underset{\sim}{d}^3(\varphi) = g_i^3(\varphi)\underset{\sim}{i}^i = g_1^3(\varphi)\underset{\sim}{i}^1 + g_2^3(\varphi)\underset{\sim}{i}^2 + g_3^3(\varphi)\underset{\sim}{i}^3 = \underset{\sim}{i}_3 \end{cases}$$

Ponieważ macierze przejścia

$$\left[g_{\alpha\beta}(\varphi)\right] = \left[\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\circ\underset{\sim}{d}_\beta(\varphi)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\varphi^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[g^{\alpha\beta}(\varphi)\right] = \left[\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\varphi^1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

są diagonalne, zatem bazy $\{\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)\}$ i $\{\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi)\}$ są ortogonalne. Interpretacja geometryczna tych baz przedstawiona jest na rys.9.4.

Tensor jednostkowy (metryczny) w biegunowym układzie współrzędnych można przedstawić w postaciach

$$\underset{\sim}{1} = g_{\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi) = \underset{\sim}{d}^{1}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{1}(\varphi) + (\varphi^1)^2\underset{\sim}{d}^{2}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{2}(\varphi) + \\ + \underset{\sim}{d}^{3}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{3}(\varphi)$$

$$\underset{\sim}{1} = g^{\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}_{\beta}(\varphi) = \underset{\sim}{d}_{1}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}_{1}(\varphi) + \frac{1}{(\varphi^1)^2}\underset{\sim}{d}_{2}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}_{2}(\varphi) + \\ + \underset{\sim}{d}_{3}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}_{3}(\varphi)$$

b) znajdziemy bazy fizyczne $\{\hat{\underset{\sim}{d}}_{\alpha}(\varphi)\}$ i $\{\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi)\}$ wyznaczone przez walcowy układ współrzędnych. Zatem mamy

$$\hat{\underset{\sim}{d}}_{\alpha}(\varphi) = \frac{\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}(\varphi)}} \qquad \text{dla} \quad \alpha = 1,2,3$$

i

$$\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) = \frac{\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi)}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}(\varphi)}} \qquad \text{dla} \quad \alpha = 1,2,3$$

Stąd otrzymamy

$$\begin{cases} \hat{\underset{\sim}{d}}_1 = \hat{\underset{\sim}{d}}^1 = \cos\varphi^2\underset{\sim}{i}_1 + \sin\varphi^2\underset{\sim}{i}_2 \\ \hat{\underset{\sim}{d}}_2 = \hat{\underset{\sim}{d}}^2 = -\sin\varphi^2\underset{\sim}{i}_1 + \cos\varphi^2\underset{\sim}{i}_2 \\ \underset{\sim}{d}_3 = \underset{\sim}{d}^3 = \underset{\sim}{i}_3 \end{cases}$$

Macierze przejścia

$$\left[\hat{g}_{\alpha\beta}(\varphi)\right] = \left[\hat{g}^{\alpha\beta}(\varphi)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

są macierzami jednostkowymi, a więc bazy fizyczne są ortonormalne.

c) znajdziemy symbole Christoffela drugiego rodzaju dla walcowego układu współrzędnych. Korzystając ze wzorów na symbole Christoffela mamy

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\varphi) = \underset{\sim}{d}_{\alpha,\beta}(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}^{\gamma}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_{\varphi};\ \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3$$

Stąd otrzymamy

$$\Gamma^{1}_{22}(\varphi) = \underset{\sim}{d}_{2,2}(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}^{1}(\varphi) =$$

$$= (-\varphi^1 \cos\varphi^2 \underset{\sim}{i}_1 - \varphi^1 \sin\varphi^2 \underset{\sim}{i}_2) \circ (\cos\varphi^2 \underset{\sim}{i}_1 + \sin\varphi^2 \underset{\sim}{i}_2) = -\varphi^1$$

$$\Gamma^{2}_{12}(\varphi) = \underset{\sim}{d}_{1,2}(\varphi) \circ \underset{\sim}{d}^{2}(\varphi) =$$

