$$\operatorname{tr} \underset{\sim}{A} = A^i{}_\alpha g^\alpha_i = A^1{}_1 q^1_1 + A^1{}_2 g^2_1 + A^1{}_3 g^3_1 + A^2{}_1 g^1_2 + A^2{}_2 g^2_2 + A^2{}_3 g^3_2 +$$

$$+ A^3{}_1 g^1_3 + A^3{}_2 g^2_3 + A^3{}_3 g^3_3 =$$

$$= 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + (-1)(1) + 0\cdot(-1) + 1(-1) + (-2)\cdot 1 +$$

$$+ 0\cdot(-1) + 3\cdot(-3) + 2\cdot 0 = -3$$

$$\left[{}^{k}A^i{}_\alpha\right] = \left(\tfrac{1}{3} \operatorname{tr} \underset{\sim}{A}\right)\left[g^i{}_\alpha\right] = \tfrac{1}{3}(-3)\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[{}^{d}A^i{}_\alpha\right] = \left[A^i{}_\alpha\right] - \left(\tfrac{1}{3} \operatorname{tr} \underset{\sim}{A}\right)\left[g^i{}_\alpha\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tensor z przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$ najwygodniej rozkładać na część kulistą i dewiatorową w bazie typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ lub $\{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$.

## 7.3. Wyznacznik tensora. Tensor wzajemny i odwrotny Wartości własne i wektory własne tensora

Definicja 7.5. Wyznacznikiem tensorów przestrzeni $\mathcal{T}_2$ nazywamy funkcję det : $\mathcal{T}_2 \longrightarrow R$ określoną następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2} \det \underset{\sim}{A} := \det\left[A^i{}_j\right] = \det\left[A_\alpha{}^\beta\right]$$

gdzie $\left[A^i{}_j\right]$ i $\left[A_\alpha{}^\beta\right]$ są reprezentacjami tensora $\underset{\sim}{A}$ odpowiednio w bazach typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ i $\{\underset{\sim}{d}^\alpha \otimes \underset{\sim}{d}_\beta\}$. Liczbę det $\underset{\sim}{A}$ nazywamy wyznacznikiem tensora $\underset{\sim}{A}$.

Wykażemy, że definicja wyznacznika nie zależy od wyboru bazy danego typu. Istotnie, korzystając ze wzorów transformacyjnych i własności wyznaczników mamy

$$\det[A_\alpha{}^\beta] = \det[g_{\alpha i}][A^i{}_j][g^{j\beta}] = \det[g_{\alpha i}]\det[A^i{}_j]\det[g^{j\beta}]$$

a ponieważ macierz $[g_{\alpha i}]$ jest odwrotna do macierzy $[g^{j\beta}]$, to

$$\det[g_{\alpha i}]\det[g^{j\beta}] = 1, \quad \text{a stąd} \quad \det[A_\alpha{}^\beta] = \det[A^i{}_j]$$

Korzystając z własności wyznaczników macierzy można wykazać, że dla dowolnych tensorów $A, B \in \mathcal{T}_2$ mamy

$$\det \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} = \det \underset{\sim}{A} \det \underset{\sim}{B}$$

<u>Definicja</u> 7.6. Tensorem wzajemnym do tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy tensor $\underset{\sim}{\mathring{A}} \in \mathcal{T}_2$ taki, że

$$\underset{\sim}{\mathring{A}}\, \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}\, \underset{\sim}{\mathring{A}} = (\det \underset{\sim}{A})\underset{\sim}{1}$$

Dowodzi się, że do każdego tensora istnieje tensor wzajemny.

Z powyższej definicji wynika, że dla tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ i $\det \underset{\sim}{A} \neq 0$ istnieje tensor odwrotny $\underset{\sim}{\overset{-1}{A}}$, który obliczamy ze wzoru

$$\underset{\sim}{\overset{-1}{A}} = \frac{\underset{\sim}{\mathring{A}}}{\det \underset{\sim}{A}}$$

gdzie $\underset{\sim}{\mathring{A}}$ jest tensorem wzajemnym do tensora $\underset{\sim}{A}$.

