b) ujemnie (niedodatnio) określonym, jeśli

$$\bigwedge_{0 \neq a \in U} f(a,\dots,a) < 0 \qquad (\leqslant 0)$$

Odwzorowanie, które nie jest ani nieujemnie ani niedodatnio określone nazywamy nieokreślonym.

P r z y k ł a d 2.5. Niech $R_1[x]$ będzie przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej pierwszego nad ciałem liczb rzeczywistych. Odwzorowanie (forma) $f : R_1[x] \times R_1[x] \to R$ określone następująco:

$$\bigwedge_{w_\alpha, w_\beta \in R_1[x]} f(w_\alpha, w_\beta) = f(\alpha_0+\alpha_1 x,\ \beta_0+\beta_1 x) :=$$

$$:= \alpha_0\beta_0 + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_1\beta_1$$

jak łatwo zauważyć, jest odwzorowaniem dwuliniowym symetrycznym.

Ponieważ dla dowolnego wielomianu $0 \neq w_\alpha \in R_1[x]$ mamy

$$f(w_\alpha, w_\alpha) = f(\alpha_0+\alpha_1 x,\ \alpha_0+\alpha_1 x) = \alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1^2 = (\alpha_0+\alpha_1)^2 \geqslant 0,$$

a więc odwzorowanie to jest nieujemnie określone.

2.2. Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego i wieloliniowego oraz jej własności

Niech U^m i V^n będą przestrzeniami liniowymi o wymiarach m i n nad ciałem K oraz $\{e_i\}$ będzie bazą przestrzeni U^m, a $\{d_\gamma\}$ bazą przestrzeni V^n. Jeśli $f : U^m \to V^n$ jest odwzorowaniem liniowym, to wektory $f(e_i)$ dla $i = 1,2,\dots,m$ należące do przestrzeni V^n można jednoznacznie przedstawić jako kombinacje liniowe wektorów bazy $\{d_\gamma\}$, a więc

$$\begin{cases} f(e_1) = f^1{}_1 d_1 + f^2{}_1 d_2 + \ldots + f^n{}_1 d_n \\ f(e_2) = f^1{}_2 d_1 + f^2{}_2 d_2 + \ldots + f^n{}_2 d_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(e_m) = f^1{}_m d_1 + f^2{}_m d_2 + \ldots + f^n{}_m d_n \end{cases}$$

lub krócej

$$f(e_i) = f^{\gamma}{}_i d_{\gamma}{}^{*)} \qquad \text{dla} \quad i = 1,\ldots,m$$

Skalary $f^{\gamma}{}_i \in K$ dla $\gamma = 1,\ldots,n$; $i = 1,\ldots,m$ nazywamy współrzędnymi, a macierz $[f^{\gamma}{}_i] \in K^{n\times m}$ reprezentacją macierzową odwzorowania liniowego f w bazach $\{e_i\}$ i $\{d_{\gamma}\}$. Macierz

$$[f^{\gamma}{}_i] = \begin{bmatrix} f^1{}_1 & f^1{}_2 & \ldots & f^1{}_m \\ f^2{}_1 & f^2{}_2 & \ldots & f^2{}_m \\ . & . & \ldots & . \\ f^n{}_1 & f^n{}_2 & \ldots & f^n{}_m \end{bmatrix}$$

oczywiście zależy od wyboru baz w przestrzeniach U^m i V^n.

Jeśli indeksy różnych baz przestrzeni U^m i V^n oznaczymy literami innego alfabetu, to reprezentację odwzorowania liniowego można oznaczać tym samym symbolem co odwzorowanie z odpowiednimi indeksami. Rodzaj indeksów w reprezentacji odwzorowania określa jednoznacznie bazy z nią związane. Np. $[f^{\alpha}{}_A]$ jest macierzą odwzorowania f w bazach $\{l_A\}$ i $\{d_{\alpha}\}$. W przypadku gdy odwzorowanie $f : U^m \to K$ jest formą liniową, reprezentacja $[f_i] \in K^m$ jest macierzą wierszową, ponieważ baza przestrzeni K składa się z jednego skalara.

