ALGEBRA TENSOROWA W PRZESTRZENIACH EUKLIDESOWYCH

5. ILOCZYN TENSOROWY PRZESTRZENI EUKLIDESOWYCH

5.1. Definicja i własności iloczynu tensorowego przestrzeni Reprezentacja macierzowa tensora i wzory transformacyjne

Definicja 5.1. Iloczynem tensorowym przestrzeni euklidesowych E^n i E^m nazywamy parę: przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych R generowaną przez zbiór wszystkich elementów postaci $\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}$ dla $\underset{\sim}{a} \in E^n$ i $\underset{\sim}{b} \in E^m$, którą oznaczamy przez $E^n \otimes E^m$ i odwzorowanie $\otimes : E^n \times E^m \to E^n \otimes E^m$ spełniające aksjomaty:

1) $\bigwedge\limits_{\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{c} \in E^n} \bigwedge\limits_{\underset{\sim}{b} \in E^n} (\underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{c}) \otimes \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{c} \otimes \underset{\sim}{b}$

2) $\bigwedge\limits_{\underset{\sim}{a} \in E^n} \bigwedge\limits_{\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{d} \in E^m} \underset{\sim}{a} \otimes (\underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{d}) = \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{d}$

3) $\bigwedge\limits_{\alpha \in R} \bigwedge\limits_{\underset{\sim}{a} \in E^n} \bigwedge\limits_{\underset{\sim}{b} \in E^m} (\alpha \underset{\sim}{a}) \otimes \underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a} \otimes (\alpha \underset{\sim}{b}) = \alpha (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b})$

Elementy przestrzeni liniowej $E^n \otimes E^m$ nazywamy tensorami i oznaczamy przez $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{C}$ itp. Odwzorowanie dwuliniowe $\otimes$ nazywamy iloczynem tensorowym. Tensor o postaci $\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} \in E^n \otimes E^m$ nazywamy iloczynem tensorowym wektorów $\underset{\sim}{a} \in E^n$ i $\underset{\sim}{b} \in E^m$.

Definicję iloczynu tensorowego dwu przestrzeni euklidesowych łatwo uogólnić na iloczyn tensorowy skończonej liczby przestrzeni euklidesowych. Można również przestrzenie euklidesowe zastąpić dowolnymi przestrzeniami liniowymi.

Z definicji przestrzeni liniowej $E^n \otimes E^m$ wynika, że dowolny tensor $\underset{\sim}{A} \in E^n \otimes E^m$ można przedstawić w postaci skończonej kombinacji liniowej elementów $\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}$, gdzie $\underset{\sim}{a} \in E^n$ i $\underset{\sim}{b} \in E^m$, więc

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \in E^n \times E^m} \alpha_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})} \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}$$

przy czym tylko skończona liczba współczynników $\alpha_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})}$ tej kombinacji jest różna od zera.

Działania wewnętrzne dodawania tensorów i zewnętrzne mnożenie tensorów przez liczby rzeczywiste określone są następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \in E^n \otimes E^m} \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \sum_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \in E^n \times E^m} \alpha_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})} \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} + \sum_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \in E^n \times E^m} \beta_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})} \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} :=$$

$$:= \sum_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \in E^n \times E^m} \left(\alpha_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})} + \beta_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})}\right) \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}$$

$$\bigwedge_{\gamma \in R} \bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in E^n \otimes E^m} \gamma \underset{\sim}{A} = \gamma \Big(\sum_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \in E^n \times E^m} \alpha_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})} \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} \Big) := \sum_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \in E^n \times E^m} (\gamma \alpha_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})}) \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}$$

Łatwo zauważyć, że zbiór $E^n \otimes E^m$ z powyższymi działaniami jest przestrzenią liniową nad ciałem R.