$$= (-\sin\varphi^2 \underset{\sim}{i}_1 + \cos\varphi^2 \underset{\sim}{i}_2) \circ \left(-\frac{1}{\varphi^1}\sin\varphi^2 \underset{\sim}{i}_1 + \frac{1}{\varphi^1}\cos\varphi^2 \underset{\sim}{i}_2\right) = \frac{1}{\varphi^1}$$

$$\Gamma^{2}_{21}(\varphi) = \underset{\sim}{d}_{2,1}(\varphi) \underset{\sim}{d}^{2}(\varphi) =$$

$$= (-\sin\varphi^2 \underset{\sim}{i}_1 + \cos\varphi^2 \underset{\sim}{i}_2) \circ \left(-\frac{1}{\varphi^1}\sin\varphi^2 \underset{\sim}{i}_1 + \frac{1}{\varphi^1}\cos\varphi^2 \underset{\sim}{i}_2\right) = \frac{1}{\varphi^1}$$

Pozostałe 24 symbole

$$\Gamma^{1}_{11}(\varphi) = \Gamma^{1}_{12}(\varphi) = \Gamma^{1}_{21}(\varphi) = \Gamma^{1}_{13}(\varphi) = \Gamma^{1}_{31}(\varphi) = \Gamma^{1}_{23}(\varphi) = \Gamma^{1}_{32}(\varphi) =$$

$$= \Gamma^{1}_{33}(\varphi) = \Gamma^{2}_{11}(\varphi) = \Gamma^{2}_{13}(\varphi) = \Gamma^{2}_{31}(\varphi) = \Gamma^{2}_{22}(\varphi) = \Gamma^{2}_{23}(\varphi) =$$

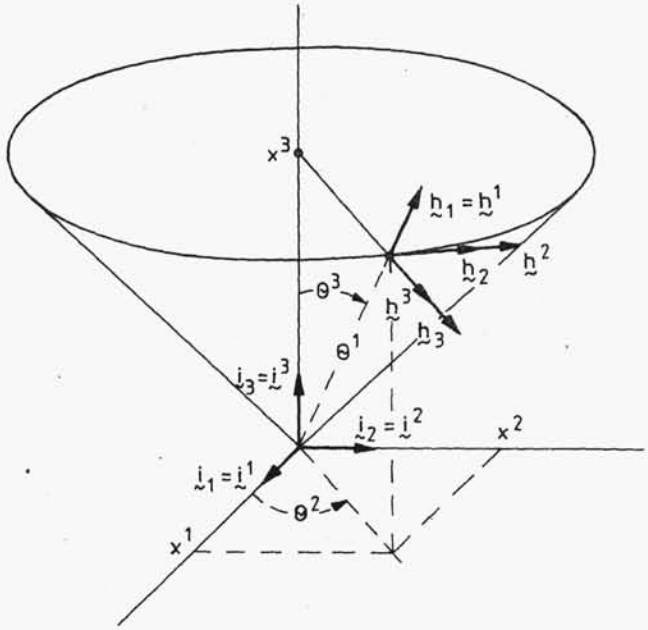
$$= \Gamma^{2}_{32}(\varphi) = \Gamma^{2}_{33}(\varphi) = \Gamma^{3}_{11}(\varphi) = \Gamma^{3}_{12}(\varphi) = \Gamma^{3}_{21}(\varphi) = \Gamma^{3}_{22}(\varphi) =$$

$$= \Gamma^{3}_{13}(\varphi) = \Gamma^{3}_{31}(\varphi) = \Gamma^{3}_{23}(\varphi) = \Gamma^{3}_{32}(\varphi) = \Gamma^{3}_{33}(\varphi) = 0$$