<u>Twierdzenie</u> 7.9. Jeśli macierz $[A^i{}_j]$ jest reprezentacją tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ w bazie typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$, to macierz dołączona do macierzy $[A^i{}_j]$ jest reprezentacją tensora wzajemnego $\underset{\sim}{\mathring{A}}$ do tensora $\underset{\sim}{A}$ w tej bazie.

Dowód. Przedstawmy tensory $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{\mathring{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$, więc

$$\underset{\sim}{A} = A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j \quad \text{i} \quad \underset{\sim}{\mathring{A}} = \mathring{A}^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j$$

gdzie macierze $[A^i{}_j]$ i $[\mathring{A}^i{}_j]$ są reprezentacjami tensorów $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{\mathring{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$.

Z definicji tensora wzajemnego wynika, że

$$\left(\mathring{A}^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\right)\left(A^k{}_l \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}^l\right) = \left(A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\right)\left(\mathring{A}^k{}_l \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}^l\right) =$$

$$= (\det \underset{\sim}{A})\,\delta^i{}_l \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^l$$

a stąd otrzymamy

$$\mathring{A}^i{}_j A^j{}_l \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^l = A^i{}_j \mathring{A}^j{}_l \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^l = (\det \underset{\sim}{A})\,\delta^i{}_l \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^l$$

Powyższe równanie wektorowe jest równoważne układowi równań skalarnych

$$\mathring{A}^i{}_j A^j{}_l = A^i{}_j \mathring{A}^j{}_l = (\det \underset{\sim}{A})\,\delta^i{}_l \quad \text{dla} \quad i,l = 1,\dots,n$$

który można zapisać w postaci macierzowej

$$[\mathring{A}^i{}_j][A^j{}_l] = [A^i{}_j][\mathring{A}^j{}_l] = \left(\det [A^r{}_s]\right)[\delta^i{}_l]$$

Z teorii macierzy wynika, że macierz $[A^i{}_j]^d$ dołączona do macierzy $[A^i{}_j]$ spełnia to równanie. Zatem $[\mathring{A}^i{}_j] = [A^i{}_j]^d$.

Należy zaznaczyć, że powyższe twierdzenie jest prawdziwe również w przypadku, gdy przyjmiemy bazę typu $\{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ lub ortonormalną $\{\underset{\sim}{i}_i \otimes \underset{\sim}{i}_j\}$.

P r z y k ł a d 7.3. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

oraz dana jest macierz przejścia dodatnio określana

$$[g_{ij}] = [\underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{e}_j] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \text{a stąd } [g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) znajdziemy reprezentację tensora $\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$ odwrotnego do tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$. Ze wzorów transformacyjnych wynika, że $A^i{}_j = A^{ik}g_{kj}$ dla $i,j = 1,2,3$, zatem

$$[A^i{}_j] = [A^{ik}][g_{kj}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 8 \\ 4 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

Ponieważ

$$\det \underset{\sim}{A} = \det[A^i{}_j] = \det \begin{bmatrix} -3 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 8 \\ 4 & -2 & 11 \end{bmatrix} = -1$$

a więc istnieje tensor odwrotny do tensora $\underset{\sim}{A}$.

Korzystając z twierdzenia 7.9 znajdziemy reprezentację $[\overset{\circ}{A}{}^i{}_j]$ tensora $\overset{\circ}{\underset{\sim}{A}}$ wzajemnego do tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$, więc

$$[\overset{\circ}{A}{}^i{}_j] = [A^i{}_j]^d = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -7 \\ 3 & -2 & 8 \\ 4 & -2 & 11 \end{bmatrix}^d = \begin{bmatrix} -6 & -41 & 26 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & 14 & -9 \end{bmatrix}.$$