Twierdzenie 2.6. Niech U^m i V^n będą przestrzeniami liniowymi o wymiarach m i n nad ciałem K oraz $\{e_i\}$ będzie bazą przestrzeni U^m, a $\{d_{\gamma}\}$ bazą przestrzeni V^n. Macierz $[f^{\gamma}{}_i] \in K^{n\times m}$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania liniowego $f : U^m \to V^n$ w bazach $\{e_i\}$ i $\{d_{\gamma}\}$ wtedy i tylko wtedy,

---

*) Obowiązuje konwencja sumacyjna Einsteina, patrz str. 25.

gdy dowolny wektor $a \in U^m$ ma reprezentację $[\alpha^i] \in K^m$ w bazie $\{e_i\}$, a wektor $f(a)$ ma reprezentację $[f^\gamma{}_i][\alpha^i] \in K^n$ w bazie $\{d_\gamma\}$.

Dowód. $\Longrightarrow$ Niech macierz $[f^\gamma{}_i] \in K^{n\times m}$ będzie reprezentacją odwzorowania liniowego $f : U^m \to V^n$ w bazach $\{e_i\}$ i $\{d_\gamma\}$. Wtedy wektory $f(e_i) \in V^n$ dla $i = 1,\dots,m$ można przedstawić w postaci

$$f(e_i) = f^\gamma{}_i d_\gamma \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,m$$

Wykażemy, że macierz $[f^\gamma{}_i]$ spełnia tezę twierdzenia. Dowolny wektor $a \in U^m$ przedstawmy w bazie $\{e_i\}$ przestrzeni U^m

$$a = \alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^m e_m = \alpha^i e_i$$

co oznacza, że wektor a ma reprezentację $[\alpha^i]$ w bazie $\{e_i\}$. Wtedy z liniowości odwzorowania f otrzymamy

$$f(a) = f(\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^m e_m) = \alpha^1 f(e_1) + \dots + \alpha^m f(e_m) =$$

$$= \alpha^i f(e_i) = \alpha^i f^\gamma{}_i d_\gamma = f^\gamma{}_i \alpha^i d_\gamma$$

Stąd wynika, że macierz $[f^\gamma{}_i \alpha^i] = [f^\gamma{}_i][\alpha^i]$ jest reprezentacją wektora $f(a)$ w bazie $\{d_\gamma\}$.

$\Longleftarrow$ Niech $[f^\gamma{}_i] \in K^{n\times m}$ będzie macierzą, a $f : U^m \to V^n$ odwzorowaniem, które dowolnemu wektorowi $a \in U^m$ o reprezentacji $[\alpha^i]$ w bazie $\{e_i\}$ przyporządkowuje wektor $f(a) \in V^n$ o reprezentacji $[f^\gamma{}_i][\alpha^i]$ w bazie $\{d_\gamma\}$. Wtedy odwzorowanie to można zapisać w postaci

$$f(a) = f(\alpha^i e_i) = f^\gamma{}_i \alpha^i d_\gamma \quad \text{dla} \quad a \in U^m$$

Wykażemy, że odwzorowanie f jest liniowe. Sprawdzamy aksjomaty definicji odwzorowania liniowego:

1) dla dowolnych wektorów $a,b \in U^m$ mamy

$$f(a+b) = f(\alpha^i e_i + \beta^i e_i) = f((\alpha^i + \beta^i)e_i) = f^\gamma{}_i(\alpha^i + \beta^i)d_\gamma =$$
$$= (f^\gamma{}_i\alpha^i + f^\gamma{}_i\beta^i)d_\gamma = f^\gamma{}_i\alpha^i d_\gamma + f^\gamma{}_i\beta^i d_\gamma = f(a) + f(b)$$

2) dla dowolnego skalara $\beta \in K$ i dowolnego wektora $a \in U^m$ mamy

$$f(\beta a) = f(\beta(\alpha^i e_i)) = f((\beta\alpha^i)e_i) = f^\gamma{}_i(\beta\alpha^i)d_\gamma =$$

$$= \beta f^\gamma{}_i \alpha^i d_\gamma = \beta f(a)$$

Aksjomaty definicji 2.1 są spełnione, a więc odwzorowanie f jest liniowe.

P r z y k ł a d 2.6. Niech R^3 i R^2 będą przestrzeniami liniowymi ciągów 3-wyrazowych i 2-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych oraz $\{e_i\}$ będzie bazą przestrzeni R^3 taką, że $e_1 = [1,2,0]$, $e_2 = [1,1,1]$, $e_3 = [0,0,1]$, a $\{d_\gamma\}$ bazą przestrzeni R^2 taką, że $d_1 = [1,2]$, $d_2 = [0,1]$. Znajdziemy reprezentację $[f^\gamma{}_i]$ odwzorowania liniowego $f : R^3 \to R^2$ określonego następująco:

$$\bigwedge_{[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] \in R^3} f([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) := [2\alpha_1, \alpha_2+\alpha_3]$$

w bazach $\{e_i\}$ i $\{d_\gamma\}$.

