$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}^j\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

przy czym dana jest macierz dodatnio określona

$$[g^{ij}] = [\underset{\sim}{e}^i \underset{\sim}{e}^j] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Znaleźć rozkład widmowy tensora symetrycznego $\underset{\sim}{A}$.

Zadanie 7.4. Niech $\mathcal{T}_2$ będzie przestrzenią tensorową nad przestrzenią kartezjańską R^3.

a) znaleźć tensor ortogonalny $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ obracający wektory przestrzeni R^3 o kąt $\frac{\pi}{3}$ wokół osi wyznaczonej przez wektor $[2,1,2] \in R^3$,

b) znaleźć tensor ortogonalny $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ obracający lustrzane wektory przestrzeni R^3 o kąt $\frac{\pi}{3}$ wokół osi wyznaczonej przez wektor $[2,1,2] \in R^3$.

Zadanie 7.5. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie ortonormalnej } \{\underset{\sim}{i}_i \otimes \underset{\sim}{i}_j\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

gdzie $\{\underset{\sim}{i}_i\}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej E^3. Znaleźć rozkład biegunowy tensora $\underset{\sim}{A}$.

8. SYMETRIE TENSORÓW I FUNKCJI TENSOROWYCH

8.1. Definicja grupy symetrii zewnętrznej tensora Tensory izotropowe i hemitropowe

Definicja 8.1. Grupą symetrii zewnętrznej tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ nazywamy zbiór $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} := \{\underset{\sim}{Q} \in \vartheta : \underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}\}$, gdzie $*$ jest działaniem obrotu tensorów.

Wykażemy, że zbiór $\vartheta_{\underset{\sim}{A}}$ z działaniem prostego nasunięcia tensorów jest grupą. Wystarczy pokazać, że jest to podgrupa grupy tensorów ortogonalnych ϑ. Ponieważ dla dowolnych tensorów $\underset{\sim}{Q}_1, \underset{\sim}{Q}_2 \in \vartheta_{\underset{\sim}{A}}$ mamy

$$(\underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2) * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{Q}_1 * (\underset{\sim}{Q}_2 * \underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{Q}_1 * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}, \quad \text{stąd} \quad \underset{\sim}{Q}_1\underset{\sim}{Q}_2 \in \vartheta_{\underset{\sim}{A}}$$

i dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta_{\underset{\sim}{A}}$ mamy

$$\overset{-1}{\underset{\sim}{Q}} * \underset{\sim}{A} = \overset{-1}{\underset{\sim}{Q}} * (\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = (\overset{-1}{\underset{\sim}{Q}}\underset{\sim}{Q}) * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{1} * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}, \quad \text{stąd} \quad \overset{-1}{\underset{\sim}{Q}} \in \vartheta_{\underset{\sim}{A}}$$

Zatem zbiór $\vartheta_{\underset{\sim}{A}}$ jest podgrupą grupy ϑ.

<u>Definicja</u> 8.2. Grupą symetrii zewnętrznej tensorów $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_p$ nazywamy zbiór $\vartheta_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}} := \{\underset{\sim}{Q} \in \vartheta : \underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A} \text{ i } \underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B}\}$. Łatwo zauważyć, że $\vartheta_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}} = \vartheta_{\underset{\sim}{A}} \cap \vartheta_{\underset{\sim}{B}}$. Grupy symetrii tensorów są niepuste, bo należy do nich tensor jednostkowy $\underset{\sim}{1}$.

<u>Definicja</u> 8.3. Tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ nazywamy:

a) izotropowym wtedy i tylko wtedy, gdy $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} = \vartheta$;

b) hemitropowym wtedy i tylko wtedy, gdy $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} = \mathcal{R}$;

c) anizotropowym wtedy i tylko wtedy, gdy $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} \neq \mathcal{R}$ i $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} \neq \vartheta$;

gdzie $\mathcal{R}$ jest właściwą grupą tensorów ortogonalnych.

W przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_{2p}$ (o walencji parzystej) nie ma tensorów hemitropowych. Istotnie, jeśli tensor

$$\underset{\sim}{A} = A^{ij\ldots k}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{e}_k \in \mathcal{T}_{2p}$$

to

$$-\underset{\sim}{1} * \underset{\sim}{A} = A^{ij\ldots k}(-\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{e}_i) \otimes (-\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{e}_j) \otimes \ldots \otimes (-\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{e}_k) = (-1)^{2p}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$$

stąd $-\underset{\sim}{1} \in \vartheta_A$, a więc $\vartheta_A \neq \mathcal{R}$.

W przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_{2p+1}$ (o walencji nieparzystej) nie ma tensorów izotropowych. Istotnie, jeśli tensor

$$\underset{\sim}{A} = A^{ij\ldots k}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j \ldots \otimes \underset{\sim}{e}_k \in \mathcal{T}_{2p+1}$$

to

$$-\underset{\sim}{1} * \underset{\sim}{A} = A^{ij\ldots k}(-\underset{\sim}{1}e_i) \otimes (-\underset{\sim}{1}e_j) \otimes \ldots \otimes (-\underset{\sim}{1}e_k) = (-1)^{2p+1}\underset{\sim}{A} = -\underset{\sim}{A}$$

stąd $-\underset{\sim}{1} \notin \vartheta_{\underset{\sim}{A}}$, a więc $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} \neq \vartheta$.

P r z y k ł a d 8.1. Niech będzie dany niezerowy wektor $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1 = E^3$. Znajdziemy grupę symetrii $\vartheta_{\underset{\sim}{a}}$ tego wektora.

Zatem szukamy tensorów ortogonalnych $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ spełniających równanie $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}$, tzn. zachowujących wektor $\underset{\sim}{a}$. Tensorami tymi są wszystkie tensory obrotu $\underset{\sim}{R}^{\varphi}_{\underset{\sim}{k}}$ dla $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ i $\underset{\sim}{k} = \frac{\underset{\sim}{a}}{\|\underset{\sim}{a}\|}$ wokół osi wyznaczonej przez wektor $\underset{\sim}{a}$, wszystkie tensory lustrzanego odbicia $\underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{l}}$ dla $\underset{\sim}{l} \perp \underset{\sim}{k}$ względem płaszczyzny równoległej do wektora $\underset{\sim}{a}$ oraz wszystkie ich proste nasunięcia. Stąd wynika, że grupa symetrii $\vartheta_{\underset{\sim}{a}}$ jest generowana przez zbiór tensorów $\left\{\underset{\sim}{R}^{\varphi}_{\underset{\sim}{k}}, \underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{l}} \text{ dla } \underset{\sim}{k} = \frac{\underset{\sim}{a}}{\|\underset{\sim}{a}\|} \wedge \varphi \in \langle 0, 2\pi) \wedge \underset{\sim}{k}\underset{\sim}{l} = 0\right\}$. Łatwo udowodnić, że $\vartheta_{\underset{\sim}{a}} = \vartheta_{\underset{\sim}{k}}$ dla $\underset{\sim}{k} = \frac{\underset{\sim}{a}}{\|\underset{\sim}{a}\|}$.

P r z y k ł a d 8.2. Niech będą dane wektory liniowo niezależne $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in \mathcal{T}_1 = E^3$. Znajdziemy grupę symetrii $\vartheta_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}}$ tych wektorów.

Zatem szukamy tensorów ortogonalnych $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ spełniających równania $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b}$, tzn. zachowujących wektory $\underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{b}$. Tensorami tymi są tensor jednostkowy $\underset{\sim}{1}$ i tensor lustrzanego odbicia $\underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{n}}$ dla $\underset{\sim}{n} \perp \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$, względem płaszczyzny prostopadłej do wektorów $\underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{b}$. Stąd wynika, że $\vartheta_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}} = \left\{\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{n}} \text{ dla } \underset{\sim}{n}\underset{\sim}{a} = 0 \wedge \underset{\sim}{n}\underset{\sim}{b} = 0\right\}$. Łatwo zauważyć, że $\vartheta_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}} = \vartheta_{\underset{\sim}{k},\underset{\sim}{l}}$, przy czym wektory ortonormalne $\underset{\sim}{k}$ i $\underset{\sim}{l}$ rozpinają tę samą podprzestrzeń co wektory $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{b}$.

P r z y k ł a d 8.3. Niech będą dane wektory liniowo niezależne $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c} \in \mathcal{T}_1 = E^3$. Znajdziemy grupę symetrii $\vartheta_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c}}$ tych wektorów.

Zatem szukamy tensorów ortogonalnych $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ spełniających równania $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{c}$, tzn. zachowujących wektory $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}, \underset{\sim}{c}$. Takim tensorem jest tylko tensor jednostkowy $\underset{\sim}{1}$, a więc $\vartheta_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c}} = \{\underset{\sim}{1}\}$. Łatwo udowodnić, że $\vartheta_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c}} = \vartheta_{\underset{\sim}{k},\underset{\sim}{l},\underset{\sim}{n}}$, gdzie $\{\underset{\sim}{k}, \underset{\sim}{l}, \underset{\sim}{n}\}$ jest dowolną bazą ortonormalną przestrzeni E^3.