P r z y k ł a d 9.2. Kulistym układem współrzędnych w przestrzeni euklidesowej punktowej ε^3 nazywamy odwzorowanie $X : D_\theta \to \varepsilon^3$, które w kartezjańskim układzie odniesienia $(O,\{\underset{\sim}{i}_i\})$ określone jest następująco:

$$\begin{cases} x^1(\theta^1,\theta^2,\theta^3) = \theta^1 \cos\theta^2 \sin\theta^3 \\ x^2(\theta^1,\theta^2,\theta^3) = \theta^1 \sin\theta^2 \sin\theta^3 \\ x^3(\theta^1,\theta^2,\theta^3) = \theta^1 \cos\theta^3 \end{cases} \quad \text{dla} \quad \theta = (\theta^1,\theta^2,\theta^3) \in D_\theta$$

gdzie: $D_\theta = \{\theta = (\theta^1,\theta^2,\theta^3) \in R^3 : 0<\theta^1<\infty\ ,\ 0<\theta^2<2\pi,\ 0<\theta^3<\pi\}$.



Rys.9.5

Obrazem zbioru D_θ przez funkcję X nie jest cała przestrzeń ε^3 lecz obszar

$$X(D_\theta) = \varepsilon^3 - \{x = (x^1,0,x^3) : x^1 \geqslant 0\}$$

Odwzorowaniem odwrotnym do kulistego układu współrzędnych jest odwzorowanie $\theta : X(D_\theta) \to D_\theta$, które jest określone następująco

$$
\begin{cases}
\theta^1(x^1,x^2,x^3) = \sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} \\
\theta^2(x^1,x^2,x^3) = \operatorname{arcctg}\dfrac{x^1}{x^2} + \varepsilon\pi \qquad \text{dla } x = (x^1,x^2,x^3) \in X(D_\theta) \\
\theta^3(x^1,x^2,x^3) = \operatorname{arcctg}\dfrac{x^3}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}
\end{cases}
$$

przy czym $\varepsilon = 0$ dla $x^2 \geqslant 0$ i $\varepsilon = 1$ dla $x^2 < 0$.

Interpretację kulistego układu współrzędnych przedstawia rysunek 9.5.

a) znajdziemy bazę $\underset{\sim}{h}_\Omega(\theta)$ i kobazę $\underset{\sim}{h}^\Omega(\theta)$ wyznaczone przez kulisty układ współrzędnych. Z twierdzenia 9.5 wynika, że

$$
\underset{\sim}{h}_\Omega(\theta) = g^i_\Omega(\theta)\underset{\sim}{i}_i \quad \text{i} \quad \underset{\sim}{h}^\Omega(\theta) = g^\Omega_i(x(\theta))\underset{\sim}{i}^i \quad \text{dla } \theta \in D; \ \Omega = 1,2,3
$$

a więc należy znaleźć macierze przejścia $\left[g^i{}_\Omega(Q)\right]$ i $\left[g^\Omega{}_i(\theta)\right]$ gdzie

$$
g^i_\Omega(\theta) = x^i{}_{,\Omega}(\theta) \quad \text{i} \quad g^\Omega_i(\theta) = \theta^\Omega{}_{,i}(x(\theta)) \quad \text{dla } \theta \in D_\theta; \ i, = 1,2,3
$$

Zatem

$$
\left[g^i{}_\Omega(\theta)\right] = \begin{bmatrix}
\cos\theta^2 \sin\theta^3 & -\theta^1\sin\theta^2 \sin\theta^3 & \theta^1\cos\theta^2 \cos\theta^3 \\
\sin\theta^2 \sin\theta^3 & \theta^1\cos\theta^2 \sin\theta^3 & \theta^1\sin\theta^2 \cos\theta^3 \\
\cos\theta^3 & 0 & -\theta^1\sin\theta^3
\end{bmatrix}
$$