Stąd łatwo już znaleźć reprezentację $[\overset{-1}{A}{}^i{}_j]$ tensora $\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$ odwrotnego do tensora $\underset{\sim}{A}$, zatem

$$[\overset{-1}{A}{}^i{}_j] = \frac{1}{\det \underset{\sim}{A}}[\overset{\circ}{A}{}^i{}_j] = \frac{1}{(-1)} \begin{bmatrix} -6 & -41 & 26 \\ -1 & -5 & 3 \\ 2 & 14 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 41 & -26 \\ 1 & 5 & -3 \\ -2 & -14 & 9 \end{bmatrix}$$

b) znajdziemy reprezentację tensora $\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$ odwrotnego do tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$. Przedstawmy tensory $\underset{\sim}{A}$ i $\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$:

$$\underset{\sim}{A} = A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \qquad \text{i} \qquad \overset{-1}{\underset{\sim}{A}} = \overset{-1}{A}{}^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$$

gdzie $A^{ij}$ i $\overset{-1}{A}{}^{ij}$ dla $i,j = 1,2,3$ są współrzędnymi tensorów $\underset{\sim}{A}$ i $\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$.

Z definicji tensora odwrotnego wynika, że

$$\left(\overset{-1}{A}{}^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\right)\left(A^{kl}\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_l\right) = g^{il}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_l$$

a stąd otrzymamy

$$\overset{-1}{A}{}^{ij}A^{kl}g_{jk}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_l = g^{il}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_l$$

Powyższe równanie tensorowe jest równoważne układowi równań skalarnych

$$\overset{-1}{A}{}^{ij}A^{kl}g_{jk} = g^{il} \quad \text{dla} \quad i,l = 1,2,3$$

który można zapisać w postaci macierzowej

$$\left[\overset{-1}{A}{}^{ij}\right]\left[g_{jk}\right]\left[A^{kl}\right] = \left[g^{il}\right]$$

a stąd otrzymamy wzór na reprezentację $\left[\overset{-1}{A}{}^{ij}\right]$ tensora $\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$, więc

$$\left[\overset{-1}{A}{}^{ij}\right] = \left[g^{il}\right]\left[A^{kl}\right]^{-1}\left[g_{jk}\right]^{-1}$$

Zatem

$$\left[\overset{-1}{A}{}^{ij}\right] = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 129 & 47 & -38 \\ 17 & 6 & -5 \\ -44 & -16 & 13 \end{bmatrix}$$

Najwygodniej poszukiwać tensora odwrotnego (wzajemnego) do danego tensora w bazach typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ lub $\{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ lub ortonormalnej $\{\underset{\sim}{i}_i \otimes \underset{\sim}{i}_j\}$.

Można wykazać, że w przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$ zbiory tensorów

1) $\mathcal{N} := \{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 : \det \underset{\sim}{A} \neq 0\}$ nieosobliwych
2) $\mathcal{U} := \{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 : \det \underset{\sim}{A} = 1\}$ unimodularnych
3) $\vartheta := \{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 : \underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{1}\}$ ortogonalnych

z działaniem prostego nasunięcia są grupami.

Łatwo zauważyć, że zachodzą inkluzje $\vartheta\subset\mathcal{U}\subset\mathcal{N}\subset\mathcal{T}_2$. Zbiór $\mathcal{T}_2$ z działaniem prostego nasunięcia nie tworzy grupy, ponieważ nie do każdego tensora istnieje tensor odwrotny.

Definicja 7.7. n-tą potęgą tensora $\underset{\sim}{A}\in\mathcal{T}_2$ nazywamy tensor $\overset{n}{\underset{\sim}{A}}\in\mathcal{T}_2$, który określamy indukcyjnie:

$$\overset{n}{\underset{\sim}{A}} := \begin{cases} \underset{\sim}{1} & \text{dla } n = 0 \\ \overset{n-1}{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{A} & \text{dla } n = 1,2\ldots \end{cases}$$

(-n)-tą potęgą tensora nieosobliwego $\underset{\sim}{A}\in\mathcal{N}$ nazywamy tensor $\overset{-n}{\underset{\sim}{A}}\in\mathcal{N}$ określony następująco:

$$\overset{-n}{\underset{\sim}{A}} := \left(\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}\right)^n$$

Twierdzenie 7.10. Jeśli macierz $[A^i{}_j]$ jest reprezentacją tensora $A\in\mathcal{T}_2$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\otimes\underset{\sim}{e}^j\}$ przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$, to macierz $[A^i{}_j]^n$ jest reprezentacją tensora $\overset{n}{\underset{\sim}{A}}$ w tej bazie, tzn. $[\overset{n}{A}{}^i{}_j] = [A^i{}_j]^n$.

