2. ODWZOROWANIA LINIOWE I WIELOLINIOWE

2.1. Definicja i własności odwzorowania liniowego i wieloliniowego

Definicja 2.1. Niech V i V' będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Odwzorowanie $f : V \to V'$ nazywamy liniowym, jeśli spełnione są aksjomaty:

1) $\bigwedge_{a,b \in V} f(a + b) = f(a) + f(b)$

2) $\bigwedge_{\alpha \in K} \bigwedge_{a \in V} f(\alpha a) = \alpha f(a)$

Jeśli ponadto odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne, to nazywamy je izomorfizmem.

W przypadku gdy V' = K, odwzorowanie liniowe nazywamy formą liniową.

Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych z przestrzeni liniowej V w przestrzeń liniową V' oznaczamy przez L (V; V'), a zbiór wszystkich izomorfizmów przez I (V; V').

Bezpośrednio z definicji wynika, że odwzorowanie liniowe przekształca wektor zerowy na wektor zerowy, a wektor przeciwny do danego wektora na wektor przeciwny do obrazu tego wektora.

P r z y k ł a d 2.1. Niech R^2 będzie przestrzenią liniową ciągów 2-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych, a $R_2[x]$ przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej drugiego nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykażemy, że odwzorowanie $f: R^2 \to R_2[x]$ określone następująco:

$$\bigwedge_{[\alpha_1 \alpha_2] \in R^2} f([\alpha_1, \alpha_2]) := (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)x - (2\alpha_1 - 3\alpha_2)x^2$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Sprawdzamy aksjomaty definicji odwzorowania liniowego:

1) dla dowolnych wektorów $a, b \in R^2$ mamy

$$f(a + b) = f([\alpha_1,\alpha_2] + [\beta_1,\beta_2]) = f([\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2]) =$$

$$= ((\alpha_1+\beta_1) - (\alpha_2+\beta_2)) + ((\alpha_1+\beta_1) + (\alpha_2+\beta_2))x +$$

$$- (2(\alpha_1+\beta_1) - 3(\alpha_2+\beta_2))x^2 = ((\alpha_1-\alpha_2) + (\alpha_1+\alpha_2)x +$$

$$- (2\alpha_1-3\alpha_2)x^2) + ((\beta_1-\beta_2) + (\beta_1+\beta_2)x - (2\beta_1-3\beta_2)x^2) =$$

$$= f([\alpha_1,\alpha_2]) + f([\beta_1,\beta_2]) = f(a) + f(b)$$

2) dla dowolnej liczby $\beta\in R$ i dowolnego wektora $a\in R^2$ mamy

$$f(\beta a) = f(\beta[\alpha_1,\alpha_2]) = f([\beta\alpha_1,\beta\alpha_2]) = (\beta\alpha_1-\beta\alpha_2) +$$

$$+ (\beta\alpha_1+\beta\alpha_2)x - (2\beta\alpha_1-3\beta\alpha_2)x^2 = \beta((\alpha_1-\alpha_2) +$$

$$+ (\alpha_1+\alpha_2)x - (2\alpha_1-3\alpha_2)x^2) = \beta f([\alpha_1,\alpha_2]) = \beta f(a)$$

Aksjomaty definicji 2.1 są spełnione, a więc odwzorowanie f jest liniowe.

Twierdzenie 2.1. Niech U, V i W będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Jeśli $f : U \to V$ i $g : V \to W$ są odwzorowaniami liniowymi (izomorfizmami), to odwzorowanie złożone $g \circ f : U \to W$ jest odwzorowaniem liniowym (izomorfizmem).

Dowód. Sprawdzamy aksjomaty definicji odwzorowania liniowego:

1) dla dowolnych wektorów $a, b \in U$ mamy

$$(g\circ f)(a + b) = g(f(a + b)) = g(f(a) + f(b)) = g(f(a)) + g(f(b)) =$$

$$= (g\circ f)(a) + (g\circ f)(b)$$

2) dla dowolnego skalara $\alpha\in K$ i dowolnego wektora $a\in U$ mamy

$$(g\circ f)(\alpha a) = g(\alpha f(a)) = \alpha g(f(a)) = \alpha(g\circ f)(a)$$

Aksjomaty definicji 2.1 są spełnione, a więc odwzorowanie $g\circ f$ jest liniowe.