Z powyższych przykładów wynikają inkluzje $\vartheta_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{c}} \subset \vartheta_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}} \subset \vartheta_{\underset{\sim}{a}}$.

P r z y k ł a d 8.4. Niech będzie dany niezerowy wektor $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1 = E^3$ i tensor $\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$. Znajdziemy grupę symetrii $\vartheta_{\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{a}}$ tego tensora.

Zatem szukamy tensorów ortogonalnych $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ spełniających równanie $\underset{\sim}{Q} * (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{a}$, które jest równoważne równaniu $(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) \otimes (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) = \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{a}$, a stąd $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}$ lub $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} = -\underset{\sim}{a}$. Należy więc znaleźć tensory ortogonalne zachowujące kierunek wektora $\underset{\sim}{a}$. Tensorami tymi są wszystkie tensory obrotu $\underset{\sim}{R}^{\varphi}_{\underset{\sim}{k}}$ dla $\underset{\sim}{k} = \frac{\underset{\sim}{a}}{\|\underset{\sim}{a}\|}$ i $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ wokół osi równoległej do wektora $\underset{\sim}{a}$, wszystkie tensory lustrzanego odbicia $\underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{l}}$ dla $\underset{\sim}{l} \perp \underset{\sim}{a}$ względem płaszczyzn równoległych do wektora $\underset{\sim}{a}$, tensor lustrzanego odbicia $\underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{k}}$ względem płaszczyzny prostopadłej do wektora $\underset{\sim}{a}$ oraz ich wszystkie proste nasunięcia. Stąd wynika, że grupa $\vartheta_{\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{a}}$ jest generowana przez zbiór tensorów:

$$\left\{ \underset{\sim}{R}^{\varphi}_{\underset{\sim}{k}},\ \underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{l}},\ \underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{k}} \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{k} = \frac{\underset{\sim}{a}}{\|\underset{\sim}{a}\|} \wedge \varphi \in \langle 0, 2\pi) \wedge \underset{\sim}{l}\underset{\sim}{k} = 0 \right\}$$

Łatwo udowodnić, że $\vartheta_{\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{a}} = \vartheta_{\underset{\sim}{k} \otimes \underset{\sim}{k}}$ gdzie $\underset{\sim}{k} = \frac{\underset{\sim}{a}}{\|\underset{\sim}{a}\|}$. Oczywiste jest również, że $\vartheta_{\underset{\sim}{a}} \subset \vartheta_{\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{a}}$.

P r z y k ł a d 8.5. Niech będą dane wektory liniowo niezależne $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b} \in E^3$ i tensor $\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$. Znajdziemy grupę symetrii $\vartheta_{\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}}$ tego tensora.

Zatem szukamy tensorów ortogonalnych $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ spełniających równanie $\underset{\sim}{Q} * (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}$, które jest równoważne równaniu tensorowemu $(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a}) \otimes (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}$, a stąd wynika, że $(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{b})$ lub $(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a} = -\underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{b} = -\underset{\sim}{b})$. Tensorami spełniającymi ostatnie zależności są tensor jednostkowy $\underset{\sim}{1}$, tensor przeciwny do tensora jednostkowego $-\underset{\sim}{1}$, tensor lustrzanego odbicia $\underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{n}}$ dla $\underset{\sim}{n} \perp \underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$ względem płaszczyzny równoległej do wektorów $\underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{b}$ oraz tensor obrotu $\underset{\sim}{R}^{\pi}_{\underset{\sim}{n}}$ o kąt π względem osi prostopadłej do wektorów $\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}$. Stąd wynika, że grupa $\vartheta_{\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}}$ jest generowana przez zbiór tensorów $\{\underset{\sim}{1}, -\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{n}}, \underset{\sim}{R}^{\pi}_{\underset{\sim}{n}}$ dla $\underset{\sim}{n}\underset{\sim}{a} = 0 \wedge \underset{\sim}{n}\underset{\sim}{b} = 0\}$. Łatwo udowodnić, że $\vartheta_{\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}} = \vartheta_{\underset{\sim}{k} \otimes \underset{\sim}{l}}$, przy czym wektory ortonormalne $\underset{\sim}{k}$ i $\underset{\sim}{l}$ rozpinają tę samą podprzestrzeń co wektory $\underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{b}$.