$$
\left[g^\Omega{}_i(\theta)\right] = \begin{bmatrix}
\dfrac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}} & \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}} & \dfrac{x^3}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}} \\
-\dfrac{x^2}{(x^1)^2+(x^2)^2} & \dfrac{x^1}{(x^1)^2+(x^2)^2} & 0 \\
\dfrac{x^1x^3\left(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}\right)^{-1}}{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} & \dfrac{x^2x^3\left(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}\right)^{-1}}{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2} & \dfrac{-\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}
\end{bmatrix}_{x=x(\theta)} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\theta^2\sin\theta^3 & \sin\theta^2\sin\theta^3 & \cos\theta^3 \\ -\dfrac{\sin\theta^2}{\theta^1\sin\theta^3} & \dfrac{\cos\theta^2}{\theta^1\sin\theta^3} & 0 \\ \dfrac{\cos\theta^2\cos\theta^3}{\theta^1} & \dfrac{\sin\theta^2\cos\theta^3}{\theta^1} & -\dfrac{\sin\theta^3}{\theta^1} \end{bmatrix}
$$

Stąd otrzymamy

$$\underset{\sim}{h}_1(\theta) = g_1^i(\theta)\underset{\sim}{i}_i = g_1^1(\theta)\underset{\sim}{i}_1 + g_1^2(\theta)\underset{\sim}{i}_2 + g_1^3(\theta)\underset{\sim}{i}_3 =$$
$$= \cos\theta^2\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_1 + \sin\theta^2\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_2 + \cos\theta^3\underset{\sim}{i}_3$$

$$\underset{\sim}{h}_2(\theta) = g_2^i(\theta)\underset{\sim}{i}_i = g_2^1(\theta)\underset{\sim}{i}_1 + g_2^2(\theta)\underset{\sim}{i}_2 + g_2^3(\theta)\underset{\sim}{i}_3 =$$
$$= -\theta^1\sin\theta^2\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_1 + \theta^1\cos\theta^2\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_2$$

$$\underset{\sim}{h}_3(\theta) = g_3^i(\theta)\underset{\sim}{i}_i = g_3^1(\theta)\underset{\sim}{i}_1 + g_3^2(\theta)\underset{\sim}{i}_2 + g_3^3(\theta)\underset{\sim}{i}_3 =$$
$$= \theta^1\cos\theta^2\cos\theta^3\underset{\sim}{i}_1 + \theta^1\sin\theta^2\cos\theta^3\underset{\sim}{i}_2 - \theta^1\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_3$$

$$\underset{\sim}{h}^1(\theta) = g_i^1(\theta)\underset{\sim}{i}^i = g_1^1(\theta)\underset{\sim}{i}^1 + g_2^1(\theta)\underset{\sim}{i}^2 + g_3^1(\theta)\underset{\sim}{i}^3 =$$
$$= \cos\theta^2\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_1 + \sin\theta^2\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_2 + \cos\theta^3\underset{\sim}{i}_3$$

$$\underset{\sim}{h}^2(\theta) = g_i^2(\theta)\underset{\sim}{i}^i = g_1^2(\theta)\underset{\sim}{i}^1 + g_2^2(\theta)\underset{\sim}{i}^2 + g_3^2(\theta)\underset{\sim}{i}^3 =$$
$$= -\frac{\sin\theta^2}{\theta^1\sin\theta^3}\underset{\sim}{i}_1 + \frac{\cos\theta^2}{\theta^1\sin\theta^3}\underset{\sim}{i}_2$$

$$\underset{\sim}{h}^3(\theta) = g_i^3(\theta)\underset{\sim}{i}^i = g_1^3(\theta)\underset{\sim}{i}^1 + g_2^3(\theta)\underset{\sim}{i}^2 + g_3^3(\theta)\underset{\sim}{i}^3 =$$
$$= \frac{\cos\theta^2\cos\theta^3}{\theta^1}\underset{\sim}{i}_1 + \frac{\sin\theta^2\cos\theta^3}{\theta^1}\underset{\sim}{i}_2 - \frac{\sin\theta^3}{\theta^1}\underset{\sim}{i}_3$$

