3. PRZESTRZENIE EUKLIDESOWE

3.1. Definicja i własności przestrzeni euklidesowej

<u>Definicja</u> 3.1. Niech E będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych R. Odwzorowanie $\circ : E \times E \longrightarrow R$ spełniające aksjomaty:

1) $\bigwedge\limits_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c} \in E} (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) \circ \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{c}$

2) $\bigwedge\limits_{\alpha \in R} \bigwedge\limits_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in E} (\alpha \underset{\sim}{a}) \circ \underset{\sim}{c} = \alpha(\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b})$

3) $\bigwedge\limits_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in E} \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{a}$

4) $\bigwedge\limits_{\underset{\sim}{0} \neq \underset{\sim}{a} \in E} \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a} > 0$

nazywamy iloczynem skalarnym w przestrzeni E. Parę $(E,\circ)$ nazywamy przestrzenią euklidesową.

W dalszym ciągu wektory przestrzeni euklidesowej będziemy zwykle zaznaczać przez podkreślenie wężykiem.

Bezpośrednio z definicji iloczynu skalarnego wynikają następujące własności:

1') $\bigwedge\limits_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c} \in R} \underset{\sim}{a} \circ (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c}) = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{c}$

2') $\bigwedge\limits_{\alpha \in R} \bigwedge\limits_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in R} \underset{\sim}{a} \circ (\alpha \underset{\sim}{b}) = \alpha(\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b})$

Łatwo zauważyć, że iloczyn skalarny jest symetryczną i dodatnio określoną formą dwuliniową w przestrzeni E.

P r z y k ł a d 3.1. Niech R^n będzie przestrzenią liniową ciągów n-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykażemy, że forma $\circ : R^n \times R^n \longrightarrow R$ określona następująco:

$$\bigwedge\limits_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in R^n} \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} = [\alpha_1,\dots,\alpha_n] \circ [\beta_1,\dots,\beta_n] := \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n$$

jest iloczynem skalarnym w przestrzeni R^n.

Sprawdzamy aksjomaty definicji iloczynu skalarnego:

1) dla dowolnych ciągów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in R^n$ mamy

$$(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) \circ \underset{\sim}{c} = ([\alpha_1, \ldots, \alpha_n] + [\beta_1, \ldots, \beta_n]) \circ [\gamma_1, \ldots, \gamma_n] =$$

$$= [\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_n+\beta_n] \circ [\gamma_1, \ldots, \gamma_n] = (\alpha_1+\beta_1)\gamma_1 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)\gamma_n =$$

$$= (\alpha_1\gamma_1 + \ldots + \alpha_n\gamma_n) + (\beta_1\gamma_1 + \ldots + \beta_n\gamma_n) = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \circ [\gamma_1, \ldots, \gamma_n] +$$

$$+ [\beta_1, \ldots, \beta_n] \circ [\gamma_1, \ldots, \gamma_n] = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{c}$$

2) dla dowolnej liczby $\gamma \in R$ i dowolnych ciągów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in R^n$ mamy

$$(\gamma \underset{\sim}{a}) \circ \underset{\sim}{b} = (\gamma[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]) \circ [\beta_1, \ldots, \beta_n] =$$

$$= [\gamma\alpha_1, \ldots, \gamma\alpha_n] \circ [\beta_1, \ldots, \beta_n] =$$

$$= (\gamma\alpha_1)\beta_1 + \ldots + (\gamma\alpha_n)\beta_n = \gamma(\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n) =$$

$$= \gamma([\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \circ [\beta_1, \ldots, \beta_n]) = \gamma(\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b})$$

3) dla dowolnych ciągów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in R^n$ mamy

$$\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \circ [\beta_1, \ldots, \beta_n] = \alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n =$$

$$= \beta_1\alpha_1 + \ldots + \beta_n\alpha_n = [\beta_1, \ldots, \beta_n] \circ [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{a}$$

4) dla dowolnego ciągu $\underset{\sim}{a} \in R^n$ i $\underset{\sim}{a} \neq 0$ mamy

$$\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \circ [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = \alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2 > 0$$

Aksjomaty definicji 3.1 są spełnione, zatem odwzorowanie jest iloczynem skalarnym w przestrzeni R^n. Iloczyn ten nazywamy standardowym, a przestrzeń euklidesową $(R^n, \circ)$ nazywamy n-wymiarową przestrzenią kartezjańską.

