## 8.2. Definicja grupy symetrii wewnętrznej tensora. Tensory symetryczne i antysymetryczne

Definicja 8.4. Grupą symetrii wewnętrznej tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ nazywamy zbiór $\sum_{\underset{\sim}{A}} := \{\sigma \in \sum_p : \sigma * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}\}$, gdzie $*$ jest działaniem permutacji tensorów.

Wykażemy, że zbiór $\sum_{\underset{\sim}{A}}$ z działaniem składania permutacji jest grupą. Wystarczy wykazać, że jest to podgrupa grupy permutacji zbioru p-elementowego $\sum_p$. Ponieważ dla dowolnych permutacji $\sigma_1, \sigma_2 \in \sum_{\underset{\sim}{A}}$ mamy

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2) * \underset{\sim}{A} = \sigma_1 * (\sigma_2 * \underset{\sim}{A}) = \sigma_1 * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}, \quad \text{stąd} \quad \sigma_1 \circ \sigma_2 \in \textstyle\sum_{\underset{\sim}{A}}$$

i dla dowolnej permutacji $\sigma \in \sum_{\underset{\sim}{A}}$ mamy

$$\sigma^{-1} * \underset{\sim}{A} = \sigma^{-1} * (\sigma * \underset{\sim}{A}) = (\sigma^{-1} \circ \sigma) * \underset{\sim}{A} = id * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}, \quad \text{stąd} \quad \sigma^{-1} \in \textstyle\sum_{\underset{\sim}{A}}$$

Zatem zbiór $\sum_{\underset{\sim}{A}}$ jest podgrupą grupy $\sum_p$.

Definicja 8.5. Grupą symetrii wewnętrznej tensorów $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_p$ nazywamy zbiór $\sum_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}} := \{\sigma \in \sum_p : \sigma * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A} \wedge \sigma * \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B}\}$.

Łatwo zauważyć, że $\sum_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}} = \sum_{\underset{\sim}{A}} \cap \sum_{\underset{\sim}{B}}$. Grupy symetrii wewnętrznej tensorów są niepuste, ponieważ należy do nich permutacja tożsamościowa.

Definicja 8.6. Tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ nazywamy

a) symetrycznym, jeśli dla każdej permutacji $\sigma \in \sum_p$ mamy $\sigma * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$, co oznacza, że $\sum_{\underset{\sim}{A}} = \sum_p$;

b) antysymetrycznym, jeśli dla każdej permutacji $\sigma \in \sum_p$ mamy $\sigma * \underset{\sim}{A} = \operatorname{sgn}\sigma\, \underset{\sim}{A}$, gdzie $\operatorname{sgn}\sigma$ jest znakiem permutacji $\sigma$.

Twierdzenie 8.2. Niech $\mathcal{T}_p$ będzie przestrzenią tensorów o walencji p, $\hat{\sum}_p$ - podgrupą grupy permutacji $\sum_p$. Wtedy zbiór $\mathcal{T}_{p,\hat{\Sigma}_p} := \{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p : \sum_{\underset{\sim}{A}} = \hat{\sum}_p\}$ tensorów o walencji p i grupie symetrii wewnętrznej $\hat{\Sigma}_p$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$.

Dowód. Niech permutacja $\sigma \in \hat{\Sigma}_p$. Wtedy dla dowolnych tensorów $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_{p,\hat{\Sigma}_p}$ i dowolnej liczby $\alpha \in R$ mamy

1) $\sigma * (\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}) = \sigma * \underset{\sim}{A} + \sigma * \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}$, stąd $\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_{p,\hat{\Sigma}_p}$

2) $\sigma * (\alpha \underset{\sim}{A}) = \alpha(\sigma * \underset{\sim}{A}) = \alpha \underset{\sim}{A}$, stąd $\alpha \underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_{p,\hat{\Sigma}_p}$

Zatem z twierdzenia 1.2 wnioskujemy, że zbiór $\mathcal{T}_{p,\hat{\Sigma}_p}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$.

Wniosek 8.1. W przestrzeni tensorowej zbiory tensorów symetrycznych i antysymetrycznych są podprzestrzeniami liniowymi tej przestrzeni.

Uwaga 8.5. Jeśli mamy przestrzeń tensorową $\mathcal{T}_p$ i daną podgrupę $\hat{\Sigma}$ grupy permutacji $\Sigma_p$, to problem znalezienia podprzestrzeni $\mathcal{T}_{p,\hat{\Sigma}}$ sprowadza się do znalezienia wymiaru i skonstruowania bazy tej przestrzeni.

P r z y k ł a d 8.12. Niech $\mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$, a $\Sigma_2 = \{(1,2), (2,1)\}$ będzie grupą permutacji. Znajdziemy podprzestrzenie tensorów symetrycznych $\mathcal{T}_2^s$ i antysymetrycznych $\mathcal{T}_2^a$.