Ponieważ macierze przejścia

$$\left[g_{\Omega\Phi}(\theta)\right] = \left[\underset{\sim}{h}_\Omega(\theta)\underset{\sim}{h}_\Phi(\theta)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\theta^1)^2\sin^2\theta^3 & 0 \\ 0 & 0 & (\theta^1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\left[g^{\Omega\Phi}(\theta)\right] = \left[\underset{\sim}{h}^{\Omega}(\theta)\underset{\sim}{h}^{\Phi}(\theta)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\theta^1)^2\sin^2\theta^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(\theta^1)^2} \end{bmatrix}$$

są diagonalne, zatem bazy $\{\underset{\sim}{h}_{\Omega}(\theta)\}$ i $\{\underset{\sim}{h}^{\Omega}(\theta)\}$ są ortogonalne. Interpretacja geometryczna tych bąz przedstawiona jest na rys.9.5.

Tensor jednostkowy (metryczny) w kulistym układzie współrzędnych można przedstawić w postaciach

$$\underset{\sim}{1} = g_{\Omega\Phi}(\theta)\underset{\sim}{h}^{\Omega}(\theta)\otimes\underset{\sim}{h}^{\Phi}(\theta) =$$

$$= \underset{\sim}{h}^1(\theta)\otimes\underset{\sim}{h}^1(\theta) + (\theta^1)^2\sin^2\theta^3\underset{\sim}{h}^2(\theta)\otimes\underset{\sim}{h}^2(\theta) + (\theta^1)^2\underset{\sim}{h}^3(\theta)\otimes\underset{\sim}{h}^3(\theta)$$

$$\underset{\sim}{1} = g^{\Omega\Phi}(\theta)\underset{\sim}{h}_{\Omega}(\theta)\otimes\underset{\sim}{h}_{\Phi}(\theta) =$$

$$= \underset{\sim}{h}_1(\theta)\otimes\underset{\sim}{h}_1(\theta) + \frac{1}{(\theta^1)^2\sin^2\theta^3}\underset{\sim}{h}_2(\theta)\otimes\underset{\sim}{h}_2(\theta) + \frac{1}{(\theta^1)^2}\underset{\sim}{h}_3(\theta)\otimes\underset{\sim}{h}_3(\theta)$$

b) Znajdziemy bazy $\{\hat{\underset{\sim}{h}}_{\Omega}(\theta)\}$ i $\{\hat{\underset{\sim}{h}}^{\Omega}(\theta)\}$ fizyczne wyznaczone przez kulisty układ współrzędnych. Zatem mamy

$$\hat{\underset{\sim}{h}}_{\Omega}(\theta) = \frac{\underset{\sim}{h}_{\Omega}(\theta)}{\sqrt{g_{\Omega\Omega}(\theta)}} \quad \text{i} \quad \hat{\underset{\sim}{h}}(\theta) = \frac{\underset{\sim}{h}^{\Omega}(\theta)}{\sqrt{g^{\Omega\Omega}(\theta)}} \quad \text{dla} \quad \theta\in D_\theta;\ \Omega = 1,2,3$$

a stąd otrzymamy

$$\begin{cases} \hat{\underset{\sim}{h}}_1(\theta) = \hat{\underset{\sim}{h}}^1(\theta) = \cos\theta^2\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_1 + \sin\theta^2\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_2 + \cos\theta^3\underset{\sim}{i}_3 \\ \hat{\underset{\sim}{h}}_2(\theta) = \hat{\underset{\sim}{h}}^2(\theta) = -\sin\theta^2\underset{\sim}{i}_1 + \cos\theta^2\underset{\sim}{i}_2 \\ \hat{\underset{\sim}{h}}_3(\theta) = \hat{\underset{\sim}{h}}^3(\theta) = \cos\theta^2\cos\theta^3\underset{\sim}{i}_1 + \sin\theta^2\cos\theta^3\underset{\sim}{i}_2 - \sin\theta^3\underset{\sim}{i}_3 \end{cases}$$

Ponieważ macierze przejścia

$$\left[\hat{g}_{\Omega\Phi}(\theta)\right] = \left[\hat{g}^{\Omega\Phi}(\theta)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

są jednostkowe, a więc bazy fizyczne są ortonormalne.