Łatwy dowód pomijamy. Twierdzenie to jest prawdziwe w przypadku, gdy przyjmiemy bazę typu $\{\underset{\sim}{e}^i\otimes\underset{\sim}{e}_j\}$ lub ortonormalną $\{\underset{\sim}{i}_i\otimes\underset{\sim}{i}_j\}$.

Definicja 7.8. Wielomianem tensorowym n-tego stopnia w przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$ nazywamy funkcję $w : \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}_2$ określoną następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A}\in\mathcal{T}_2} w(\underset{\sim}{A}) = \alpha_n\overset{n}{\underset{\sim}{A}} + \alpha_{n-1}\overset{n-1}{\underset{\sim}{A}} + \ldots + \alpha_1\underset{\sim}{A} + \alpha_0\underset{\sim}{1}$$

gdzie $\alpha_i\in R$ dla $i = 0,1,\ldots,n$ i $\alpha_n \neq 0$.

Definicja 7.9. Wielomianem charakterystycznym tensora $\underset{\sim}{A}\in\mathcal{T}_2$ nazywamy funkcję $\varphi : R \to R$ określoną następująco:

$$\bigwedge_{\lambda \in R} \varphi(\lambda) := \det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{1})$$

W przypadku gdy $\mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$, wielomian charakterystyczny tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ przyjmuje postać

$$\varphi(\lambda) = -\lambda^3 + I_{\underset{\sim}{A}} \lambda^2 + II_{\underset{\sim}{A}} \lambda + III_{\underset{\sim}{A}} \quad \text{dla} \quad \lambda \in R$$

gdzie liczby rzeczywiste:

$$I_{\underset{\sim}{A}} := \operatorname{tr} \underset{\sim}{A}$$

$$II_{\underset{\sim}{A}} := \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} \overset{2}{\underset{\sim}{A}} - (\operatorname{tr} \underset{\sim}{A})^2\right)$$

$$III_{\underset{\sim}{A}} := \det \underset{\sim}{A}$$

nazywamy odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim niezmiennikiem tensora $\underset{\sim}{A}$.

Analogicznie jak dla macierzy dowodzimy, że prawdziwe jest:

<u>Twierdzenie</u> 7.11 (Cayleya-Hamiltona). Niech $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$. Wtedy każdy tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ spełnia równanie

$$\varphi(\underset{\sim}{A}) = 0$$

gdzie funkcja $\varphi(\lambda) = \det(\underset{\sim}{A} - \lambda \underset{\sim}{1})$ dla $\lambda \in R$ jest wielomianem charakterystycznym tensora $\underset{\sim}{A}$.

Łatwo zauważyć, że w przypadku gdy $\mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$, dowolny tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ spełnia równanie

$$\overset{3}{\underset{\sim}{A}} = I_{\underset{\sim}{A}} \overset{2}{\underset{\sim}{A}} + II_{\underset{\sim}{A}} \underset{\sim}{A} + III_{\underset{\sim}{A}} \underset{\sim}{1}$$

gdzie liczby rzeczywiste $I_{\underset{\sim}{A}}$, $II_{\underset{\sim}{A}}$ i $III_{\underset{\sim}{A}}$ są niezmiennikami tensora $\underset{\sim}{A}$. Zatem w tym przypadku powyższe twierdzenie umożliwia sprowadzenie dowolnego wielomianu tensorowego do tensorowego trójmianu kwadratowego.

W oparciu o twierdzenie Cramera można wykazać, że dla tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$ i wektora $\underset{\sim}{b} \in E^n$ równanie $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $\underset{\sim}{x} \in E^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \underset{\sim}{A} \neq 0$.