P r z y k ł a d 3.2. Niech $C^0(\langle a,b\rangle; R)$ będzie przestrzenią liniową funkcji rzeczywistych ciągłych i określonych w przedziale $\langle a,b\rangle$. Odwzorowanie $\circ : C^0(\langle a,b\rangle;R) \times (\langle a,b\rangle;R) \to R$ określone następująco

$$\bigwedge_{f,g\in C^0(<a,b>;R)} f\circ g := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

jak łatwo sprawdzić, jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $C^0(<a,b>;R)$. Zatem $(C^0(<a,b>;R), \circ)$ jest przestrzenią euklidesową.

Definicja 3.2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych R. Odwzorowanie $\|\ \|: V \to R$ spełniające aksjomaty:

1) $\bigwedge_{0\neq a\in V} \|a\| > 0$

2) $\bigwedge_{\alpha\in R}\bigwedge_{a\in V} \|\alpha a\| = |\alpha|\,\|a\|$

3) $\bigwedge_{a,b\in V} \|a+b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$

nazywamy normą w przestrzeni V. Parę $(V, \|\ \|)$ nazywamy przestrzenią unormowaną.

Twierdzenie 3.1. Niech $(E, \circ)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wtedy odwzorowanie $\|\ \|: E \to R$ określone wzorem

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{a}\in E} \|\underset{\sim}{a}\| := \sqrt{\underset{\sim}{a}\circ\underset{\sim}{a}}$$

spełnia warunki

1) $\bigwedge_{\underset{\sim}{0}\neq\underset{\sim}{a}\in E} \|\underset{\sim}{a}\| > 0$

2) $\bigwedge_{\alpha\in R}\bigwedge_{\underset{\sim}{a}\in E} \|\alpha\underset{\sim}{a}\| = |\alpha|\,\|\underset{\sim}{a}\|$

3) $\bigwedge_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}\in E} |\underset{\sim}{a}\circ\underset{\sim}{b}| \leqslant \|\underset{\sim}{a}\|\,\|\underset{\sim}{b}\|$ nierówność Schwarza

4) $\bigwedge_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}\in E} \|\underset{\sim}{a}+\underset{\sim}{b}\| \leqslant \|\underset{\sim}{a}\| + \|\underset{\sim}{b}\|$ nierówność trójkąta

5) $\bigwedge_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}\in E} \big|\|a\| - \|b\|\big| \leqslant \|a-b\|$

Dowód. Korzystamy z aksjomatów definicji iloczynu skalarnego.

1) dla dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in E$ i $\underset{\sim}{a} \neq 0$ mamy $\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a} > 0$. Stąd

$$\|\underset{\sim}{a}\| = \sqrt{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a}} > 0$$

2) dla dowolnej liczby $\alpha \in R$ i dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in E$ mamy

$$\|\alpha \underset{\sim}{a}\|^2 = (\alpha \underset{\sim}{a}) \circ (\alpha \underset{\sim}{a}) = (\alpha\alpha)(\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a}) = |\alpha|^2 \, \|\underset{\sim}{a}\|^2$$

Stąd

$$\|\alpha \underset{\sim}{a}\| = |\alpha| \, \|\underset{\sim}{a}\|$$

3) dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in E$ i $\underset{\sim}{b} \neq \underset{\sim}{0}$ przyjmijmy

$$\underset{\sim}{c} := \underset{\sim}{a} - \frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\|\underset{\sim}{b}\|^2} \underset{\sim}{b}$$

Wtedy mamy

$$0 \leqslant \|\underset{\sim}{c}\|^2 = \underset{\sim}{c} \circ \underset{\sim}{c} = \left(\underset{\sim}{a} - \frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\|\underset{\sim}{b}\|^2} \underset{\sim}{b}\right) \circ \left(\underset{\sim}{a} - \frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\|\underset{\sim}{b}\|^2} \underset{\sim}{b}\right) =$$

$$= \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a} - \frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\|\underset{\sim}{b}\|^2} (\underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{a}) - \frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\|\underset{\sim}{b}\|^2} (\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}) + \left(\frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\|\underset{\sim}{b}\|^2}\right)^2 (\underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{b}) =$$

$$= \|\underset{\sim}{a}\|^2 - \frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\|\underset{\sim}{b}\|^2} (\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}) - \frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\|b\|^2} (\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}) + \left(\frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\|\underset{\sim}{b}\|^2}\right)^2 \|\underset{\sim}{b}\|^2 =$$

$$= \|\underset{\sim}{a}\|^2 - \frac{(\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b})^2}{\|\underset{\sim}{b}\|^2}$$

a więc

$$(\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b})^2 \leqslant \|\underset{\sim}{a}\|^2 \|\underset{\sim}{b}\|^2$$

Stąd

$$|\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}| \leqslant \|\underset{\sim}{a}\| \|\underset{\sim}{b}\|$$

W przypadku gdy $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{0}$, łatwo zauważyć, że nierówność jest prawdziwa.

4) dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in E$ mamy

$$\|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}\|^2 = (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) \circ (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{b} =$$
$$= \|\underset{\sim}{a}\|^2 + 2 \, \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} + \|\underset{\sim}{b}\|^2 \leqslant \|\underset{\sim}{a}\|^2 + 2|\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}| + \|\underset{\sim}{b}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\underset{\sim}{a}\|^2 + 2\|\underset{\sim}{a}\| \, \|\underset{\sim}{b}\| + \|\underset{\sim}{b}\|^2 = (\|\underset{\sim}{a}\| + \|\underset{\sim}{b}\|)^2$$

Stąd

$$\|\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}\| \leqslant \|\underset{\sim}{a}\| + \|\underset{\sim}{b}\|$$

5) dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in E$ mamy

$$\|\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}\|^2 = (\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}) \circ (\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{b} =$$

$$= \|\underset{\sim}{a}\|^2 - 2(\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}) + \|\underset{\sim}{b}\|^2 \geqslant \|\underset{\sim}{a}\|^2 - 2|\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}| + \|\underset{\sim}{b}\|^2 \geqslant$$

$$\|a\|^2 - 2\|\underset{\sim}{a}\|\|\underset{\sim}{b}\| + \|\underset{\sim}{b}\|^2 = (\|\underset{\sim}{a}\| - \|\underset{\sim}{b}\|)^2$$

Stąd

$$\big|\|\underset{\sim}{a}\| - \|\underset{\sim}{b}\|\big| \leqslant \|\underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{b}\|$$

<u>Wniosek</u> 3.1. Niech $(E, \circ)$ będzie przestrzenią euklidesową. Wtedy odwzorowanie $\| \ \| : E \longrightarrow R$ określone następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{a} \in E} \|\underset{\sim}{a}\| = \sqrt{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a}} \tag{3.1}$$

jest normą w przestrzeni E.

Z wniosku wynika, że przestrzeń euklidesowa jest przestrzenią unormowaną z normą określoną wzorem (3.1). Normę tę nazywamy normą wyznaczoną przez iloczyn skalarny.

P r z y k ł a d 3.3. W przestrzeni kartezjańskiej R^n norma wyznaczona przez standardowy iloczyn skalarny mą postać

$$\|\underset{\sim}{a}\| = \sqrt{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a}} = \sqrt{[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \circ [\alpha_1, \dots, \alpha_n]} =$$

$$= \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a} \in R^n$$

Nierówność Schwartza przyjmuje tu postać

$$|\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n| \quad \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2}\sqrt{\beta_1^2 + \dots + \beta_n^2} \quad \text{dla } \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in R^n$$

P r z y k ł a d 3.4. W przestrzeni euklidesowej $C^0(\langle a, b\rangle; R)$ norma wyznaczona przez iloczyn skalarny ma postać

$$\|f\| = \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{dla} \quad f \in C^0(\langle a,b\rangle;R)$$

Nierówność Schwarza przyjmuje tu postać

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{dla} \quad f,g \in C^0(\langle a,b\rangle;R)$$

P r z y k ł a d 3.5. W przestrzeni liniowej $C^0(\langle a,b\rangle;R)$ odwzorowanie $\| \ \| : C^0(\langle a,b\rangle;R) \to R$ określone następująco

$$\bigwedge_{f \in C^0(\langle a,b\rangle;R)} \|f\| := \sup_{x \in \langle a,b\rangle} |f(x)|$$

jest normą w tej przestrzeni. Nie istnieje jednak iloczyn skalarny, który wyznacza tę normę.

<u>Definicja</u> 3.3. Niech X będzie dowolnym niepustym zbiorem. Funkcję $\varrho : X \times X \to R$ spełniającą aksjomaty:

1) $\bigwedge_{a,b \in X} a \neq b \Longrightarrow \varrho(a,b) > 0$

2) $\bigwedge_{a,b \in X} \varrho(a,b) = \varrho(b,a)$

3) $\bigwedge_{a,b,c \in X} \varrho(a,b) + \varrho(b,c) \geqslant \varrho(a,c)$

nazywamy metryką (odległością) w zbiorze X. Parę (X,ϱ) nazywamy przestrzenią metryczną.

<u>Twierdzenie</u> 3.2. Niech $(V,\| \ \|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Wtedy odwzorowanie $\varrho : V \times V \to R$ określone wzorem

$$\bigwedge_{a,b \in V} \varrho(a,b) := \|a - b\| \qquad (3.2)$$

jest metryką w zbiorze V.