Wystarczy znaleźć bazy w tych podprzestrzeniach. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ będzie bazą przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$. Wtedy zbiór tensorów symetrycznych

$$\{\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3, \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2\}$$

jest bazą podprzestrzeni $\mathcal{T}_2^s$, a zbiór tensorów antysymetrycznych

$$\{\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 - \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 - \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2\}$$

jest bazą podprzestrzeni tensorów antysymetrycznych $\mathcal{T}_2^a$. Stąd wynika, że $\dim \mathcal{T}_2^s = 6$, $\dim \mathcal{T}_2^a = 3$.

P r z y k ł a d 8.13. Niech $\mathcal{T}_3 = E^3 \otimes E^3 \otimes E^3$, a $\sum_3 = \{(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1)\}$ będzie grupą permutacji. Znajdziemy podprzestrzenie tensorów symetrycznych $\mathcal{T}_3^s$ i antysymetrycznych $\mathcal{T}_3^a$.

Wystarczy znaleźć bazy w tych podprzestrzeniach. Niech $\{e_i \otimes e_j \otimes e_k\}$ będzie bazą przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_3$. Wtedy tensory symetryczne

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad \text{dla } i,j=1,2,3,\ i \neq j$$

$$\mathbf{A}_{123} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \\ + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$$

stanowią bazę podprzestrzeni tensorów symetrycznych $\mathcal{T}_2^s$, a tensor antysymetryczny

$$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \\ + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$$

stanowi bazę przestrzeni tensorów antysymetrycznych $\mathcal{T}_3^a$. Stąd wynika, że $\dim \mathcal{T}_3^s = 10$, $\dim \mathcal{T}_3^a = 1$.

P r z y k ł a d 8.14. Niech $\mathcal{T}_4 = E^3 \otimes E^3 \otimes E^3 \otimes E^3$, a $\hat{\sum}$ będzie podgrupą grupy permutacji $\sum_4$ generowaną przez zbiór permutacji $\{\sigma_1 = (1,2,3,4),\ \sigma_2 = (2,1,3,4),\ \sigma_3 = (1,2,4,3),\ \sigma_4 = (3,4,1,2)\}$. Znajdziemy podprzestrzeń tensorową $\mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}}$.

Wystarczy znaleźć bazę tej podprzestrzeni. Niech $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l\}$ będzie bazą przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_4$. Wtedy tensory

$$\mathbf{A}_{iiii} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \qquad \text{dla } i = 1,2,3$$

$$\mathbf{A}_{iijj} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \qquad \text{dla } i,j = 1,2,3,\ i < j$$

$$\mathbf{A}_{ijij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i + \\ + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \qquad \text{dla } i,j = 1,2,3,\ i < j$$

$$\underset{\sim}{A}_{iiij} = \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j + \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \qquad \text{dla } i,j = 1,2,3,\ i \neq j$$

$$\underset{\sim}{A}_{iijk} = \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_k + \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_j + \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \qquad \text{dla } i,j,k = 1,2,3,\ i \neq j < k$$

$$\underset{\sim}{A}_{ijki} = \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_k + \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j + \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i + \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j + \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i$$

$$\text{dla } i,j,k = 1,2,3,\ i \neq j < k$$

stanowią bazę przestrzeni $\mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}}$. Stąd wynika, że $\dim \mathcal{T}_{4,\hat{\Sigma}} = 21$.

## 8.3. Definicja grupy symetrii funkcji tensorowej Funkcje izotropowe i hemitropowe

Definicja 8.7. Niech $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$ będą przestrzeniami tensorowymi, a $f : D \rightarrow \mathcal{T}_p$ będzie funkcją tensorową na zbiorze $D \subset \mathcal{T}_p$. Grupą symetrii funkcji tensorowej f nazywamy zbiór

$$\vartheta_f := \{\underset{\sim}{Q} \in \vartheta : \underset{\sim}{Q} * f(\underset{\sim}{A}) = f(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{A} \in D\}$$

gdzie $*$ jest działaniem obrotu tensorów.

Łatwo wykazać, że zbiór $\vartheta_f$ jest podgrupą grupy tensorów ortogonalnych $\vartheta$. Grupa symetrii funkcji tensorowej jest zbiorem niepustym, ponieważ zawiera tensor jednostkowy.

Definicja 8.8. Funkcję tensorową $f : D \rightarrow \mathcal{T}_q$ na zbiorze $D \subset \mathcal{T}_p$ nazywamy

a) izotropową wtedy i tylko wtedy, gdy $\vartheta_f = \vartheta$;

b) hemitropową wtedy i tylko wtedy, gdy $\vartheta_f = \mathcal{R}$;

c) anizotropową wtedy i tylko wtedy, gdy $\vartheta_f \neq \mathcal{R}$ i $\vartheta_f \neq \vartheta$.