Stąd natomiast wynika, że równanie $\underset{\approx}{A}\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ ma niezerowe rozwiązanie $\underset{\sim}{x} \in E^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{0}$.

P r z y k ł a d  7.4. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$[A^i{}_j] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

a) znajdziemy wielomian charakterystyczny tensora $\underset{\sim}{A}$. Ponieważ mamy:

$$I_{\underset{\sim}{A}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{A} = \operatorname{tr}(A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j) = A^i{}_j \delta^j{}_i = A^i{}_i = A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3 =$$
$$= 1 + 2 + 3 = 6$$

$$II_{\underset{\sim}{A}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} \overset{2}{\underset{\sim}{A}} - (\operatorname{tr} \underset{\sim}{A})^2\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\left(\left(A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\right)\left(A^k{}_l \underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}^l\right)\right) -\right.$$
$$\left. - \left(\operatorname{tr}\left(A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\right)\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\left(A^i{}_j A^k{}_l \delta^j{}_k \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^l\right) -\right.$$
$$\left. - \left(A^i{}_j \delta^i{}_j\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(A^i{}_j A^k{}_l \delta^j{}_k \delta^l{}_i - \left(A^i{}_i\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(A^i{}_j A^j{}_i - \left(A^i{}_i\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(A^1{}_1 A^1{}_1 + A^1{}_2 A^2{}_1 +\right.$$
$$+ A^1{}_3 A^3{}_1 + A^2{}_1 A^1{}_2 + A^2{}_2 A^2{}_2 + A^2{}_3 A^3{}_2 + A^3{}_1 A^1{}_3 +$$
$$\left. + A^3{}_2 A^2{}_3 + A^3{}_3 A^3{}_3 - \left(A^1{}_1 + A^2{}_2 + A^3{}_3\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 +\right.$$
$$\left. + (-2) \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - (1 + 2 + 3)^2\right) = -9$$

$$III_{\underset{\sim}{A}} = \det \underset{\sim}{A} = \det\left(A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\right) = \det\left[A^i{}_j\right] = 1 \cdot 2 \cdot 3 +$$
$$+ 0 \cdot 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 0 = 2$$

to

$$\varphi(\lambda) = -\lambda^3 + I_{\underset{\sim}{A}}\lambda^2 + II_{\underset{\sim}{A}}\lambda + III_{\underset{\sim}{A}} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 2 \text{ dla } \lambda \in R$$

b) sprawdzimy twierdzenie Cayleya-Hamiltona dla tensora $\underset{\sim}{A}$. Zgodnie z tym twierdzeniem musimy wykazać, że spełnione jest równanie

$$\underset{\sim}{A}^3 = 6\underset{\sim}{A}^2 - 9\underset{\sim}{A} + 2\underset{\sim}{1}$$

Jeśli tensor $\underset{\sim}{A}$ przedstawimy w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$, to z twierdzenia 7.10 wynika, że powyższe równanie jest równoważne równaniu macierzowemu:

$$[A^i{}_j]^3 = 6[A^i{}_j]^2 - 9[A^i{}_j] + 2[\delta^i{}_j]$$

Ponieważ mamy

$$[A^i{}_j]^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \\ -8 & 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & -15 \\ 6 & 8 & 9 \\ -30 & 0 & 41 \end{bmatrix}$$

$$6[A^i{}_j]^2 - 9[A^i{}_j] + 2[\delta^i{}_j] =$$

$$= 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= 6\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 4 & 4 & 3 \\ -8 & 0 & 11 \end{bmatrix} - 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & -15 \\ 6 & 8 & 9 \\ -30 & 0 & 41 \end{bmatrix}$$

a więc równanie jest spełnione.

## 7.4. Rozkład widmowy tensora

Niech $\mathcal{T}_2$ będzie przestrzenią tensorową o walencji dwa nad przestrzenią euklidesową $\mathcal{T}_1 = E^n$. Jak wiadomo, dowolny tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ można traktować jako przekształcenie liniowe $\underset{\sim}{A}: \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$ przyporządkowujące dowolnemu wektorowi $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$ wektor $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$.