<u>Twierdzenie</u> 5.1. Jeśli $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ jest bazą przestrzeni euklidesowej E^n, a $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ bazą przestrzeni euklidesowej E^m, to zbiór tensorów $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$ jest bazą w iloczynie tensorowym $E^n \otimes E^m$.

Dowód. Sprawdzamy aksjomaty definicji bazy:

1) dowód faktu, że zbiór tensorów $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$ jest liniowo niezależny, pomijamy,

2) dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in E^n \otimes E^m$ z własności iloczynu tensorowego wektorów otrzymamy

$$\underset{\sim}{A} = \sum_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \in E^n \times E^m} \alpha_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})} \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} = \sum_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \in E^n \times E^m} \alpha_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})} (a^i \underset{\sim}{e}_i) \otimes (b^\alpha \underset{\sim}{d}_\alpha) =$$

$$= \sum_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) \in E^n \times E^n} \alpha_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})} a^i b^\alpha \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha$$

gdzie a^i dla $i = 1,\ldots,n$ są współrzędnymi wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, a b^α dla $\alpha = 1,\ldots,m$ są współrzędnymi wektora $\underset{\sim}{b}$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$.

Oznaczając przez

$$A^{i\alpha} = \sum_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})\in E^n\times E^m} \alpha_{(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b})} a^i b^\alpha \quad \text{dla} \quad i = 1,\ldots,n;\ \alpha = 1,\ldots,m$$

otrzymujemy $\underset{\sim}{A} = A^{i\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha$. Zatem tensor $\underset{\sim}{A}$ jest kombinacją liniową tensorów ze zbioru $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$, co oznacza, że zbiór ten generuje przestrzeń $E^n \otimes E^m$.

Aksjomaty definicji 1.6 są spełnione, a więc zbiór tensorów $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $E^n \otimes E^m$.

Wniosek 5.1. Niech $E^n \otimes E^m$ będzie iloczynem tensorowym przestrzeni euklidesowych E^n i E^m. Wtedy $\dim E^n \otimes E^m = n \cdot m$.

Niech $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$ będzie bazą w iloczynie tensorowym $E^n \otimes E^m$. Przedstawmy tensor $\underset{\sim}{A} \in E^n \otimes E^m$ w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy

$$\underset{\sim}{A} = A^{i\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha$$

Liczby $A^{i\alpha} \in R$ dla $i = 1,\ldots,n$; $\alpha = 1,\ldots,m$ są współrzędnymi, a macierz $[A^{i\alpha}] \in R^{n\times m}$ jest reprezentacją macierzową tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$.

Tensor $\underset{\sim}{A} \in E^n \otimes E^m$ nazywać będziemy tensorem prostym, jeśli da się przedstawić w postaci:

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} \qquad \text{gdzie} \qquad \underset{\sim}{a} \in E^n \quad \text{i} \quad \underset{\sim}{b} \in E^m$$

W przeciwnym przypadku tensor $\underset{\sim}{A}$ nazywać będziemy tensorem złożonym. Łatwo zauważyć, że tensor złożony jest sumą tensorów prostych, ale przedstawienie to nie jest jednoznaczne.

Twierdzenie 5.2. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, $\{\underset{\sim}{1}_A\}$, $\{\underset{\sim}{1}^A\}$ będą bazami przestrzeni euklidesowej E^n, a $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{h}_\Omega\}$, $\{\underset{\sim}{h}^\Omega\}$ bazami przestrzeni euklidesowej E^m. Jeśli tensor $\underset{\sim}{A} \in E^n \otimes E^m$ przedstawimy w postaciach:

$\underset{\sim}{A} = A^{i\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha$ $[A^{i\alpha}]$ - reprezentacja tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$

$\underset{\sim}{A} = A^{A\Omega}\underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega$ $[A^{A\Omega}]$ - reprezentacja tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{h}^\alpha\}$

$\underset{\sim}{A} = A^A{}_\alpha \underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha$ $[A^A{}_\alpha]$ - reprezentacja tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$