Dowód. Sprawdzamy aksjomaty definicji metryki:

1) dla dowolnych wektorów $a,b \in V$ takich, że $a \neq b$, mamy

$$\|a - b\| > 0, \quad \text{a stąd} \quad \varrho(a,b) = \|a - b\| > 0$$

2) dla dowolnych wektorów $a,b \in V$ mamy

$$\varrho(a,b) = \|a - b\| = \|(-1)(b - a)\| = |(-1)| \, \|b - a\| = \|b - a\| =$$
$$= \varrho(b,a)$$

3) dla dowolnych wektorów $a,b,c \in V$ mamy

$$\varrho(a,b) + \varrho(b,c) = \|a - b\| + \|b - c\| \geqslant \|(a - b) + (b - c)\| =$$
$$= \|a - c\| = \varrho(a,c)$$

Aksjomaty definicji 3.3 są spełnione, a więc odwzorowanie jest metryką w zbiorze V.

Metrykę ϱ określoną wzorem (3.2) nazywamy metryką wyznaczoną przez normę $\| \ \|$. Zatem przestrzeń unormowana (euklidesowa) jest przestrzenią metryczną.

Definicja 3.4. Niech $(E, \circ)$ będzie przestrzenią euklidesową.

a) wektory niezerowe $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in E$ nazywamy równoległymi o zwrocie zgodnym (przeciwnym), jeśli istnieje liczba rzeczywista $\lambda > 0$ $(\lambda < 0)$ taka, że $\underset{\sim}{a} = \lambda \underset{\sim}{b}$,

b) kątem pomiędzy wektorami niezerowymi $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in E$ nazywamy liczbę rzeczywistą $\sphericalangle(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \in \langle 0,\pi \rangle$ taką, że

$$\cos \sphericalangle(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\|\underset{\sim}{a}\|\|\underset{\sim}{b}\|}$$

Z nierówności Schwarza wynika, że $\cos \sphericalangle(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})$ jest dobrze określony,

c) wektory $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in E$ nazywamy ortogonalnymi, jeśli $\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} = 0$.

Definicja 3.5. Niech $(E, \circ)$ będzie przestrzenią euklidesową.

a) niepusty podzbiór A zbioru E nazywamy ortogonalnym, jeśli każde dwa różne wektory z tego podzbioru są ortogonalne.

b) niepusty podzbiór A zbioru E nazywamy ortonormalnym, jeśli jest ortogonalny i norma (długość) każdego wektora z tego podzbioru jest równa jedności.

c) niepuste podzbiory A i B zbioru E nazywamy ortogonalnymi, jeśli każdy wektor ze zbioru A jest ortogonalny do każdego wektora ze zbioru B.

Bazę przestrzeni euklidesowej, która jest zbiorem ortogonalnym (ortonormalnym) będziemy nazywać bazą ortogonalną (ortonormalną). Można wykazać, że w skończenie wymiarowej przestrzeni euklidesowej istnieje baza ortogonalna (ortonormalna).

P r z y k ł a d 3.6. W przestrzeni kartezjańskiej R^n baza standardowa $\{\underset{\sim}{i}_i\}$, gdzie $\underset{\sim}{i}_1 = [1,0,0,\dots,0]$, $\underset{\sim}{i}_2 = [0,1,0,\dots,0]$, ..., $\underset{\sim}{i}_n = [0,0,0,\dots,1]$ jest jak łatwo sprawdzić, bazą ortonormalną.

Twierdzenie 3.3. Niech E będzie przestrzenią euklidesową, a S podprzestrzenią liniową tej przestrzeni. Wtedy zbiór

$$S^{\perp} := \{\underset{\sim}{a} \in E : \bigwedge_{\underset{\sim}{b} \in S} \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} = 0\}$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni E taką, że przestrzeń E jest sumą prostą podprzestrzeni S i $S^{\perp}$, tzn. $E = S \oplus S^{\perp}$.

Dowód. Wykażemy, że zbiór $S^{\perp}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni E. Sprawdzamy czy spełnione są warunki twierdzenia 1.2:

1) dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in S^{\perp}$ i dowolnego wektora $\underset{\sim}{c} \in S$ mamy

$$(\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b}) \circ \underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{c} = 0 + 0 = 0, \quad \text{stąd} \quad \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{b} \in S^{\perp}$$

2) dla dowolnej liczby $\alpha \in R$, dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in S^{\perp}$ i dowolnego wektora $\underset{\sim}{c} \in S$ mamy

$$(\alpha \underset{\sim}{a}) \circ \underset{\sim}{c} = \alpha(\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{c}) = \alpha 0 = 0, \quad \text{stąd} \quad \alpha \underset{\sim}{a} \in S^{\perp}$$

Warunki twierdzenia są spełnione, a więc zbiór $S^{\perp}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni E.