Twierdzenie 2.2. Niech V i V' będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Jeśli odwzorowanie $f : V \to V'$ jest izomorfizmem, to odwzorowanie odwrotne $f^{-1} : V' \to V$ jest również izomorfizmem.

Dowód. Z definicji izomorfizmu wnioskujemy, że odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne, a więc istnieje do niego odwzorowanie odwrotne f^{-1}, które jest również wzajemnie jednoznaczne. Zatem dla dowolnych wektorów $a', b' \in V'$ istnieją jednoznacznie wyznaczone wektory $a, b \in V$ takie, że $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ lub $f^{-1}(a') = a$, $f^{-1}(b') = b$ i mamy:

$$1)\ f^{-1}(a'+b') = f^{-1}(f(a) + f(b)) = f^{-1}(f(a+b)) =$$
$$= (f^{-1} \circ f)(a+b) = id(a+b) =$$
$$= a + b = f^{-1}(a') + f^{-1}(b')$$

oraz dla dowolnego skalara $\alpha \in K$ mamy

$$2)\ f^{-1}(\alpha a') = f^{-1}(\alpha f(a)) = f^{-1}(f(\alpha a)) = (f^{-1} \circ f)(\alpha a) = id(\alpha a) =$$
$$= \alpha a = \alpha f^{-1}(a')$$

Z definicji 2.1 wnioskujemy, że odwzorowanie f^{-1} jest izomorfizmem.

Z powyższego twierdzenia wynika, że poprawne jest następujące określenie: Przestrzenie liniowe V i V' nad ciałem K nazywamy izomorficznymi, jeśli istnieje odwzorowanie $f : V \to V'$, które jest izomorfizmem.

Przestrzenie liniowe izomorficzne są ze względu na własności algebraiczne nierozróżnialne i można je utożsamiać. Jeśli więc przestrzenie liniowe V i V' są izomorficzne, to piszemy, że $V \approx V'$.

P r z y k ł a d 2.2. Łatwo wykazać, że:

a) zbiór wszystkich odwzorowań liniowych $L(U; V)$ z przestrzeni liniowej U w przestrzeń liniową V z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowań przez skalary jest przestrzenią liniową;

b) zbiór wszystkich odwzorowań liniowych $L(V; V)$ z przestrzeni liniowej V w tę samą przestrzeń z działaniami dodawania odwzorowań i składania odwzorowań jest pierścieniem nieprzemiennym z jedynką; jedynką tego pierścienia jest odwzorowanie identycznościowe;

c) zbiór wszystkich izomorfizmów $I(V; V)$ z przestrzeni liniowej V w tę samą przestrzeń z działaniem składania odwzorowań jest grupą nieprzemienną.

Twierdzenie 2.3. Niech U^n i V będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K oraz $\{e_1,\dots,e_n\}$ będzie bazą n-wymiarowej przestrzeni U^n, a $\{d_1,\dots,d_n\}$ zbiorem wektorów przestrzeni V. Wtedy istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $f : U^n \to V$ spełniające warunki: $f(e_1) = d_1,\dots,f(e_n) = d_n$.

Dowód. I s t n i e n i e . Odwzorowanie $f : U^n \to V$ określone następująco:

$$\bigwedge_{a \in U^n} f(a) = f(\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n) := \alpha^1 d_1 + \dots + \alpha^n d_n,$$

gdzie $\alpha^i \in K$ dla $i = 1,\dots,n$ są współrzędnymi wektora a w bazie $\{e_i\}$, spełnia warunki $f(e_1) = d_1,\dots,f(e_n) = d_n$.

