Znajdziemy formę dwuliniową $l : E^2 \times E^3 \longrightarrow R$ wyznaczoną przez tensor $\underset{\sim}{l}$.

Z twierdzenia 5.3 wynika, że dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a} \in E^n$ i $\underset{\sim}{b} \in E^m$ mamy:

$$l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{l} \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) = (l^i{}_\alpha \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha) \circ (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) = l^i{}_\alpha (\underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{a})(\underset{\sim}{d}^\alpha \circ \underset{\sim}{b}) =$$

$$= l^i{}_\alpha a_i b^\alpha = l^1{}_1 a_1 b^1 + l^1{}_2 a_1 b^2 + l^1{}_3 a_1 b^3 + l^2{}_1 a_2 b^1 +$$

$$+ l^2{}_2 a_2 b^2 + l^2{}_3 a_2 b^3 = 2a_1 b^1 - a_1 b^2 + a_1 b^3 + a_2 b^2 + 2a_2 b^3$$

gdzie a_i dla $i = 1,2$ są współrzędnymi wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, a b^α dla $\alpha = 1,2,3$ współrzędnymi wektora $\underset{\sim}{b}$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$.
Zatem

$$l(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = 2a_1 b^1 - a_1 b^2 + a_1 b^3 + a_2 b^2 + 2a_2 b^3 \text{ dla } \underset{\sim}{a} \in E^n \text{ i } \underset{\sim}{b} \in E^m$$

5.3. Zadania

Zadanie 5.1. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in E^2 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$[A^i{}_\alpha] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie} \quad \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$$

Znaleźć reprezentację tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazach $\{\underset{\sim}{l}^A \otimes \underset{\sim}{h}^\Omega\}$, $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{h}^\Omega\}$, $\{\underset{\sim}{l}^A \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$ przestrzeni $E^2 \otimes E^3$, jeśli dane są zależności

$$\begin{cases} \underset{\sim}{l}^1 = \underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{l}^2 = \underset{\sim}{e}_1 - 2\underset{\sim}{e}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = 3\underset{\sim}{h}^1 + 3\underset{\sim}{h}^2 + 2\underset{\sim}{h}^3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = -\underset{\sim}{h}^1 - \underset{\sim}{h}^2 - \underset{\sim}{h}^3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = 4\underset{\sim}{h}^1 + 3\underset{\sim}{h}^2 + \underset{\sim}{h}^3 \end{cases}$$

Zadanie 5.2. Niech tensory $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \in E^2 \otimes E^3$ mają reprezentacje

$$A^i{}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie} \quad \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$$

$$[B_{i\alpha}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie} \quad \{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$$

oraz dane są zależności

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}^1 = 2\underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{e}^2 = -\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = 3\underset{\sim}{d}_1 + 2\underset{\sim}{d}_2 + \underset{\sim}{d}_3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = 2\underset{\sim}{d}_1 + 2\underset{\sim}{d}_2 + \underset{\sim}{d}_3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = \underset{\sim}{d}_1 + \underset{\sim}{d}_2 + \underset{\sim}{d}_3 \end{cases}$$

a) znaleźć tensor (reprezentację) $\underset{\sim}{A} - 2\underset{\sim}{B}$,

b) znaleźć cosinus kąta między tensorami $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$,

c) znaleźć odwzorowanie dwuliniowe wyznaczone przez tensor $\underset{\sim}{A}$.

6. PRZESTRZENIE TENSOROWE NAD PRZESTRZENIĄ EUKLIDESOWĄ

6.1. Definicja przestrzeni tensorowej Reprezentacja macierzowa tensora i wzory transformacyjne

Definicja 6.1. Niech p będzie liczbą naturalną. Przestrzenią tensorową $\mathcal{T}_p$ o walencji p nad przestrzenią euklidesową E^n nazywamy p-krotny iloczyn tensorowy przestrzeni E^n, więc

$$\mathcal{T}_p := E^n \otimes \ldots \otimes E^n \qquad \text{(p-razy tensorowo)}$$

Przestrzeń tensorowa $\mathcal{T}_p$ jest oczywiście przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych R. Elementy tej przestrzeni nazywamy tensorami o walencji p i oznaczamy przez $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C}$, itp. Przyjmujemy, że przestrzeń euklidesowa E^n jest przestrzenią tensorową o walencji 1, a ciało liczb rzeczywistych R przestrzenią tensorową o walencji 0, więc $\mathcal{T}_1 = E^n$ a $\mathcal{T}_0 = R$.