$\underset{\sim}{A} = A_{i\alpha}\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha$ $[A_{i\alpha}]$ - reprezentacja tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$

itd.

to otrzymamy wzory transformacyjne:

$$A^{A\Omega} = A^{i\alpha} g_i^A g_\alpha^\Omega \qquad [A^{A\Omega}] = [g^A{}_i][A^{i\alpha}][g_\alpha{}^\Omega]$$

$$A^A{}_\alpha = A^i{}_\alpha g_i^A \qquad [A^A{}_\alpha] = [g^A{}_i][A^i{}_\alpha]$$

lub macierzowo

$$A^{A\Omega} = A^A{}_\alpha g^{\alpha\Omega} \qquad [A^{A\Omega}] = [A^A{}_\alpha][g^{\alpha\Omega}]$$

$$A_{i\alpha} = A^{j\beta} g_{ji} g_{\beta\alpha} \qquad [A_{i\alpha}] = [g_{ij}][A^{j\beta}][g_{\beta\alpha}]$$

itd.

gdzie liczby g_i^A, g_α^Ω, $g^{\alpha\Omega}$, g_{ij}, $g_{\alpha\beta}, \ldots, \in R$ dla $i,j,A = 1,\ldots,n$; $\alpha,\beta,\Omega = 1,\ldots,m$ są współczynnikami macierzy przejścia między bazami.

Dowód. Wykażemy dla przykładu pierwszy wzór transformacyjny. Dowolny tensor $\underset{\sim}{A} \in E^n \otimes E^m$ przedstawmy w postaciach

$$\underset{\sim}{A} = A^{i\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha \quad \text{w bazie} \quad \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$$

$$\underset{\sim}{A} = A^{A\Omega}\underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega \quad \text{w bazie} \quad \{\underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega\}$$

a stąd

$$A^{i\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha = A^{A\Omega}\underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega$$

Ponieważ mamy

$e_i = g_i^A \underset{\sim}{1}_A$ dla $i = 1,\ldots,n$ i $\underset{\sim}{d}_\alpha = g_\alpha^\Omega \underset{\sim}{h}_\Omega$ dla $\alpha = 1,\ldots,m$

więc

$$A^{A\Omega}1_A \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega = A^{i\alpha}(g_i^A \underset{\sim}{1}_A) \otimes (g_\alpha^\Omega \underset{\sim}{h}_\Omega)$$

Korzystając z własności iloczynu tensorowego wektorów otrzymamy

$$A^{A\Omega}\underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega = A^{i\alpha} g_i^A g_\alpha^\Omega \underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega$$

Ponieważ przedstawienie tensora w bazie jest jednoznaczne, zatem

$$A^{A\Omega} = A^{i\alpha} g_i^A g_\alpha^\Omega \quad \text{dla} \quad A = 1,\dots,n; \quad \Omega = 1,\dots,m$$

Jeśli indeksy różnych baz przestrzeni euklidesowych wchodzących do baz iloczynu tensorowego przestrzeni oznaczymy literami innego alfabetu, to podanie tylko reprezentacji (macierzy) tensora określa już jednoznacznie tensor, gdyż rodzaj indeksów w reprezentacji wskazuje na to, w jakiej bazie jest reprezentacja. Pisze się więc np., że $\underset{\sim}{A} = [A^i{}_\Omega] \in E^n \otimes E^m$. Umowa ta pozwala na prowadzenie operacji na tensorach bez podawania bazy. Wzory transformacyjne podają zależności między współrzędnymi (reprezentacjami) tego samego tensora w dwu bazach. Wynika z nich, że wymiana indeksów i przenoszenie ich na inny poziom odbywa się za pomocą układu liczb g indeksowanych tak, aby zachodziła konwencja sumacyjna.