Wystarczy wykazać, że odwzorowanie f jest liniowe. Sprawdzamy aksjomaty definicji odwzorowania liniowego:

1) dla dowolnych wektorów $a,b \in U$ mamy

$$f(a + b) = f((\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n) + (\beta^1 e_1 + \dots + \beta^n e_n)) =$$

$$= f((\alpha^1 + \beta^1)e_1 + \dots + (\alpha^n + \beta^n)e_n) =$$

$$= (\alpha^1 + \beta^1)d_1 + \dots + (\alpha^n + \beta^n)d_n = (\alpha^1 d_1 + \dots + \alpha^n d_n) +$$

$$+ (\beta^1 d_1 + \dots + \beta^n d_n) = f(\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n) +$$

$$+ f(\beta^1 e_1 + \dots + \beta^n e_n) = f(a) + f(b)$$

2) dla dowolnego skalara $\gamma \in K$ i dowolnego wektora $a \in U^n$ mamy

$$f(\gamma a) = f(\gamma(\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n)) = f(\gamma\alpha^1 e_1 + \dots + \gamma\alpha^n e_n) =$$

$$= \gamma\alpha^1 d_1 + \dots + \gamma\alpha^n d_n = \gamma(\alpha^1 d_1 + \dots + \alpha^n d_n) =$$

$$= \gamma f(\alpha^1 e_1 + \dots + \alpha^n e_n) = \gamma f(a)$$

Aksjomaty definicji 2.1 są spełnione, a więc odwzorowanie jest liniowe.

J e d n o z n a c z n o ś ć . Każde odwzorowanie liniowe $\hat{f} : U^n \to V$ spełniające warunki $\hat{f}(e_1) = d_1, \ldots, \hat{f}(e_n) = d_n$ musi także spełniać warunek $\hat{f}(a) = \hat{f}(\alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^n e_n) = \alpha^1 \hat{f}(e_1) + \ldots + \alpha^n \hat{f}(e_n) = \alpha^1 d_1 + \ldots + \alpha^n d_n$, a więc pokrywa się z odwzorowaniem f.

Z powyższego twierdzenia wynika, że odwzorowanie liniowe jest określone, jeśli dane są wartości tego odwzorowania na wektorach bazy.

P r z y k ł a d 2.3. Niech w przestrzeni liniowej ciągów 2-wyrazowych R^2 będzie dana baza $\{e_i\}$ taka, że $e_1 = [1,-1]$, $e_2 = [1,1]$, a w przestrzeni liniowej wielomianów stopnia co najwyżej drugiego $R_2[x]$ będzie dany zbiór $\{d_1, d_2\}$ taki, że $d_1 = 1 - x + x^2$, $d_2 = 1 - x^2$. Znajdziemy odwzorowanie liniowe $g : R^2 \to R_2[x]$ spełniające warunki $g(e_1) = d_1$ i $g(e_2) = d_2$.

Dla dowolnego wektora $a = [t,s] \in R^2$ rozpatrzmy równanie

$$[t,s] = \alpha^1 [1,-1] + \alpha^2 [1,1]$$

Stąd otrzymamy liczby $\alpha^1 = \frac{1}{2}(t - s)$ i $\alpha^2 = \frac{1}{2}(t + s)$, które są współrzędnymi wektora a w bazie $\{e_i\}$. Szukane odwzorowanie ma zatem postać

$$g([t,s]) = \frac{1}{2}(t - s)(1 - x + x^2) + \frac{1}{2}(t + s)(1 - x^2)$$

$$g([t,s]) = t - \frac{1}{2}(t - s)x - sx^2 \quad \text{dla} \quad [t,s] \in R^2$$

Twierdzenie 2.4. Przestrzenie liniowe U i V nad ciałem K skończenie wymiarowe są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim U = \dim V$.

Dowód $\Longrightarrow$ Niech $\dim U = n$ i $f : U \to V$ będzie odwzorowaniem izomorficznym. Wtedy istnieje baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ przestrzeni U złożona z n wektorów. Wykażemy, że zbiór $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ jest bazą przestrzeni V. Sprawdzamy aksjomaty definicji bazy:

1) rozważmy równanie

$$\alpha^1 f(e_1) + \ldots + \alpha^n f(e_n) = 0, \quad \text{gdzie } \alpha^i \in K \text{ dla } i = 1,\ldots,n$$

Z liniowości i wzajemnej jednoznaczności odwzorowania f kolejno otrzymamy

$$f(\alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^n e_n) = 0$$

$$\alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^n e_n = 0$$

Ponieważ baza $\{e_1,\ldots,e_n\}$ jest zbiorem liniowo niezależnym, stąd $\alpha^1 = \ldots = \alpha^n = 0$. Zatem zbiór $\{f(e_1),\ldots,f(e_n)\}$ jest liniowo niezależny.

