$$[B_{i\alpha}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie} \quad \{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$$

oraz dane są zależności

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}^1 = 2\underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 \\ \underset{\sim}{e}^2 = -\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = 3\underset{\sim}{d}_1 + 2\underset{\sim}{d}_2 + \underset{\sim}{d}_3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = 2\underset{\sim}{d}_1 + 2\underset{\sim}{d}_2 + \underset{\sim}{d}_3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = \underset{\sim}{d}_1 + \underset{\sim}{d}_2 + \underset{\sim}{d}_3 \end{cases}$$

a) znaleźć tensor (reprezentację) $\underset{\sim}{A} - 2\underset{\sim}{B}$,

b) znaleźć cosinus kąta między tensorami $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$,

c) znaleźć odwzorowanie dwuliniowe wyznaczone przez tensor $\underset{\sim}{A}$.

6. PRZESTRZENIE TENSOROWE NAD PRZESTRZENIĄ EUKLIDESOWĄ

6.1. Definicja przestrzeni tensorowej Reprezentacja macierzowa tensora i wzory transformacyjne

Definicja 6.1. Niech p będzie liczbą naturalną. Przestrzenią tensorową $\mathcal{T}_p$ o walencji p nad przestrzenią euklidesową E^n nazywamy p-krotny iloczyn tensorowy przestrzeni E^n, więc

$$\mathcal{T}_p := E^n \otimes \ldots \otimes E^n \qquad \text{(p-razy tensorowo)}$$

Przestrzeń tensorowa $\mathcal{T}_p$ jest oczywiście przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych R. Elementy tej przestrzeni nazywamy tensorami o walencji p i oznaczamy przez $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C}$, itp. Przyjmujemy, że przestrzeń euklidesowa E^n jest przestrzenią tensorową o walencji 1, a ciało liczb rzeczywistych R przestrzenią tensorową o walencji 0, więc $\mathcal{T}_1 = E^n$ a $\mathcal{T}_0 = R$.

Z definicji wynika, że istnieje odwzorowanie

$$\overset{p}{\otimes} : E^n \times \ldots \times E^n \longrightarrow \mathcal{T}_p, \quad \text{gdzie} \quad p > 1$$

nazywane p-krotnym iloczynem tensorowym, spełniające aksjomaty:

$$1)\ \underset{\sim}{a}_1 \otimes \ldots \otimes (\underset{\sim}{a}_i + \underset{\sim}{a}'_i) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{a}_p = \underset{\sim}{a}_1 \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{a}_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{a}_p + \underset{\sim}{a}_1 \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{a}'_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{a}_p$$

$$2)\ \underset{\sim}{a}_1 \otimes \ldots \otimes \alpha \underset{\sim}{a}_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{a}_p = \alpha \underset{\sim}{a}_1 \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{a}_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{a}_p$$

gdzie: $\alpha \in R$; $\underset{\sim}{a}_1, \ldots, \underset{\sim}{a}_i, \underset{\sim}{a}'_i, \ldots, \underset{\sim}{a}_p \in E^n$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Zatem odwzorowanie $\overset{p}{\otimes}$ jest p-liniowe.

Tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ dla $p > 1$, nazywać będziemy tensorem prostym, jeśli daje się przedstawić w postaci:

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{a}_1 \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{a}_p, \quad \text{gdzie} \quad \underset{\sim}{a}_i \in E^n \ \text{dla}\ i = 1, \ldots, p$$

W przeciwnym przypadku tensor $\underset{\sim}{A}$ nazywać będziemy tensorem złożonym.

<u>Twierdzenie</u> 6.1. Niech będzie danych p baz $\{\underset{\sim}{e}^i\}, \ldots, \ldots \{\underset{\sim}{d}^\alpha\}, \ldots, \{\underset{\sim}{h}_\Omega\}$ przestrzeni euklidesowej E^n. Wtedy zbiór tensorów prostych o postaci: $\underset{\sim}{e}_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega$ dla $i, \ldots, \alpha, \ldots, \Omega = 1, \ldots, n$ stanowi bazę przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ nad przestrzenią euklidesową E^n.

Dowód przebiega podobnie do dowodu twierdzenia 5.1.

<u>Wniosek</u> 6.1. Niech $\mathcal{T}_p$ będzie przestrzenią tensorową o walencji p nad przestrzenią euklidesową E^n. Wtedy $\dim \mathcal{T}_p = n^p$.