Z definicji reprezentacji macierzowej $[f^\gamma{}_i]$ odwzorowania liniowego f mamy

$$f(e_i) = f^\gamma{}_i d_\gamma \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3$$

Rozpisując powyższe równania otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} f(e_1) = f^1{}_1 d_1 + f^2{}_1 d_2 \\ f(e_2) = f^1{}_2 d_1 + f^2{}_2 d_2 \\ f(e_3) = f^1{}_3 d_1 + f^2{}_3 d_2 \end{cases}$$

Układ ten po podstawieniu danych i znalezieniu rozwiązania przyjmie postać

$$\begin{cases} f([1,2,0]) = [2,2] = 2[1,2] + (-2)[0,1] \\ f([1,1,1]) = [2,2] = 2[1,2] + (-2)[0,1] \\ f([0,0,1]) = [0,1] = 0[1,2] + 1[0,1] \end{cases}$$

Stąd wynika, że

$$[f^{\gamma}_{i}] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

P r z y k ł a d 2.7. Niech $\{e_i\}$ będzie bazą przestrzeni liniowej wielomianów $R_2[x]$ stopnia co najwyżej drugiego nad ciałem liczb rzeczywistych taką, że $e_1 = 1 - x$, $e_2 = x^2 + x$, $e_3 = x^2 + x + 1$, a $\{d_\gamma\}$ będzie bazą przestrzeni liniowej ciągów R^2 nad ciałem liczb rzeczywistych taką, że $d_1 = [1,0]$, $d_2 = [1,1]$. Znajdziemy odwzorowanie liniowe $f : R_2[x] \to R^2$, jeśli dana jest reprezentacja macierzowa $[f^{\gamma}_{i}] \in R^{2\times 3}$ tego odwzorowania w bazach $\{e_i\}$ i $\{d_\gamma\}$ taka, że

$$[f^{\gamma}_{i}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Korzystamy z twierdzenia 2.6. Dowolny wielomian $w = \omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 \in R_2[x]$ przedstawimy w bazie $\{e_i\}$ przestrzeni $R_2[x]$, zatem

$$w = \omega_0 1 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 = (\omega_2 - \omega_1)(1 - x) + (2\omega_2 - \omega_0 - \omega_1)(x^2 + x) + \\ + (\omega_0 + \omega_1 - \omega_2)(x^2 + x + 1)$$

Stąd wynika, że macierz kolumnowa

$$[w^i] = \begin{bmatrix} \omega_2 - \omega_1 \\ 2\omega_2 - \omega_0 - \omega_1 \\ \omega_0 + \omega_1 - \omega_2 \end{bmatrix} \in R^3$$

jest reprezentacją wielomianu w w bazie $\{e_i\}$. Natomiast macierz

$$[f^{\gamma}_{i}][w^i] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_2 - \omega_1 \\ 2\omega_2 - \omega_0 - \omega_1 \\ \omega_0 + \omega_1 - \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 - \omega_1 \\ 4\omega_2 - \omega_0 - 2\omega_1 \end{bmatrix} \in R^2$$

jest reprezentacją wektora f(w) w bazie $\{d_\gamma\}$. Zatem mamy

$$f(w) = f(\omega_0 1 + \omega_1 x + \omega_2 x^2) = (\omega_0 - \omega_1)[1,0] + (-\omega_0 - 2\omega_1 + 4\omega_2)[1,1]$$

a stąd otrzymamy poszukiwane odwzorowanie

$$f(\omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2) = [-3\omega_1 + 4\omega_2, -\omega_0 - 2\omega_1 + 4\omega_2]$$

Twierdzenie 2.7. Niech U^m i V^n będą przestrzeniami liniowymi o wymiarach m i n nad ciałem K oraz $\{e_i\}$ będzie bazą przestrzeni U^m, a $\{d_\beta\}$ bazą przestrzeni V^n.