2) dla dowolnego wektora $b \in V$ z jednoznaczności odwzorowania f wynika, że istnieje dokładnie jeden wektor $a \in U$ taki, że $b = f(a)$. Rozkładając wektor a w bazie $\{e_i\}$ i korzystając z liniowości odwzorowania f kolejno otrzymamy

$$b = f(a) = f(\alpha^1 e_1 + \ldots + \alpha^n e_n)$$

$$b = \alpha^1 f(e_1) + \ldots + \alpha^n f(e_n)$$

Zatem zbiór $\{f(e_1),\ldots,f(e_n)\}$ generuje przestrzeń V.

Aksjomaty definicji 2.1 są spełnione, a więc zbiór $\{f(e_i)\}$ jest bazą przestrzeni V. Baza ta zawiera n elementów, stąd dim V = dim U.

$\Longleftarrow$ Niech dim U = dim V = n. Wtedy istnieją bazy $\{e_i\}$ przestrzeni U i $\{d_\alpha\}$ przestrzeni V złożone z n wektorów. Z twierdzenia 2.3 wynika, że istnieje odwzorowanie liniowe $f : U \longrightarrow V$ spełniające warunki

$$f(e_1) = d_1,\ldots,f(e_n) = d_n$$

Łatwo wykazać, że odwzorowanie f jest wzajemnie jednoznaczne, a więc jest izomorficzne. Zatem przestrzenie U i V są izomorficzne.

<u>Wniosek</u> 2.1. Przestrzeń liniowa n-wymiarowa V^n nad ciałem K jest izomorficzna z przestrzenią liniową ciągów n-wyrazowych K^n.

Definicja 2.2. Niech $U_1,\dots,U_k$ i V będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Odwzorowanie $f : U_1 x\dots x U_k \to V$ nazywamy k-liniowym, jeśli spełnia aksjomaty:

1) $\bigwedge_{1\le i\le k} \bigwedge_{a_1\in U_1} \dots \bigwedge_{a_i, a_i'\in U_i} \dots \bigwedge_{a_k\in U_k} f(a_1,\dots,a_i+a_i',\dots,a_k) =$

$= f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_k) + f(a_1,\dots,a_i',\dots,a_k)$

2) $\bigwedge_{1\le i\le k} \bigwedge_{\alpha\in K} \bigwedge_{a_1\in U_1} \dots \bigwedge_{a_i\in U_i} \dots \bigwedge_{a_k\in U_k} f(a_1,\dots,\alpha a_i,\dots,a_k) =$

$= \alpha f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_k)$

W przypadku gdy $V = K$, odwzorowanie k-liniowe nazywamy formą k-liniową.

Z definicji wynika, że odwzorowanie k-liniowe jest liniowe ze względu na każdą współrzędną. W przypadku $k = 1$ odwzorowanie 1-liniowe jest odwzorowaniem liniowym.

Zbiór wszystkich odwzorowań k-liniowych z przestrzeni liniowych $U_1,\dots,U_k$ w przestrzeń liniową V oznaczamy przez $L(U_1,\dots,U_k; V)$. Jeśli $U_1 = \dots = U_k = U$, to zbiór $L(U,\dots,U;V)$ oznaczamy krótko przez $L_k(U;V)$. Łatwo wykazać, że zbiór wszystkich odwzorowań wieloliniowych z działaniami dodawania odwzorowań i mnożenia odwzorowania przez skalar jest przestrzenią liniową.

P r z y k ł a d 2.4. Niech R^2 będzie przestrzenią liniową ciągów 2-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych, a $R_1[x]$ i $R_2[x]$ będą przestrzeniami liniowymi wielomianów stopnia co najwyżej pierwszego i drugiego nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykażemy, że odwzorowanie $g : R^2 x\, R_1[x] \to R_2[x]$ określone następująco:

$$\bigwedge_{[\alpha_1,\alpha_2]\in R^2} \bigwedge_{\gamma_0+\gamma_1 x\in R_1[x]} g([\alpha_1,\alpha_2], \gamma_0+\gamma_1 x) :=$$

$$:= \alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_0 x + \alpha_2\gamma_1 x^2$$

jest odwzorowaniem dwuliniowym.