Bazę przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ nad przestrzenią euklidesową E^n utworzoną z wektorów tej samej bazy przestrzeni euklidesowej E^n i jej kobazy np. o postaci $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{e}^j \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{e}_k\}$ nazywamy bazą prostą, a w przeciwnym przypadku złożoną.

Niech zbiór $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{h}^\Omega\}$ będzie bazą przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$. Wtedy dowolny tensor $\underset{\sim}{T} \in \mathcal{T}_p$ można jednoznacznie przedstawić w postaci:

$$T = T^{i\dots\alpha\dots}_{\dots\dots\dots\Omega}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{h}^\Omega$$

Oczywiście liczby $T^{i\dots\alpha\dots}_{\dots\dots\dots\Omega} \in R$ dla $i,\dots,\alpha,\dots,\Omega = 1,\dots,n$ są współrzędnymi, a macierz $[T^{i\dots\alpha\dots}_{\dots\dots\dots\Omega}]$ jest reprezentacją macierzową tensora $\underset{\sim}{T}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{h}^\Omega\}$.

Jeśli indeksy każdej z baz przestrzeni euklidesowej E^n wchodzących do bazy przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ oznaczy się literami z innego alfabetu, to wystarczy podać samą reprezentację i określa już ona jednoznacznie tensor, gdyż rodzaj indeksów reprezentacji wskazuje na to, w jakiej jest ona bazie. Pisze się więc, np. $\underset{\sim}{T} = [T^{i\dots\alpha\dots}_{\dots\dots\dots\Omega}]$. Umowa ta pozwala na prowadzenie operacji na tensorach bez wypisywania bazy.

W przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ można wprowadzić inne bazy:

a) zbiór tensorów $\underset{\sim}{G}_k \in \mathcal{T}_p$ dla $k = 1,\dots,n^p$ liniowo niezależny jest bazą przestrzeni $\mathcal{T}_p$. Wtedy dowolny tensor $\underset{\sim}{T} \in \mathcal{T}_p$ można przedstawić jednoznacznie w postaci $\underset{\sim}{T} = T^k \underset{\sim}{G}_k$, gdzie liczby $T^k \in R$ dla $k = 1,\dots,n^p$ są współrzędnymi, a macierz $[T^k] \in R^{n^p}$ jest reprezentacją tensora $\underset{\sim}{T}$ w bazie $[\underset{\sim}{G}_k]$.

b) niech $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{p-q} \otimes \mathcal{T}_q$ i $1 \leqslant q < p$. Jeśli zbiór tensorów $\{\underset{\sim}{G}_k \in \mathcal{T}_{p-q}$ dla $k = 1,\dots,n^{p-q}\}$ jest bazą przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_{p-q}$, a zbiór tensorów $\{\underset{\sim}{H}_l \in \mathcal{T}_q$ dla $l = 1,\dots,n^q\}$ bazą przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_q$, to zbiór tensorów $\{\underset{\sim}{G}_k \otimes \underset{\sim}{H}_l \in \mathcal{T}_p$ dla $k = 1,\dots,n^{p-q}$, $l = 1,\dots,n^q\}$ jest bazą przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$. Wtedy dowolny tensor $\underset{\sim}{T} \in \mathcal{T}_p$ można jednoznacznie przedstawić w postaci $\underset{\sim}{T} = T^{kl} \underset{\sim}{G}_k \otimes \underset{\sim}{H}_l$, gdzie liczby $T^{kl} \in R$ dla $k = 1,\dots,n^{p-q}$; $l = 1,\dots,n^q$ są współrzędnymi, a macierz $[T^{kl}] \in R^{n^{p-q} \times n^q}$ jest reprezentacją tensora $\underset{\sim}{T}$ w bazie $\{\underset{\sim}{G}_k \otimes \underset{\sim}{H}_l\}$.

<u>Twierdzenie</u> 6.2. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{1}_A\}$ i $\{\underset{\sim}{d}_\beta \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{h}^\Omega \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ będą bazami przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$.