1) jeśli $f : U^m \to V^n$ i $g : U^m \to V^n$ są odwzorowaniami liniowymi, to dla odwzorowania liniowego $(f + g) : U^m \to V^n$ otrzymamy wzór

$$[(f+g)^\beta{}_i] = [f^\beta{}_i] + [g^\beta{}_i]$$

2) jeśli $f : U^m \to V^n$ jest odwzorowaniem liniowym, a γ skalarem z ciała K, to dla odwzorowania liniowego $f : U^m \to V^n$ otrzymamy wzór

$$[(\gamma f)^\beta{}_i] = \gamma [f^\beta{}_i]$$

Dowód czysto rachunkowy pomijamy.

Twierdzenie 2.8. Niech U^m, V^n i W^r będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K o wymiarach m, n i r oraz $\{e_i\}$ będzie bazą przestrzeni U^m, $\{d_\gamma\}$ bazą przestrzeni V^n, a $\{l_A\}$ bazą przestrzeni W^r. Jeśli $f : U^m \to V^n$ i $g : V^n \to W^r$ są odwzorowaniami liniowymi, to dla odwzorowania liniowego $g \circ f : U^m \to W^r$ otrzymamy wzór

$$[(g \circ f)^A{}_i] = [g^A{}_\gamma][f^\gamma{}_i]$$

Dowód. Dla dowolnego wektora $a \in U^m$ mamy

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(f(\alpha^i e_i)) = g(\alpha^i f(e_i)) =$$

$$= g(\alpha^i f^\gamma{}_i d_\gamma) = f^\gamma{}_i \alpha^i g(d_\gamma) = f^\gamma{}_i \alpha^i g^A{}_\gamma l_A = g^A{}_\gamma f^\gamma{}_i \alpha^i l_A$$

Stąd otrzymamy

$$\left[(g\circ f)^A{}_i\right] = \left[g^A{}_\gamma f^\gamma{}_i\right] = \left[g^A{}_\gamma\right]\left[f^\gamma{}_i\right]$$

Twierdzenie 2.9. Niech V^n będzie przestrzenią liniową n-wymiarową nad ciałem K, a $\{e_i\}$ i $\{l_A\}$ będą bazami przestrzeni V^n. Jeśli id : $V^n \longrightarrow V^n$ jest odwzorowaniem tożsamościowym, to otrzymamy wzór

$$\left[id^A{}_i\right] = \left[\gamma^A{}_i\right]$$

gdzie $\left[\gamma^A{}_i\right]$ jest macierzą przejścia od bazy $\{e_i\}$ do bazy $\{l_A\}$.

Dowód. Ponieważ $\left[id^A{}_i\right]$ jest reprezentacją macierzową odwzorowania tożsamościowego id w bazach $\{e_i\}$ i $\{l_A\}$, więc mamy

$$id(e_i) = id^A{}_i l_A \quad \text{dla} \quad i = 1,\ldots,n$$

Stąd otrzymamy

$$e_i = id^A{}_i l_A \qquad \text{dla} \qquad i = 1,\ldots,n$$

Z określenia macierzy przejścia $\left[\gamma^A{}_i\right]$ od bazy $\{e_i\}$ do bazy $\{l_A\}$ wynika, że

$$id^A{}_i = \gamma^A{}_i \qquad \text{dla} \quad A,i = 1,\ldots,n$$

Zatem

$$\left[id^A{}_i\right] = \left[\gamma^A{}_i\right]$$

Twierdzenie 2.10. Niech U^m i V^n będą przestrzeniami liniowymi o wymiarach m i n nad ciałem K oraz $\{e_i\}$ i $\{l_A\}$ będą bazami przestrzeni U^m, a $\{d_\alpha\}$ i $\{h_\Omega\}$ bazami przestrzeni V^n. Jeśli odwzorowanie f : $U^m \longrightarrow V^n$ jest liniowe, to otrzymamy wzór

$$\left[f^\Omega{}_A\right] = \left[\gamma^\Omega{}_\alpha\right]\left[f^\alpha{}_i\right]\left[\gamma^i{}_A\right]$$

Dowód. Rozważmy następujący diagram

$$\begin{tikzcd} U^m \arrow[r, "id_U"] & U^m \arrow[r, "f"] & V^n \arrow[r, "id_V"] & V^n \\ \{l_A\} \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \{e_i\} & \{d_\alpha\} & \{h_\Omega\} \end{tikzcd}$$

Ponieważ $f = id_V \circ f \circ id_U$, to z twierdzenia 2.8 wynika, że

$$\left[f^\Omega{}_A\right] = \left[id^\Omega{}_\alpha\right]\left[f^\alpha{}_i\right]\left[id^i{}_A\right]$$

Stąd i z twierdzenia 2.9 otrzymamy

$$\left[f^\Omega{}_A\right] = \left[\gamma^\Omega{}_\alpha\right]\left[f^\alpha{}_i\right]\left[\gamma^i{}_A\right]$$

Powyższe twierdzenie ustala zależność między reprezentacjami tego samego odwzorowania w różnych bazach.