P r z y k ł a d 5.1. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in E^3 \otimes E^2$ ma reprezentację

$$[A^i{}_\alpha] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie} \quad \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$$

Znajdziemy reprezentację $[A_{A\Omega}]$ tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{1}^A \otimes \underset{\sim}{h}^\Omega\}$, jeśli dane są zależności między bazami:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{1}^1 = -2\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{1}^2 = \underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{1}^3 = 2\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 + 2\underset{\sim}{e}_3 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = \underset{\sim}{h}^1 - \underset{\sim}{h}^2 \\ \underset{\sim}{d}^2 = 2\underset{\sim}{h}^1 + 3\underset{\sim}{h}^2 \end{cases}$$

Ze wzorów transformacyjnych podanych w twierdzeniu 5.2 wynika, że $A_{A\Omega} = A^i{}_\alpha g_{Ai} g^\alpha_\Omega$ dla $A = 1,2,3$; $\Omega = 1,2$ lub macierzowo

$[A_{A\Omega}] = [g_{Ai}][A^i_{\alpha}][g^{\alpha}_{\Omega}]$, a więc należy znaleźć macierze $[g_{Ai}]$ i $[g^{\alpha}_{\Omega}]$. Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{1}^A\}$ i $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ dana jest w postaci

$$\underset{\sim}{1}^A = g^{iA}\underset{\sim}{e}_i \quad \text{dla} \quad A = 1,2,3, \quad \text{stąd} \quad [g^{iA}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Korzystając ze wzorów podanych w twierdzeniu 3.5 otrzymamy

$$g^{iA}g_{Aj} = \delta^i_j \qquad\qquad [g^{iA}][g_{Aj}] = [\delta^i{}_j]$$

lub macierzowo

$$g_{Ai}g^{iB} = \delta^B_A \qquad\qquad [g_{Ai}][g^{iB}] = [\delta_A{}^B]$$

stąd

$$[g_{Ai}] = [g^{iB}]^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{h}^{\Omega}\}$ i $\{\underset{\sim}{d}^{\alpha}\}$ dana jest w postaci

$$\underset{\sim}{d}^{\alpha} = g^{\alpha}_{\Omega}\underset{\sim}{h}^{\Omega} \quad \text{dla} \quad \alpha = 1,2,3, \quad \text{stąd} \quad \{g_{\Omega}{}^{\alpha}\} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Zatem otrzymamy

$$[A_{A\Omega}] = [g_{iA}][A^i{}_{\alpha}][g^{\alpha}_{\Omega}] = [g_{iA}][A^i{}_{\alpha}][g_{\Omega}{}^{\alpha}]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 18 \\ 23 & 27 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Można wykazać, że w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}\}$ przestrzeni liniowej $E^n \otimes E^m$ działania dodawania tensorów i mnożenia tensora przez liczbę rzeczywistą wykonuje się następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \in E^n \otimes E^m} \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = A^i{}_{\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} + B^i{}_{\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} = (A^i{}_{\alpha} + B^i{}_{\alpha})\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}$$

$$\bigwedge_{\beta \in R} \; \bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in E^n \otimes E^m} \beta\underset{\sim}{A} = \beta(A^i{}_{\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}) = (\beta A^i{}_{\alpha})\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}$$

Stąd, w ustalonej bazie dodając do siebie tensory dodajemy ich współrzędne (reprezentacje), a mnożąc tensor przez liczbę mnożymy współrzędne (reprezentację) tego tensora przez tę liczbę. Tensory bazy można dodawać i mnożyć przez liczby rzeczywiste zgodnie z własnościami iloczynu tensorowego (wektorów).