c) znajdziemy symbole Christoffela drugiego rodzaju dla kulistego układu współrzędnych. Korzystając ze wzorów na symbole Christoffela mamy

$$\Gamma^{\Omega}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\theta) = \underset{\sim}{h}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}(\theta) \circ \underset{\sim}{h}^{\Omega}(\theta) \quad \text{dla} \quad \theta \in D \,;\, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \Omega = 1,2,3$$

a stąd otrzymamy

$$\Gamma^{1}_{22}(\theta) = \underset{\sim}{h}_{2,2}(\theta) \circ \underset{\sim}{h}^{1}(\theta) =$$

$$= (-\theta^1 \cos\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 - \theta^1 \sin\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_2) \circ (\cos\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 +$$
$$+ \sin\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_2 + \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_3) = -\theta^1 \sin^2\theta^3$$

$$\Gamma^{1}_{33}(\theta) = \underset{\sim}{h}_{3,3}(\theta) \circ \underset{\sim}{h}^{1}(\theta) =$$

$$= (-\theta^1 \cos\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 - \theta^1 \sin\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_2 - \theta^1 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_3) \circ$$
$$\circ (\cos\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 + \sin\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_2 + \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_3) = -\theta^1$$

$$\Gamma^{2}_{12}(\theta) = \underset{\sim}{h}_{1,2}(\theta) \circ \underset{\sim}{h}^{2}(\theta) =$$

$$= (-\sin\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 + \cos\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_2 + 0 \underset{\sim}{i}_3) \circ$$
$$\circ \left(-\frac{\sin\theta^2}{\theta^1 \sin\theta^3} \underset{\sim}{i}_1 + \frac{\cos\theta^2}{\theta^1 \sin\theta^3} \underset{\sim}{i}_2\right) = \frac{1}{\theta^1}$$

$$\Gamma^{2}_{21}(\theta) = \underset{\sim}{h}_{2,1}(\theta) \circ \underset{\sim}{h}^{2}(\theta) = (-\sin\theta^2 \sin\theta^3 i_1 \cos\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_2) \circ$$
$$\circ \left(-\frac{\sin\theta^2}{\theta^1 \sin\theta^3} \underset{\sim}{i}_1 + \frac{\cos\theta^2}{\theta^1 \sin\theta^3} \underset{\sim}{i}_2\right) = \frac{1}{\theta^1}$$

$$\Gamma^{2}_{23}(\theta) = \underset{\sim}{h}_{2,3}(\theta) \underset{\sim}{h}^{2}(\theta) = (-\theta^1 \sin\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 + \theta^1 \cos\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_2) \circ$$
$$\circ \left(-\frac{\sin\theta^2}{\theta^1 \sin\theta^3} \underset{\sim}{i}_1 + \frac{\cos\theta^2}{\theta^1 \sin\theta^3} \underset{\sim}{i}_2\right) = \operatorname{ctg}\theta^3$$

$$\Gamma^{2}_{32}(\theta) = \underset{\sim}{h}_{3,2}(\theta) \circ \underset{\sim}{h}^{2}(\theta) =$$

$$= (-\theta^1 \sin\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 + \theta^1 \cos\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_2 + 0 \underset{\sim}{i}_3) \circ$$

$$\circ \left(- \frac{\sin\theta^2}{\theta^1 \sin\theta^3} \underset{\sim}{i}_1 + \frac{\cos\theta^2}{\theta^1 \sin\theta^3} \underset{\sim}{i}_2 \right) = \operatorname{ctg}\theta^3$$

$$\Gamma^{3}_{13}(\theta) = \underset{\sim}{h}_{1,3}(\theta) \circ \underset{\sim}{h}^{3}(\theta) =$$

$$= (\cos\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 + \sin\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_2 - \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_3) \circ$$