Oczywiste jest również, że $\vartheta_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}} \subset \vartheta_{\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}}$.

P r z y k ł a d 8.6. Niech będzie dany tensor symetryczny $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$. Znajdziemy grupę symetrii $\vartheta_{\underset{\sim}{A}}$ tego tensora.

Zatem szukamy tensorów ortogonalnych $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ spełniających równanie $\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$. Z twierdzenia o rozkładzie widmowym dla tensora symetrycznego wynika, że istnieją liczby rzeczywiste $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R$ i baza ortonormalna $\{\underset{\sim}{k}, \underset{\sim}{l}, \underset{\sim}{n}\}$ przestrzeni E^3 takie, że tensor $\underset{\sim}{A}$ można przedstawić w postaci

$$\underset{\sim}{A} = \lambda_1 \underset{\sim}{k} \otimes \underset{\sim}{k} + \lambda_2 \underset{\sim}{l} \otimes \underset{\sim}{l} + \lambda_3 \underset{\sim}{n} \otimes \underset{\sim}{n}$$

1) jeśli wartości własne są różne $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$, to kierunki własne wyznaczone są jednoznacznie. Tensory ortogonalne należące do grupy symetrii tensora $\underset{\sim}{A}$ muszą zachowywać te kierunki, więc grupa symetrii $\vartheta_{\underset{\sim}{A}}$ jest generowana przez zbiór tensorów $\{\underset{\sim}{1}, -\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{k}}, \underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{l}}, \underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{n}}\}$.

2) jeśli dwie wartości własne są równe $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$, to jeden kierunek własny $\underset{\sim}{k}$ jest wyznaczony jednoznacznie. Tensory ortogonalne należące do grupy symetrii tensora $\underset{\sim}{A}$ muszą zachowywać ten kierunek, więc grupa symetrii $\vartheta_{\underset{\sim}{A}}$ jest generowana przez zbiór $\{\underset{\sim}{R}^{\varphi}_{\underset{\sim}{k}}, \underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{k}}, \underset{\sim}{I}_{\underset{\sim}{n}}$ dla $\varphi \in \langle 0, 2\pi) \wedge \underset{\sim}{k}\underset{\sim}{n} = 0\}$,

3) jeśli wszystkie wartości własne są równe $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, to żaden kierunek nie jest wyznaczony jednoznacznie. Stąd wynika, że $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} = \vartheta$.

Uwaga 8.1. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ i $\underset{\sim}{A} = \overset{s}{\underset{\sim}{A}} + \overset{a}{\underset{\sim}{A}}$, gdzie $\overset{s}{\underset{\sim}{A}}$ jest częścią symetryczną, a $\overset{a}{\underset{\sim}{A}}$ częścią antysymetryczną tensora $\underset{\sim}{A}$. Wtedy $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} = \vartheta_{\overset{s}{\underset{\sim}{A}}} \cap \vartheta_{\overset{a}{\underset{\sim}{A}}}$.

Uwaga 8.2. Niech $\mathcal{T}_p$ będzie przestrzenią, a $\sum_p$ grupą permutacji zbioru p elementowego. Wtedy dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ i dowolnej permutacji $\sigma \in \sum_p$ mamy $\vartheta_{\underset{\sim}{A}} = \vartheta_{\sigma \times \underset{\sim}{A}}$.

<u>Twierdzenie</u> 8.1. Niech będzie $\mathcal{T}_p$ przestrzenią tensorową, a $\hat{\vartheta}$ daną podgrupą grupy tensorów ortogonalnych ϑ. Wtedy zbiór $\mathcal{T}_{p,\hat{\vartheta}} := \{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p : \vartheta_{\underset{\sim}{A}} = \hat{\vartheta}\}$ tensorów o walencji p i grupie symetrii $\hat{\vartheta}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$.

Dowód. Niech $\underset{\sim}{Q} \in \hat{\vartheta}$. Wtedy dla dowolnych tensorów $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_{p,\hat{\vartheta}}$ i dowolnej liczby rzeczywistej $\alpha \in R$ mamy:

1) $\underset{\sim}{Q} * (\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}) = \underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}$, stąd $\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_{p,\hat{\vartheta}}$

2) $\underset{\sim}{Q} * (\alpha\underset{\sim}{A}) = \alpha(\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{A}) = \alpha\underset{\sim}{A}$, stąd $\alpha\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_{p,\hat{\vartheta}}$

Zatem z twierdzenia 1.2 wnioskujemy, że zbiór $\mathcal{T}_{p,\hat{\vartheta}}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathcal{T}_p$.