P r z y k ł a d 5.2. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{1}_A\}$ będą bazami przestrzeni kartezjańskiej R^2 takimi, że $\underset{\sim}{e}_1 = [1,2]$, $\underset{\sim}{e}_2 = [0,1]$ i $\underset{\sim}{1}_1 = [1,1]$, $\underset{\sim}{1}_2 = [-1,0]$, a $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ będzie bazą przestrzeni kartezjańskiej R^3 taką, że $\underset{\sim}{d}_1 = [2,1,0]$, $\underset{\sim}{d}_2 = [-1,0,0]$, $\underset{\sim}{d}_3 = [1,2,1]$ oraz niech tensory $\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \in R^2 \otimes R^3$ mają reprezentacje

$$\left[A^i{}_\alpha\right] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$$

$$\left[B_A{}^\alpha\right] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{1}^A \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$$

Znajdziemy tensor (reprezentację tensora) $\underset{\sim}{A} + 2\underset{\sim}{B}$.

W tym celu znajdziemy reprezentacje tensorów $\underset{\sim}{A}$ i $\underset{\sim}{B}$ w tej samej bazie. Jeśli przyjmiemy bazę $\{\underset{\sim}{1}^A \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$, to wystarczy znaleźć reprezentację $\left[A_A{}^\alpha\right]$ tensora $\underset{\sim}{A}$ w tej bazie. Ze wzorów transformacyjnych podanych w twierdzeniu 5.2 wynika, że $A_A{}^\alpha = A^i{}_\beta g_{iA} g^{\beta\alpha}$ dla $A = 1,2$; $\alpha = 1,2,3$, lub macierzowo $\left[A_A{}^\alpha\right] = \left[g_{Ai}\right]\left[A^i{}_\beta\right]\left[g^{\beta\alpha}\right]$, a więc należy znaleźć macierze $\left[g_{Ai}\right]$ i $\left[g^{\beta\alpha}\right]$. Korzystamy ze wzorów podanych w twierdzeniu 3.5, więc

$$g_{Ai} = \underset{\sim}{1}_A \circ \underset{\sim}{e}_i \quad \text{dla} \quad A = 1,2;\ i = 1,2, \quad \text{stąd} \quad \left[g_{Ai}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g_{\alpha\beta} = \underset{\sim}{d}_\alpha \circ \underset{\sim}{d}_\beta \quad \text{dla} \quad \alpha,\beta = 1,2,3; \quad \text{stąd} \quad g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta \qquad\qquad \left[g_{\alpha\gamma}\right]\left[g^{\gamma\beta}\right] = \left[\delta_\alpha{}^\beta\right]$$

dla $\alpha, \beta = 1,2,3$ lub macierzowo

$$g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_\beta^\alpha \qquad\qquad \left[g^{\alpha\gamma}\right]\left[g_{\gamma\beta}\right] = \left[\delta^\alpha{}_\beta\right]$$

stąd

$$\left[g^{\alpha\beta}\right] = \left[g_{\alpha\beta}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 8 & 14 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Zatem otrzymamy

$$\left[A_A^{\ \alpha}\right] = \left[g_{Ai}\right]\left[A^i_{\ \beta}\right]\left[g^{\beta\alpha}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 8 & 14 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 65 & -13 \\ -11 & -20 & 4 \end{bmatrix}$$

Szukamy tensora $\underset{\sim}{A} + 2\underset{\sim}{B}$, a więc

$$\underset{\sim}{A} + 2\underset{\sim}{B} = A_A^{\ \alpha}\, \underset{\sim}{1}^A \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha + 2B_A^{\ \alpha}\, \underset{\sim}{1}^A \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha = (A_A^{\ \alpha} + 2B_A^{\ \alpha})\underset{\sim}{1}^A \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha$$

stąd wynika, że reprezentacja $\left[(A + 2B)_A^{\ \alpha}\right]$ tensora $\underset{\sim}{A} + 2\underset{\sim}{B}$ w bazie $\{\underset{\sim}{1}^A \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$ jest równa