Wykażemy, że przestrzeń E jest sumą prostą podprzestrzeni S i $S^{\perp}$ w przypadku gdy przestrzeń E jest skończenie wymiarowa. Niech dim E = n, dim S = k, wtedy $k \leqslant n$. W podprzestrzeni S wybieramy bazę ortogonalną $\{\underset{\sim}{e}_1, \ldots, \underset{\sim}{e}_k\}$, którą rozszerzamy do bazy ortogonalnej $\{\underset{\sim}{e}_1, \ldots, \underset{\sim}{e}_k, \underset{\sim}{e}_{k+1}, \ldots, \underset{\sim}{e}_n\}$ w przestrzeni E. Łatwo wykazać, że podprzestrzeń $S^{\perp}$ jest generowana przez zbiór wektorów $\{\underset{\sim}{e}_{k+1}, \ldots, \underset{\sim}{e}_n\}$, a to oznacza, że $E = S \oplus S^{\perp}$.

Podprzestrzeń $S^{\perp}$ określoną w powyższym twierdzeniu nazywamy uzupełnieniem ortogonalnym podprzestrzeni S.

Z dowodu powyższego twierdzenia wynika ponadto:

<u>Wniosek</u> 3.2. Jeśli przestrzeń euklidesowa E jest skończenie wymiarowa i S jest podprzestrzenią tej przestrzeni, to mamy wzór

$$\dim E = \dim S + \dim S^{\perp}$$

P r z y k ł a d 3.7. Niech R^4 będzie przestrzenią kartezjańską, a S podprzestrzenią liniową generowaną przez zbior $A = \{[1,0,1,-1],\ [2,3,-1,2]\}$. Znajdziemy uzupełnienie ortogonalne $S^{\perp}$ tej podprzestrzeni.

Ponieważ podprzestrzeń S jest generowana przez zbiór A, to dowolny wektor $\underset{\sim}{a} \in S$ ma postać

$$\underset{\sim}{a} = t[1,0,1,-1] + s[2,3,-1,2] \quad \text{dla} \quad t,s \in R$$

Zatem

$$S = \{[t + 2s,\ 3s,\ t - s,\ -t + 2s] \in R^4 \quad \text{dla} \quad t,s \in R\}$$

Uzupełnienie ortogonalne $S^{\perp}$ podprzestrzeni S jest zbiorem wektorów $\underset{\sim}{b} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] \in S^{\perp}$ spełniających warunek

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] \circ [t + 2s,\ 3s,\ t - 3,\ -t + 2s] = 0 \text{ dla } t,s \in R$$

Stąd

$$t[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] \circ [1,0,1,-1] + s[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] \circ [2,3,-1,2] = 0$$

Ponieważ równanie musi być spełnione dla dowolnych $t,s \in R$, a więc jest równoważne układowi równań

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] \circ [1,0,1,-1] = 0$$

$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] \circ [2,3,-1,2] = 0$$

a stąd otrzymamy

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 - \beta_4 = 0 \\ 2\beta_1 + 3\beta_2 - \beta_3 + 2\beta_4 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu jest zbiór liczb

$$\beta_1 = t, \quad \beta_2 = -\frac{1}{3}s - \frac{4}{3}t, \quad \beta_3 = s, \quad \beta_4 = t + s \quad \text{dla } t,s \in R$$

Zatem

$$S^{\perp} = \left\{ \left[t, -\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}s, s, t+s\right] \in R^4 : t,s \in R \right\}$$

Ponieważ

$$\left[t, -\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}s, s, t+s\right] = t\left[1, -\frac{4}{3}, 0, 1\right] + s\left[0, -\frac{1}{3}, 1, 1\right]$$

a więc zbiór $\left\{\left[1, -\frac{4}{3}, 0, 1\right], \left[0, -\frac{1}{3}, 1, 1\right]\right\}$ generuje podprzestrzeń $S^{\perp}$ i stanowi bazę tej podprzestrzeni.

3.2. Kobaza przestrzeni euklidesowej. Reprezentacja wektora Zmiana bazy i wzory transformacyjne

Definicja 3.6. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ będzie bazą n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Zbiór $\{\underset{\sim}{e}^j\}$ wektorów przestrzeni E^n nazywamy kobazą przestrzeni euklidesowej E^n względem bazy $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, jeśli spełnia warunki:

$$\bigwedge_{i,j=1,2,\dots,n} \underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{e}^j = \delta_i^j$$

gdzie

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

jest symbolem Kroneckera.