$$\circ \left(\frac{1}{\theta^1} \cos\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 + \frac{1}{\theta^1} \sin\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_2 - \frac{1}{\theta^1} \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_3 \right) = \frac{1}{\theta^1}$$

$$\Gamma^{3}_{22}(\theta) = \underset{\sim}{h}_{2,2}(\theta) \circ \underset{\sim}{h}^{3}(\theta) =$$

$$= (-\theta^1 \cos\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 - \theta^1 \sin\theta^2 \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_2) \circ$$

$$\circ \left(\frac{1}{\theta^1} \cos\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 + \frac{1}{\theta^1} \sin\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_2 - \frac{1}{\theta^1} \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_3 \right) =$$

$$= -\sin\theta^3 \cos\theta^3$$

$$\Gamma^{3}_{31}(\theta) = \underset{\sim}{h}_{3,1}(\theta) \circ \underset{\sim}{h}^{3}(\theta) =$$

$$= (\cos\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 + \sin\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_2 - \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_3) \circ$$

$$\circ \left(\frac{1}{\theta^1} \cos\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_1 + \frac{1}{\theta^1} \sin\theta^2 \cos\theta^3 \underset{\sim}{i}_2 - \frac{1}{\theta^1} \sin\theta^3 \underset{\sim}{i}_3 \right) = \frac{1}{\theta^1}$$

Pozostałe 18 symboli:

$$\Gamma^{1}_{11}(\theta) = \Gamma^{1}_{12}(\theta) = \Gamma^{1}_{21}(\theta) = \Gamma^{1}_{13}(\theta) = \Gamma^{1}_{31}(\theta) = \Gamma^{1}_{23}(\theta) = \Gamma^{1}_{32}(\theta) =$$

$$= \Gamma^{2}_{11}(\theta) = \Gamma^{2}_{22}(\theta) = \Gamma^{2}_{13}(\theta) = \Gamma^{2}_{31}(\theta) = \Gamma^{2}_{33}(\theta) = \Gamma^{3}_{11}(\theta) =$$

$$= \Gamma^{3}_{12}(\theta) = \Gamma^{3}_{21}(\theta) = \Gamma^{3}_{23}(\theta) = \Gamma^{3}_{32}(\theta) = \Gamma^{3}_{33}(\theta) = 0$$

P r z y k ł a d 9.3. Niech będą dane układy współrzędnych: walcowy $X : D_\varphi \to \mathcal{E}^3$ i sferyczny $X : D_\theta \to \mathcal{E}^3$ w przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^3$ określone w przykładach 9.1 i 9.2. Sprawdzimy wzór $\underset{\sim}{h}_\Omega(\theta) = g^\Omega_\alpha(\theta)\underset{\sim}{d}^\alpha(\theta)$ dla $\theta \in D_\theta$; $\Omega = 1,2,3$, występujący w twierdzeniu 9.6.

Szukamy odwzorowania $\varphi \circ X : D_\theta \to D_\varphi$ wiążącego układy sferyczny i walcowy, więc

$$\begin{cases} \varphi^1(\theta^1,\theta^2,\theta^3) = \theta^1 \sin\theta^3 \\ \varphi^2(\theta^1,\theta^2,\theta^3) = \theta^2 \qquad\qquad \text{dla } \theta = (\theta^1,\theta^2,\theta^3) \in D_\theta \\ \varphi^3(\theta^1,\theta^2,\theta^3) = \theta^1 \cos\theta^3 . \end{cases}$$

Ponieważ $g^\alpha_\Omega(\theta) = \varphi^\alpha_{,\Omega}(\theta)$ dla $\theta \in D_\theta$; $\alpha, \Omega = 1,2,3$, to

$$\left[g^\alpha_{\ \Omega}(\theta)\right] = \begin{bmatrix} \sin\theta^3 & 0 & \theta^1\cos\theta^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta^3 & 0 & -\theta^1\sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

a stąd mamy

$$\left[g^\Omega_{\ \alpha}(\theta)\right] = \left[g^\alpha_{\ \Omega}(\theta)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \sin\theta^3 & 0 & \cos\theta^3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\theta^1}\cos\theta^3 & 0 & -\frac{1}{\theta^1}\sin\theta^3 \end{bmatrix}$$