$$\left[(A + 2B)_A^{\ \alpha}\right] = \left[A_A^{\ \alpha}\right] + 2\left[B_A^{\ \alpha}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 36 & 65 & -13 \\ -11 & -20 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 67 & -15 \\ -11 & -16 & 6 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\underset{\sim}{A} + 2\underset{\sim}{B} = 32\underset{\sim}{1}^1 \otimes \underset{\sim}{d}_1 + 67\underset{\sim}{1}^1 \otimes \underset{\sim}{d}_2 - 15\underset{\sim}{1}^1 \otimes \underset{\sim}{d}_3 - 11\underset{\sim}{1}^2 \otimes \underset{\sim}{d}_1 -$$
$$- 16\underset{\sim}{1}^2 \otimes \underset{\sim}{d}_2 + 6\underset{\sim}{1}^2 \otimes \underset{\sim}{d}_3$$

Zapiszemy ten tensor w postaci sumy tensorów prostych

$$\underset{\sim}{A} + 2\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{1}^1 \otimes (32\underset{\sim}{d}_1 + 67\underset{\sim}{d}_2 - 15\underset{\sim}{d}_3) + \underset{\sim}{1}^2 \otimes (-11\underset{\sim}{d}_1 - 16\underset{\sim}{d}_2 + 6\underset{\sim}{d}_3) =$$
$$= \underset{\sim}{1}^1 \otimes \underset{\sim}{b}_1 + \underset{\sim}{1}^2 \otimes \underset{\sim}{b}_2$$

gdzie:

$$\underset{\sim}{b}_1 = 32\underset{\sim}{d}_1 + 67\underset{\sim}{d}_2 - 15\underset{\sim}{d}_3 = 32[2,1,0] + 67[-1,0,0] - 15[1,2,1] =$$
$$= [-16,2,-15]$$

$$\underset{\sim}{b}_2 = -11\underset{\sim}{d}_1 - 16\underset{\sim}{d}_2 + 6\underset{\sim}{d}_3 = -11[2,1,0] - 16[-1,0,0] + 6[1,2,1] =$$
$$= [0,1,6]$$

5.2. Iloczyn skalarny tensorów
Związki między formami dwuliniowymi a tensorami

Niech $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{l}^A \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega\}$ będą bazami w iloczynie tensorowym $E^n \otimes E^m$. Można udowodnić, że odwzorowanie $\circ$: $(E^n \otimes E^m) \times \times (E^n \otimes E^m) \longrightarrow R$ określone następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \in E^n \otimes E^m} \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} = (A^{i\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha) \circ (B_A^{\ \Omega}\underset{\sim}{l}^A \otimes \underset{\sim}{h}_\Omega) :=$$

$$:= A^{i\alpha}B_A^{\ \Omega}(\underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{l}^A)(\underset{\sim}{d}_\alpha \circ \underset{\sim}{h}_\Omega) = A^{i\alpha}B_A^{\ \Omega}g_i^A g_{\alpha\Omega}$$

jest iloczynem skalarnym w przestrzeni liniowej $E^n \otimes E^m$.

Należy zaznaczyć, że tym samym symbolem "$\circ$" oznaczono również iloczyny skalarne w przestrzeniach euklidesowych E^n i E^m.

<u>Wniosek</u> 5.2. Iloczyn tensorowy $E^n \otimes E^m$ przestrzeni euklidesowych E^n i E^m jest przestrzenią euklidesową.

Łatwo wykazać, że zachodzą wzory

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B} \in E^n \otimes E^m} \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} = A^{i\alpha}B_{i\alpha} = A^i_{\ \Omega}B_i^{\ \Omega} = A^A_{\ \Omega}B_A^{\ \Omega}$$

Zatem w iloczynie tensorowym przestrzeni euklidesowych iloczyn skalarny tensorów najwygodniej obliczać, gdy pierwszy tensor zapiszemy w bazie, a drugi w kobazie względem tej bazy.

P r z y k ł a d 5.3. Niech tensory $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B} \in E^2 \otimes E^3$ mają w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$ reprezentacje:

$$[A^i_{\ \alpha}] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad [B^i_{\ \alpha}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$