Zatem w bazie $\{\underset{\sim}{i}_i \otimes \underset{\sim}{i}_j\}$ tensory $\underset{\sim}{A}$ i $Q * \underset{\sim}{A}$ mają reprezentację odpowiednio

$$[A^{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [(Q * A)^{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & \sin 2\varphi & -2\cos^2\varphi \\ 0 & 2\sin^2\varphi & -\sin 2\varphi \end{bmatrix}$$

Izomorfizm ortogonalny $Q \in \vartheta(E^n, E^n)$ przestrzeni euklidesowej E^n wyznacza odwzorowanie $Q : \mathcal{T}_p \to \mathcal{T}_p$ obrotu tensorów określone następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p} Q(\underset{\sim}{A}) := Q * \underset{\sim}{A}$$

które, jak łatwo sprawdzić, jest izomorfizmem ortogonalnym w przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ nad przestrzenią euklidesową E^n.

Należy zaznaczyć, że w przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ istnieją izomorfizmy ortogonalne, które nie są wyznaczone przez izomorfizmy ortogonalne przestrzeni euklidesowej E^n.

6.3. Związki między formami wieloliniowymi i odwzorowaniami liniowymi a tensorami

Twierdzenie 6.3. Niech $\mathcal{T}_p$ będzie przestrzenią tensorową nad przestrzenią euklidesową E^n. Forma $l : E^n \times E^n \times \ldots \times E^n \to R$ jest p-liniowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jeden tensor $\underset{\sim}{l} \in \mathcal{T}_p$ taki, że

$$\bigwedge_{\underset{1}{\underset{\sim}{a}}, \underset{2}{\underset{\sim}{a}}, \ldots, \underset{p}{\underset{\sim}{a}} \in E^n} l(\underset{1}{\underset{\sim}{a}}, \underset{2}{\underset{\sim}{a}}, \ldots, \underset{p}{\underset{\sim}{a}}) = \underset{\sim}{l} \circ (\underset{1}{\underset{\sim}{a}} \otimes \underset{2}{\underset{\sim}{a}} \otimes \ldots \otimes \underset{p}{\underset{\sim}{a}})$$

gdzie $\circ$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni euklidesowej $\mathcal{T}_p$.

Dowód analogiczny do dowodu twierdzenia 5.3.

Z twierdzenia tego wynika, że forma p-liniowa l wyznacza jednoznacznie tensor $\underset{\sim}{l}$ określony wzorem

$$\underset{\sim}{l} := l(\underset{\sim}{e}_i,\dots,\underset{\sim}{d}^{\alpha},\dots,\underset{\sim}{l}_A)\underset{\sim}{e}^i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}_{\alpha} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}^A$$

gdzie $\{\underset{\sim}{e}_i\},\dots,\{\underset{\sim}{d}^{\alpha}\},\dots,\{\underset{\sim}{l}_A\}$ są bazami przestrzeni euklidesowej E^n.

Twierdzenie 6.4. Niech $\mathcal{T}_p$, $\mathcal{T}_q$ będą przestrzeniami tensorowymi. Odwzorowanie $l : \mathcal{T}_p \to \mathcal{T}_q$ jest liniowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jeden tensor $\underset{\sim}{L} \in \mathcal{T}_{p+q}$ taki, że

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p} l(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{L} \circ \underset{\sim}{A}$$

gdzie $\circ$ jest pełnym nasunięciem tensorów.

Dowód $\Longrightarrow$ Niech $l : \mathcal{T}_p \to \mathcal{T}_q$ będzie odwzorowaniem liniowym. Weźmy bazę $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}_A\}$ przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_p$ i przyjmijmy

$$\underset{\sim}{L} := l(\underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}_A) \otimes \underset{\sim}{e}^i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}_{\alpha} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}^A$$

Wtedy $\underset{\sim}{L} \in \mathcal{T}_{p+q}$ i dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$ mamy