Uwaga 8.3. Jeśli mamy daną przestrzeń tensorową $\mathcal{T}_p$ i daną podgrupę $\hat{\vartheta}$ grupy tensorów ortogonalnych ϑ, to problem znalezienia podprzestrzeni liniowej $\mathcal{T}_{p,\hat{\vartheta}}$ sprowadza się do znalezienia wymiaru tej podprzestrzeni i podania bazy.

Uwaga 8.4. Jeśli ϑ jest grupą tensorów ortogonalnych, to wymiar podprzestrzeni izotropowych $\mathcal{T}_{p,\vartheta}$ odczytujemy z tabelki

p	0	2	4	6	8
dim $\mathcal{T}_{p,\vartheta}$	1	1	3	15	91

Jeśli $\mathcal{R}$ jest właściwą grupą tensorów ortogonalnych, to wymiar podprzestrzeni tensorów hemitropowych $\mathcal{T}_{p,\mathcal{R}}$ odczytujemy z tabelki

p	1	3	5	7	9
dim $\mathcal{T}_{p,\mathcal{R}}$	0	1	6	36	232

P r z y k ł a d 8.7. Niech $\mathcal{T}_2$ będzie przestrzenią tensorową o walencji dwa, a ϑ - grupą tensorów ortogonalnych. Znajdziemy podprzestrzeń tensorów izotropowych $\mathcal{T}_{2,\vartheta}$.

Z uwagi 8.4 wynika, że $\dim \mathcal{T}_{2,\vartheta} = 1$, a więc baza tej podprzestrzeni składa się z jednego tensora. Tensor jednostkowy jest izotropowy, ponieważ dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{Q} \in \vartheta$ mamy $\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{1}\,\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{1}$. Stąd wynika, że tensor $\underset{\sim}{1}$ stanowi bazę w podprzestrzeni $\mathcal{T}_{2,\vartheta}$. Zatem $\mathcal{T}_{2,\vartheta} = \{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 : \underset{\sim}{A} = \alpha\underset{\sim}{1}$ dla $\alpha \in R\}$.

P r z y k ł a d 8.8. Niech $\mathcal{T}_3$ będzie przestrzenią tensorową o walencji trzy nad przestrzenią euklidesową E^3 o orientacji wyznaczonej przez bazę ortonormalną $\{\underset{\sim}{i}_i\}$, $\mathcal{R}$ - właściwą grupą tensorów ortogonalnych. Znajdziemy podprzestrzeń tensorów hemitropowych $\mathcal{T}_{3,\mathcal{R}}$.

Z uwagi 8.4 wynika, że $\dim \mathcal{T}_{3,\mathcal{R}} = 1$, a więc baza tej podprzestrzeni składa się z jednego tensora. Tensor Ricciego

$$\underset{\sim}{E} = \varepsilon^{ijk} \underset{\sim}{i}_i \otimes \underset{\sim}{i}_j \otimes \underset{\sim}{i}_k$$

gdzie: $\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = j \times j = k \times i = k \\ 1 & \text{dla parzystej permutacji liczb } (i,j,k) \\ -1 & \text{dla nieparzystej permutacji liczb } (i,j,k) \end{cases}$

jest hemitropowy, ponieważ dla dowolnego tensora obrotu $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{R}$ mamy

$$\underset{\sim}{Q} * \underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{Q} * (\varepsilon^{ijk} \underset{\sim}{i}_i \otimes \underset{\sim}{i}_j \otimes \underset{\sim}{i}_k) = \varepsilon^{ijk} (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{i}_i) \otimes (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{i}_j) \otimes (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{i}_k) = \underset{\sim}{E}$$

a $\{\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{i}_i\}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni E^3 o orientacji zgodnej z bazą $\{\underset{\sim}{i}_i\}$. Stąd wynika, że tensor $\underset{\sim}{E}$ stanowi bazę w podprzestrzeni $\mathcal{T}_{3,\mathcal{R}}$. Zatem

$$\mathcal{T}_{3,\mathcal{R}} = \{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_3 : \underset{\sim}{A} = \alpha \underset{\sim}{E} \quad \text{dla } \alpha \in R\}$$

P r z y k ł a d 8.9. Niech $\mathcal{T}_4$ będzie przestrzenią tensorową o walencji cztery, ϑ - grupą tensorów ortogonalnych. Znajdziemy podprzestrzeń $\mathcal{T}_{4,\vartheta}$ tensorów ortogonalnych.