Zapisując kobazę $\{\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)\}$ we współrzędnych sferycznych mamy

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}^1(\theta) = \cos\theta^2 \underset{\sim}{i}_1 + \sin\theta^2 \underset{\sim}{i}_2 \\ \underset{\sim}{d}^2(\theta) = -\dfrac{\sin\theta^2}{\theta^1\sin\theta^3}\underset{\sim}{i}_1 + \dfrac{\cos\theta^2}{\theta^1\sin\theta^3}\underset{\sim}{i}_2 \\ \underset{\sim}{d}^3(\theta) = \underset{\sim}{i}_3 \end{cases}$$

Zatem mamy

$$\underset{\sim}{h}^1(\theta) = g^1_\alpha(\theta)\underset{\sim}{d}^\alpha(\theta) = g^1_1(\theta)\underset{\sim}{d}^1(\theta) + g^1_2(\theta)\underset{\sim}{d}^2(\theta) + g^1_3(\theta)\underset{\sim}{d}^3(\theta) =$$

$$= \cos\theta^2\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_1 + \sin\theta^2\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_2 + \cos\theta^3\underset{\sim}{i}_3$$

$$\underset{\sim}{h}^2(\theta) = g^2_\alpha(\theta)\underset{\sim}{d}^\alpha(\theta) = g^2_1(\theta)\underset{\sim}{d}^1(\theta) + g^2_2(\theta)\underset{\sim}{d}^2(\theta) + g^2_3(\theta)\underset{\sim}{d}^3(\theta) =$$

$$= -\frac{\sin\theta^2}{\theta^1\sin\theta^3}\underset{\sim}{i}_1 + \frac{\cos\theta^2}{\theta^1\sin\theta^3}\underset{\sim}{i}_2$$

$$\underset{\sim}{h}^3(\theta) = g^3_\alpha(\theta)\underset{\sim}{d}^\alpha(\theta) = g^3_1(\theta)\underset{\sim}{d}^1(\theta) + g^3_2(\theta)\underset{\sim}{d}^2(\theta) + g^3_3(\theta)\underset{\sim}{d}^3(\theta) =$$

$$= \frac{1}{\theta^1}\cos\theta^2\cos\theta^3\underset{\sim}{i}_1 + \frac{1}{\theta^1}\sin\theta^2\cos\theta^3\underset{\sim}{i}_2 - \frac{1}{\theta^1}\sin\theta^3\underset{\sim}{i}_3$$

Otrzymana kobaza jest identyczna z kobazą wyznaczoną przez układ współrzędnych sferycznych.

9.3. Zadania

Zadanie 9.1. Niech w przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^3$ będzie dany układ współrzędnych krzywoliniowych $X: D_\varphi \to \mathcal{E}^3$, który w kartezjańskim układzie odniesienia $(O,\{\underset{\sim}{i}_i\})$ określony jest następująco:

$$\begin{cases} x^1(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3) = \varphi^1 + (\varphi^2)^2 \\ x^2(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3) = 3\varphi^3 \\ x^3(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3) = \varphi^2\varphi^3 + 1 \end{cases} \qquad \text{dla } \varphi = (\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3) \in D_\varphi$$

a) znaleźć bazę $\{\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi)\}$ i kobazę $\{\underset{\sim}{d}^\alpha(\varphi)\}$ wyznaczone przez układ współrzędnych krzywoliniowych,

b) znaleźć bazę $\{\hat{\underset{\sim}{d}}_\alpha(\varphi)\}$ i kobazę $\{\hat{\underset{\sim}{d}}^\alpha(\varphi)\}$ fizyczne wyznaczone przez układ współrzędnych krzywoliniowych,

c) znaleźć symbole Christoffela drugiego rodzaju dla układu współrzędnych krzywoliniowych.