Jeśli dowolny tensor $\underset{\sim}{T} \in \mathcal{T}_p$ przedstawimy w postaci kombinacji liniowej tensorów pierwszej, a następnie drugiej bazy, tzn.

$$\underset{\sim}{T} = T^{i.....A}_{...\alpha...}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{l}_A$$

$$\underset{\sim}{T} = T^{\beta......}_{...\Omega..j}\, \underset{\sim}{d}_{\beta} \otimes \ldots \otimes h^{\Omega} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{e}^j$$

gdzie $T^{i.....A}_{...\alpha...}$, $T^{\beta......}_{...\Omega...j} \in R$ dla $i,\beta,\ldots,\alpha,\Omega,\ldots,A,j=1,\ldots,n$ są współrzędnymi tensora $\underset{\sim}{T}$ w danych bazach, to otrzymamy wzór transformacyjny:

$$T^{\beta......}_{...\Omega...j} = T^{i.....A}_{...\alpha...}\, g_i^{\beta}\ldots g_{\Omega}^{\alpha}\ldots g_{Aj} \quad \text{dla } \beta,\ldots,\Omega,\ldots,j=1,\ldots,n$$

gdzie $g_i^{\beta},\ldots,g_{\Omega}^{\alpha},\ldots,g_{Aj} \in R$ dla $i,\beta,\ldots,\alpha,\Omega,\ldots,j,A=1,\ldots,n$ są współczynnikami macierzy przejścia między odpowiednimi bazami przestrzeni euklidesowej E^n.

Dowód przebiega podobnie do dowodu twierdzenia 5.2.

Wzory transformacyjne podają zależności między współrzędnymi (reprezentacjami) tego samego tensora w dwu bazach. Wynika z nich, że wymiana indeksów (przenoszenia ich na inny poziom) odbywa się za pomocą układu liczb g indeksowanych tak, aby zachodziła konwencja sumacyjna.

P r z y k ł a d 6.1. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_3 = E^2 \otimes E^2 \otimes E^2$ ma w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \underset{\sim}{l}_A\}$ reprezentację $[A^i{}_{\alpha}{}^A]$ taką, że

$$[A^1{}_{\alpha}{}^A] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [A^2{}_{\alpha}{}^A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Znajdziemy reprezentację $[A^i{}_{kl}]$ tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie prostej $\{\underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}^k \otimes \underset{\sim}{e}^l\}$, jeśli dane są zależności:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = 3\underset{\sim}{e}^1 + 4\underset{\sim}{e}^2 \\ \underset{\sim}{d}^2 = \underset{\sim}{e}^1 + \underset{\sim}{e}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{e}^1 = -2\underset{\sim}{l}_1 + \underset{\sim}{l}_2 \\ \underset{\sim}{e}^2 = \underset{\sim}{l}_1 - \underset{\sim}{l}_2 \end{cases}$$

Ze wzoru transformacyjnego podanego w twierdzeniu 6.2 wynika, że

$$A^{j}{}_{kl} = A^{i}{}_{\alpha}{}^{A}\delta^{j}_{i}g^{\alpha}_{k}g_{Al} = A^{j}{}_{\alpha}{}^{A}g^{\alpha}_{k}g_{Al} \quad \text{dla} \quad j,k,l = 1,2$$

a więc należy znaleźć macierze przejścia $[g^{\alpha}{}_{k}]$ i $[g_{Al}]$.

Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{d}^{\alpha}\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^{k}\}$ dana jest w postaci

$$\underset{\sim}{d}^{\alpha} = g^{\alpha}_{k}\underset{\sim}{e}^{k} \quad \text{dla } \alpha = 1,2; \quad \text{stąd } [g^{\alpha}_{k}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{e}^{l}\}$ i $\{\underset{\sim}{1}_{A}\}$ dana jest w postaci

$$\underset{\sim}{e}^{l} = g^{Al}\underset{\sim}{1}_{A} \quad \text{dla } l = 1,2; \quad \text{stąd } [g^{Al}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ze wzorów podanych w twierdzeniu 3.5 mamy

$$g^{Al}g_{lB} = \delta^{A}_{B} \quad \text{dla } A,B = 1,2 \qquad [g^{Al}][g_{lB}] = [\delta^{A}{}_{B}]$$

lub macierzowo

$$g_{lA}g^{Ak} = \delta^{k}_{l} \quad \text{dla } l,k = 1,2 \qquad [g_{lA}][g^{Ak}] = [\delta_{l}{}^{k}]$$

stąd

$$[g_{lA}] = [g^{Al}]^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Wykonując sumowanie we wzorze transformacyjnym otrzymamy

$$A^{j}{}_{kl} = A^{j}{}_{\alpha}{}^{A}g^{\alpha}_{k}g_{Al} = A^{j}{}_{1}{}^{1}g^{1}_{k}g_{1l} + A^{j}{}_{2}{}^{1}g^{2}_{k}g_{1l} + A^{j}{}_{1}{}^{2}g^{1}_{k}g_{2l} + A^{j}{}_{2}{}^{2}g^{2}_{k}g_{2l}$$