Z uwagi 8.4 wynika, że $\dim \mathcal{T}_{4,\vartheta} = 3$, a więc baza tej podprzestrzeni składa się z trzech tensorów. Łatwo udowodnić, że tensory $\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}$, $\mu * (\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1})$, $\nu * (\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1})$, gdzie $\mu = (1,3,2,4)$, $\nu = (1,4,3,2)$ permutacje z grupy $\sum_4$, są izotropowe i tworzą zbiór liniowo niezależny, a więc stanowią bazę podprzestrzeni $\mathcal{T}_{4,\vartheta}$. Zatem

$$\mathcal{T}_{4,\vartheta} = \{\underset{\sim}{L} \in \mathcal{T}_4 : \underset{\sim}{L} = \alpha \underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1} + \beta \mu * (\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}) + \gamma \nu * (\underset{\sim}{1} \otimes \underset{\sim}{1}) \quad \text{dla } \alpha, \beta, \gamma \in R\}$$

P r z y k ł a d 8.10. Niech $\mathcal{T}_{2p}$ będzie przestrzenią tensorową o walencji parzystej 2p, ϑ - grupą tensorów ortogonalnych.

Można wykazać, że bazę podprzestrzeni tensorów izotropowych $\mathcal{T}_{2p,\vartheta}$ stanowi każdy liniowo niezależny układ zawierający $\dim \mathcal{T}_{2p,\vartheta}$ tensorów spośród tensorów o postaci

$$\sigma * (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1}) (\text{p-razy}) \quad \text{dla} \quad \sigma \in \Sigma_{2p}$$

Niech $\mathcal{T}_{2p+1}$ będzie przestrzenią tensorową o walencji nieparzystej 2p+1, a $\mathcal{R}$ właściwą grupą tensorów ortogonalnych.

Można wykazać, że bazę podprzestrzeni tensorów hemitropowych $\mathcal{T}_{2p+1,\mathcal{R}}$ stanowi każdy liniowo niezależny układ tensorów zawierający $\dim \mathcal{T}_{2p+1,\mathcal{R}}$ tensorów spośród tensorów o postaci

$$\sigma * (\mathbf{E} \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1}) \ (\text{p-razy}) \quad \text{dla} \quad \sigma \in \Sigma_{2p+1}$$

P r z y k ł a d 8.11. Niech $\mathcal{T}_4 = E^3 \otimes E^3 \otimes E^3 \otimes E^4$, $\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}$ będzie grupą symetrii tensora $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \in \mathcal{T}_2$, przy czym wektor $\mathbf{a} \in E^3$ (przykład 8.4). Znajdziemy podprzestrzeń $\mathcal{T}_{4,\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}}$ izotropową poprzecznie.

Tensor $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_4$ taki, że dla każdego tensora ortogonalnego $\mathbf{Q} \in \vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}$ spełnia równanie $\mathbf{Q} * \mathbf{A} = \mathbf{A}$, należy do podprzestrzeni $\mathcal{T}_{4,\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}}$. Bazę tej podprzestrzeni budujemy w oparciu o tensory $\mathbf{1}$, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \in \mathcal{T}_2$. Dowodzi się, że zbiór tensorów o postaci $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, $\mu * (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$, $\nu * (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$, $\mathbf{1} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{1}$, $\sigma_1 * (\mathbf{a} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{a})$, $\sigma_2 * (\mathbf{a} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{a})$, $\sigma_3 * (\mathbf{a} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{a})$, $\sigma_4 * (\mathbf{a} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{a})$, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$, gdzie $\mu = (1,3,2,4)$, $\nu = (1,4,3,2)$, $\sigma_1 = (1,2,3,4)$, $\sigma_2 = (2,1,3,4)$, $\sigma_3 = (1,2,4,3)$, $\sigma_4 = (3,4,1,2)$ są permutacjami grupy Σ_4, stanowi bazę przestrzeni $\mathcal{T}_{4,\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}}$. Stąd $\dim \mathcal{T}_{4,\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}} = 10$. Łatwo zauważyć, że tensory podprzestrzeni $\mathcal{T}_{4,\vartheta_{\mathbf{a}\otimes\mathbf{a}}}$ nie zmieniają się pod wpływem obrotów i odbić zachowujących kierunek wektora $\mathbf{a}$.