Sprawdzamy aksjomaty definicji odwzorowania dwuliniowego:

1) dla dowolnych ciągów $[\alpha_1,\alpha_2]$, $[\beta_1,\beta_2] \in R^2$ i dowolnych wielomianów $\gamma_0+\gamma_1 x$, $\delta_0+\delta_1 x \in R_1[x]$ mamy

$$g([\alpha_1,\alpha_2] + [\beta_1,\beta_2], \gamma_0+\gamma_1 x) = g([\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2], \gamma_0+\gamma_1 x) =$$

$$= (\alpha_1+\beta_1)\gamma_0 + (\alpha_2+\beta_2)\gamma_0 x + (\alpha_2+\beta_2)\gamma_1 x^2 =$$

$$= (\alpha_1\gamma_0+\alpha_2\gamma_0 x + \alpha_2\gamma_1 x^2) + (\beta_1\gamma_0+\beta_2\gamma_0 x+\beta_2\gamma_1 x^2) =$$

$$= g([\alpha_1,\alpha_2], \gamma_0+\gamma_1 x) + g([\beta_1,\beta_2], \gamma_0+\gamma_1 x)$$

$$g([\alpha_1,\alpha_2], (\gamma_0+\gamma_1 x)+(\delta_0+\delta_1 x)) = g([\alpha_1,\alpha_2], (\gamma_0+\delta_0)+(\gamma_1+\delta_1)x) =$$

$$= \alpha_1(\gamma_0+\delta_0) + \alpha_2(\gamma_0+\delta_0)x + \alpha_2(\gamma_1+\delta_1)x^2 =$$

$$= (\alpha_1\gamma_0+\alpha_2\gamma_0 x + \alpha_2\gamma_1 x^2) + (\alpha_1\delta_0+\alpha_2\delta_0 x + \alpha_2\delta_1 x^2) =$$

$$= g([\alpha_1,\alpha_2], \gamma_0+\gamma_1 x) + g([\alpha_1,\alpha_2], \delta_0+\delta_1 x)$$

2) dla dowolnej liczby $\eta \in R$, dowolnego ciągu $[\alpha_1,\alpha_2] \in R^2$ i dowolnego wielomianu $\gamma_0 + \gamma_1 x \in R_1[x]$ mamy

$$g(\eta[\alpha_1,\alpha_2], \gamma_0+\gamma_1 x) = g([\eta\alpha_1, \eta\alpha_2], \gamma_0+\gamma_1 x) =$$

$$= \eta\alpha_1\gamma_0 + \eta\alpha_2\gamma_0 x + \eta\alpha_2\gamma_1 x^2 = \eta(\alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_0 x + \alpha_2\gamma_1 x^2) =$$

$$= \eta g([\alpha_1,\alpha_2], \gamma_0+\gamma_1 x)$$

$$g([\alpha_1,\alpha_2], \eta(\gamma_0+\gamma_1 x)) = g([\alpha_1,\alpha_2], \eta\gamma_0+\eta\gamma_1 x) =$$

$$= \alpha_1\eta\gamma_0 + \alpha_2\eta\gamma_0 x + \alpha_2\eta\gamma_1 x^2 = \eta(\alpha_1\gamma_0 + \alpha_2\gamma_0 x + \alpha_2\gamma_1 x^2) =$$

$$= \eta g([\alpha_1,\alpha_2], \gamma_0+\gamma_1 x)$$

Aksjomaty definicji 2.2 są spełnione, a więc odwzorowanie g jest dwuliniowe.