dla $j,k,l = 1,2$, a stąd

$$A^{1}{}_{11} = A^{1}{}_{1}{}^{1}g^{1}_{1}g_{11} + A^{1}{}_{2}{}^{1}g^{2}_{1}g_{11} + A^{1}{}_{1}{}^{2}g^{1}_{1}g_{21} + A^{1}{}_{2}{}^{2}g^{2}_{1}g_{21} =$$

$$= (-1)\cdot 3(-1) + 0\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot 3(-1) + 1\cdot 1\cdot(-1) = -4$$

$$A^{1}{}_{21} = A^{1}{}_{1}{}^{1}g^{1}_{2}g_{11} + A^{1}{}_{2}{}^{1}g^{2}_{2}g_{11} + A^{1}{}_{1}{}^{2}g^{1}_{2}g_{21} + A^{1}{}_{2}{}^{2}g^{2}_{2}g_{21} =$$

$$= (-1)4(-1) + 0\cdot 1(-1) + 2\cdot 4(-1) + 1\cdot 1(-1) = -5$$

$$A^{1}{}_{12} = A^{1}{}_{1}{}^{1}g^{1}_{1}g_{12} + A^{1}{}_{2}{}^{1}g^{2}_{1}g_{12} + A^{1}{}_{1}{}^{2}g^{1}_{1}g_{22} + A^{1}{}_{2}{}^{2}g^{2}_{1}g_{22} =$$

$$= (-1)3(-1) + 0\cdot 1(-1) + 2\cdot 3(-2) + 1\cdot 1(-2) = -11$$

$$A^1{}_{22} = A^1{}_1{}^1\, g^1_2 g_{12} + A^1{}_2{}^1 g^2_2 g_{12} + A^1{}_1{}^2 g^1_2 g_{22} + A^1{}_2{}^2 g^2_2 g_{22} =$$
$$= (-1)4(-1) + 0\cdot 1(-1) + 2\cdot 4(-2) + 1\cdot 1(-2) = -14$$

$$A^2{}_{11} = A^2{}_1{}^1 g^1_1 g_{11} + A^2{}_2{}^1 g^2_1 g_{11} + A^2{}_1{}^2 g^1_1 g_{21} + A^2{}_2{}^2 g^2_1 g_{21} =$$
$$= 0\cdot 3(-1) + 0\cdot 1(-1) + 1\cdot 3(-1) + (-1)1(-1) = -2$$

$$A^2{}_{21} = A^2{}_1{}^1 g^1_2 g_{11} + A^2{}_2{}^1 g^2_2 g_{11} + A^2{}_1{}^2 g^1_2 g_{21} + A^2{}_2{}^2 g^2_2 g_{21} =$$
$$= 0\cdot 4(-1) + 0\cdot 1(-1) + 1\cdot 4(-1) + (-1)1(-1) = -3$$

$$A^2{}_{12} = A^2{}_1{}^1 g^1_1 g_{12} + A^2{}_2{}^1 g^2_1 g_{12} + A^2{}_1{}^2 g^1_1 g_{22} + A^2{}_2{}^2 g^2_1 g_{22} =$$
$$= 0\cdot 3(-1) + 0\cdot 1(-1) + 1\cdot 3(-2) + (-1)\cdot 1(-2) = -4$$

$$A^2{}_{22} = A^2{}_1{}^1 g^1_2 g_{12} + A^2{}_2{}^1 g^2_2 g_{12} + A^2{}_1{}^2 g^1_2 g_{22} + A^2{}_2{}^2 g^2_2 g_{22} =$$
$$= 0\cdot 4(-1) + 0\cdot 1(-1) + 1\cdot 4(-2) + (-1)\cdot 1(-2) = -6$$

Zatem

$$\left[A^1{}_{kl}\right] = \begin{bmatrix} -4 & -11 \\ -5 & -14 \end{bmatrix} \qquad \left[A^2{}_{kl}\right] = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

Reprezentację $\left[A^j{}_{kl}\right]$ tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\left\{\underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}^k \otimes \underset{\sim}{e}^l\right\}$ można znaleźć prościej. A mianowicie, zapisując wzór transformacyjny w postaci macierzowej otrzymamy

$$\left[A^1{}_{kl}\right] = \left[g_k^\alpha\right]\left[A^1{}_\alpha{}^A\right]\left[g_{Al}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -11 \\ -5 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\left[A^2{}_{kl}\right] = \left[g_k^\alpha\right]\left[A^2{}_\alpha{}^A\right]\left[g_{Al}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$

6.2. Działania na tensorach

Można wykazać, że w bazie $\left\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{1}_A\right\}$ przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ działania dodawania tensorów i mnożenia