7.6. Zadania

Zadanie 7.1. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

przy czym dana jest zależność między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^j\}$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = 2\underset{\sim}{e}^1 - \underset{\sim}{e}^2 + \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{e}_2 = -\underset{\sim}{e}^1 + 2\underset{\sim}{e}^2 \\ \underset{\sim}{e}_3 = \underset{\sim}{e}^1 + \underset{\sim}{e}^3. \end{cases}$$

a) znaleźć rozkład tensora $\underset{\sim}{A}$ na część symetryczną i antysymetryczną w bazach $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ i $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$,

b) znaleźć rozkład tensora $\underset{\sim}{A}$ na kulistą część i dewiatorową w bazach $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ i $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$,

c) znaleźć tensor odwrotny do tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazach $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ i $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$,

d) znaleźć wielomian charakterystyczny tensora $\underset{\sim}{A}$ i sprawdzić twierdzenie Cayleya-Hamiltona.

Zadanie 7.2. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$[A^{i\alpha}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

przy czym dana jest zależność między bazami $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ o postaci

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}_1 = \underset{\sim}{e}^1 + \underset{\sim}{e}^2 - \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{d}_2 = \underset{\sim}{e}^1 + \underset{\sim}{e}^2 \\ \underset{\sim}{d}_3 = \underset{\sim}{e}^1 \end{cases}$$

Znaleźć rozkład widmowy tensora $\underset{\sim}{A}$, jeśli istnieje.

Zadanie 7.3. Niech tensor symetryczny $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}^j\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

przy czym dana jest macierz dodatnio określona

$$[g^{ij}] = [\underset{\sim}{e}^i \underset{\sim}{e}^j] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć rozkład widmowy tensora symetrycznego $\underset{\sim}{A}$.

Zadanie 7.4. Niech $\mathcal{T}_2$ będzie przestrzenią tensorową nad przestrzenią kartezjańską R^3.

a) znaleźć tensor ortogonalny $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ obracający wektory przestrzeni R^3 o kąt $\frac{\pi}{3}$ wokół osi wyznaczonej przez wektor $[2,1,2] \in R^3$,

b) znaleźć tensor ortogonalny $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ obracający lustrzane wektory przestrzeni R^3 o kąt $\frac{\pi}{3}$ wokół osi wyznaczonej przez wektor $[2,1,2] \in R^3$.

Zadanie 7.5. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie ortonormalnej } \{\underset{\sim}{i}_i \otimes \underset{\sim}{i}_j\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

gdzie $\{\underset{\sim}{i}_i\}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej E^3. Znaleźć rozkład biegunowy tensora $\underset{\sim}{A}$.

8. SYMETRIE TENSORÓW I FUNKCJI TENSOROWYCH

8.1. Definicja grupy symetrii zewnętrznej tensora Tensory izotropowe i hemitropowe

Definicja 8.1. **Grupą symetrii zewnętrznej tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ nazywamy zbiór $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} := \{\underset{\sim}{Q} \in \vartheta : \underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}\}$, gdzie $*$ jest działaniem obrotu tensorów.**