<u>Twierdzenie</u> 2.5. Niech U^m i V^n będą przestrzeniami liniowymi o wymiarach m i n nad ciałem K, a W będzie dowolną przestrzenią liniową nad ciałem K. Jeśli $\{e_i\}$ jest bazą przestrzeni U^m, a $\{l_A\}$ bazą przestrzeni V^n i $\{d_{iA} \in W : i = 1,\dots,m;\ A = 1,\dots,n\}$ jest zbiorem m n wektorów przestrzeni W, to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie dwuliniowe $f : U^m \times V^n \to W$ spełniające warunki $f(e_i, l_A) = d_{iA}$ dla $i = 1,\dots,m;\ A=1,\dots,n$.

Twierdzenie to jest uogólnieniem twierdzenia 2.3 dla odwzorowania liniowego na odwzorowanie dwuliniowe i można je uogólnić na odwzorowanie wieloloniowe. Wynika z niego, że odwzorowanie wieloliniowe jest określone, jeśli dane są wartości tego odwzorowania na wektorach bazy.

<u>Definicja</u> 2.3. Niech U i V będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Odwzorowanie k-liniowe $f : U \times \dots \times U \to V$ nazywamy odwzorowaniem:

a) symetrycznym, jeśli

$$\bigwedge_{\sigma \in \Sigma_k} \ \bigwedge_{a_1,\dots,a_k \in U} f(a_1,\dots,a_k) = f(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(k)})$$

b) antysymetrycznym, jeśli

$$\bigwedge_{\sigma \in \Sigma_k} \ \bigwedge_{a_1,\dots,a_k \in U} f(a_1,\dots,a_k) = \operatorname{sgn}\sigma \ f(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(k)})$$

gdzie Σ_k jest grupą permutacji zbioru k-elementowego, a $\operatorname{sgn}\sigma$ znakiem permutacji $\sigma \in \Sigma_k$.

Można wykazać, że zbiory odwzorowań k-liniowych symetrycznych $L_k^s(U;V)$ i antysymetrycznych $L_k^a(U;V)$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $L_k(U;V)$.

<u>Definicja</u> 2.4. Niech U będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych R. Odwzorowanie (forma) k-liniowe $f : U \times \dots \times U \to R$ nazywamy

a) dodatnio (nieujemnie) określonym, jeśli

$$\bigwedge_{0 \neq a \in U} f(a,\dots,a) > 0 \qquad (\geqslant 0)$$

b) ujemnie (niedodatnio) określonym, jeśli

$$\bigwedge_{0 \neq a \in U} f(a,\dots,a) < 0 \quad (\leqslant 0)$$

Odwzorowanie, które nie jest ani nieujemnie ani niedodatnio określone nazywamy nieokreślonym.

P r z y k ł a d 2.5. Niech $R_1[x]$ będzie przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej pierwszego nad ciałem liczb rzeczywistych. Odwzorowanie (forma) $f : R_1[x] \times R_1[x] \longrightarrow R$ określone następująco:

$$\bigwedge_{w_\alpha, w_\beta \in R_1[x]} f(w_\alpha, w_\beta) = f(\alpha_0 + \alpha_1 x,\ \beta_0 + \beta_1 x) :=$$

$$:= \alpha_0\beta_0 + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_1\beta_1$$

jak łatwo zauważyć, jest odwzorowaniem dwuliniowym symetrycznym.

Ponieważ dla dowolnego wielomianu $0 \neq w_\alpha \in R_1[x]$ mamy

$$f(w_\alpha, w_\alpha) = f(\alpha_0 + \alpha_1 x,\ \alpha_0 + \alpha_1 x) = \alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1^2 = (\alpha_0 + \alpha_1)^2 \geqslant 0,$$

a więc odwzorowanie to jest nieujemnie określone.

2.2. Reprezentacja macierzowa odwzorowania liniowego i wieloliniowego oraz jej własności

Niech U^m i V^n będą przestrzeniami liniowymi o wymiarach m i n nad ciałem K oraz $\{e_i\}$ będzie bazą przestrzeni U^m, a $\{d_\gamma\}$ bazą przestrzeni V^n. Jeśli $f : U^m \longrightarrow V^n$ jest odwzorowaniem liniowym, to wektory $f(e_i)$ dla $i = 1,2,\dots,m$ należące do przestrzeni V^n można jednoznacznie przedstawić jako kombinacje liniowe wektorów bazy $\{d_\gamma\}$, a więc