Zatem mamy

$$\left[f^k{}_i\right]^T\left[g_{kl}\right]\left[f^l{}_j\right] = \left[g_{ij}\right]$$

Wniosek 4.2. Niech $\{i_i\}$ będzie bazą ortonormalną n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Odwzorowanie $f : E^n \to E^n$ jest izomorfizmem ortogonalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jego reprezentacja $\left[f^k{}_i\right]$ jest macierzą ortogonalną, tzn. spełnia warunek

$$\left[f^k{}_i\right]^T\left[f^k{}_j\right] = \left[\delta_{ij}\right]$$

Dowód wynika z twierdzenia 4.5 i faktu, że macierz $\left[g_{ij}\right]$ jest macierzą jednostkową.

4.3. Zadania

Zadanie 4.1. Niech w przestrzeni liniowej wielomianów $R_3[x]$ stopnia co najwyżej trzeciego nad ciałem liczb rzeczywistych iloczyn skalarny będzie określony wzorem

$$\bigwedge_{u,v\in R_3[x]} u \circ v := \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx$$

Zbadać, czy odwzorowania $f : R_3[x] \to R_3[x]$ określone następująco:

a) $\bigwedge_{u\in R_3[x]} f(u)(x) := u(-x)$

b) $\bigwedge_{u\in R_3[x]} f(u)(x) := x^3 u\left(\frac{1}{x}\right)$

są odwzorowaniami ortogonalnymi.

Zadanie 4.2. Niech w przestrzeni liniowej wielomianów $R_3[x]$ będzie określony iloczyn skalarny wzorem:

$$\bigwedge_{w_\alpha, w_\beta \in R_3[x]} w_\alpha \circ w_\beta = (\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3) \circ (\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\beta_3 x^3) :=$$

$$:= \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

Wykazać, że odwzorowania $f : R_3[x] \to R_3[x]$ określone następująco:

a) $f(w)(x) := w(-x)$

b) $f(w)(x) := x^3\, w\left(\frac{1}{x}\right)$

są ortogonalne. Znaleźć reprezentacje $[f^j{}_i]$ tych odwzorowań w bazie standardowej $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, tzn. $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, $e_4 = x^3$.

Zadanie 4.3. Niech będzie dana przestrzeń kartezjańska R^3. Zbadać czy odwzorowanie $f : R^3 \to R^3$ reprezentowane w bazie standardowej $\{\underset{\sim}{i}_i\}$ gdzie $\underset{\sim}{i}_1 = [1,0,0]$, $\underset{\sim}{i}_2 = [0,1,0]$, $\underset{\sim}{i}_3 = [0,0,1]$, przez macierz

$$[f^j{}_i] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest ortogonalne przy ustalonym $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$.