Wniosek 2.2. Niech $\{e_i\}$ i $\{l_A\}$ będą bazami n-wymiarowej przestrzeni liniowej V^n nad ciałem K. Jeśli $f : V^n \to V^n$ jest odwzorowaniem liniowym, to otrzymamy wzór

$$\left[f^A{}_B\right] = \left[\gamma^i{}_A\right]^{-1}\left[f^i{}_j\right]\left[\gamma^j{}_\beta\right]$$

Niech U^m, V^n i W^r będą przestrzeniami liniowymi o wymiarach m, n i r nad ciałem K oraz $\{e_i\}$ będzie bazą przestrzeni U^m, $\{l_A\}$ bazą przestrzeni V^n, a $\{d_\alpha\}$ bazą przestrzeni W^r. Jeśli odwzorowanie $f : U^m \times V^n \to W^r$ jest odwzorowaniem dwuliniowym, to wektory $f(e_i, l_A) \in W^r$ dla $i = 1,\dots,m$; $A = 1,\dots,n$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy $\{d_\alpha\}$, a więc

$$f(e_i, l_A) = f^\alpha{}_{iA} d_\alpha \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,m;\ A = 1,\dots,n$$

Skalary $f^\alpha{}_{iA} \in K$ dla $\alpha = 1,\dots,r$; $i = 1,\dots,m$; $A = 1,\dots,n$ nazywamy współrzędnymi, a macierz $\left[f^\alpha{}_{iA}\right] \in K^{r\times m\times n}$ reprezentacją macierzową odwzorowania dwuliniowego f w bazach $\{e_i\}$, $\{l_A\}$ i $\{d_\alpha\}$. Podobnie można określić współrzędne i reprezentację macierzową odwzorowania wieloliniowego.

W przypadku gdy odwzorowanie $f : U^m \times V^n \to K$ jest formą dwuliniową, to macierz $[f_{iA}] \in K^{m \times n}$ taka, że $f_{iA} = f(e_i, 1_A)$ dla $i = 1,\dots,m$; $A = 1,\dots,n$ jest reprezentacją macierzową tej formy dwuliniowej w bazach $\{e_i\}$ i $\{1_A\}$. Podobnie określamy reprezentację dla formy wieloliniowej.

P r z y k ł a d 2.8. Niech R^2 będzie przestrzenią liniową ciągów 2-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych, a $R_2[x]$ przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej drugiego nad ciałem liczb rzeczywistych. Znajdziemy reprezentację formy dwuliniowej $f : R^2 \times R_2[x] \to R$ określonej następująco:

$$f([\alpha_1,\alpha_2],\ \omega_0+\omega_1 x+\omega x^2) := (\alpha_1-\alpha_2)(\omega_0-\omega_1+2\omega_2)$$

w bazach standardowych $\{e_i\}$ przestrzeni R^2 i $\{1_A\}$ przestrzeni $R_2[x]$, gdzie $e_1 = [1,0]$, $e_2 = [0,1]$ oraz $1_1 = 1$, $1_2 = x$, $1_3 = x^2$.

Z definicji reprezentacji macierzowej formy dwuliniowej wynika, że

$$f_{iA} = f(e_i, 1_A) \quad \text{dla} \quad i = 1,2;\ A = 1,2,3$$

Zatem mamy

$$[f_{iA}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2.3. Zadania

Zadanie 2.1. Niech R^3 będzie przestrzenią liniową ciągów 3-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych, a $R_1[x]$ przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej pierwszego nad ciałem liczb rzeczywistych. Zbadać, które z odwzorowań $f_i : R^3 \to R_1[x]$ dla $i = 1,2,3$ są liniowe:

a) $f_1([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) := (\alpha_1 - 2\alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_1 + \alpha_2)x$

b) $f_2([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) := (\alpha_1 + 1) + (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)x$

c) $f_3([\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]) := (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1^2 - \alpha_3)x$