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{L} \circ \underset{\sim}{A} &= (l(\underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}_A) \otimes \underset{\sim}{e}^i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}_{\alpha} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}^A) \circ \\
&\circ (A^{j\dots B}_{\dots\beta\dots}\underset{\sim}{e}_j \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}_B) = \\
&= A^{j\dots B}_{\dots\beta\dots}\delta^i_j \dots \delta^{\beta}_{\alpha} \dots \delta^A_B \, l(\underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}_A) = \\
&= A^{i\dots A}_{\dots\alpha\dots} l(\underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}_A) = \\
&= l(A^{i\dots A}_{\dots\alpha\dots}\underset{\sim}{e}_i \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \dots \otimes \underset{\sim}{l}_A) = l(\underset{\sim}{A})
\end{aligned}$$

Zatem

$$\underset{\sim}{L} \circ \underset{\sim}{A} = l(\underset{\sim}{A}) \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$$

Wykazaliśmy istnienie tensora $\underset{\sim}{L} \in \mathcal{T}_{p+q}$, który wyznacza odwzorowanie liniowe l. Dowód jednoznaczności pomijamy.

$\Leftarrow$ Niech tensor $\underset{\sim}{L} \in \mathcal{T}_{p+q}$. Łatwo udowodnić, że odwzorowanie $l : \mathcal{T}_p \to \mathcal{T}_q$ określone następująco:

$$\bigwedge_{A \in \mathcal{T}_p} l(\underset{\sim}{A}) = \underset{\sim}{L} \circ \underset{\sim}{A}$$

jest odwzorowaniem liniowym.

Z powyższego twierdzenia wynika, że odwzorowanie liniowe l można utożsamiać z tensorem

$$\underset{\sim}{L} = l(\underset{\sim}{e}_i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{1}_A) \otimes \underset{\sim}{e}^i \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}_{\alpha} \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{1}^A$$

P r z y k ł a d 6.7. Niech $\mathcal{T}_1$ będzie przestrzenią euklidesową, a $id : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$ odwzorowaniem tożsamościowym. Znajdziemy tensor, który wyznacza to odwzorowanie.

Z twierdzenia 6.4 wynika, że istnieje tensor $\underset{\sim}{1} \in \mathcal{T}_2$ taki, że

$$\underset{\sim}{1} \circ \underset{\sim}{a} = id(\underset{\sim}{a}) \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$$

Tensor ten nazywamy jednostkowym i ma on postać

$$\underset{\sim}{1} = id(\underset{\sim}{e}_i) \otimes \underset{\sim}{e}^i = \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^i$$

gdzie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ jest dowolną bazą przestrzeni $\mathcal{T}_1$.

Wykażemy, że tensor jednostkowy można przedstawić w postaciach

$$\underset{\sim}{1} = \delta^i_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j = g^{ij} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = g_{ij} \underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}^j = g_{\alpha j} \underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \underset{\sim}{e}^j = g^i{}_{\alpha} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}$$

itp.

Istotnie np.

$$\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^i = \underset{\sim}{e}_i \otimes (g^i_{\alpha} \underset{\sim}{d}^{\alpha}) = g^i_{\alpha} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}$$

Wykażemy również, że dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$, $p \geq 1$, zachodzi wzór

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{1}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$$

gdzie " " jest prostym nasunięciem tensorów.
Istotnie

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{1} = (A^{i\ldots\alpha}_{\ldots\ldots\Omega}\underset{\sim}{e}_i \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{d}_\alpha \otimes \underset{\sim}{h}^\Omega)(\underset{\sim}{h}_\theta \otimes \underset{\sim}{h}^\theta) =$$

$$= A^{i\ldots\alpha}_{\ldots\ldots\Omega}\delta^\Omega_\theta \underset{\sim}{e}_i \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{d}_\alpha \otimes \underset{\sim}{h}^\theta = A^{i\ldots\alpha}_{\ldots\ldots\theta}\underset{\sim}{e}_i \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{d}_\alpha \otimes \underset{\sim}{h}^\theta = \underset{\sim}{A}$$

a więc

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{A} \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$$

Podobnie dowodzi się, że $\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}$ dla $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$.

P r z y k ł a d 6.8. Niech $\mathcal{T}_p$ będzie przestrzenią tensorową dla $p > 1$, a $id : \mathcal{T}_p \to \mathcal{T}_p$ odwzorowaniem tożsamościowym. Znajdziemy tensor, który wyznacza to odwzorowanie.

Z twierdzenia 6.4 wynika, że istnieje tensor $\underset{\sim}{1} \in \mathcal{T}_{2p}$ taki, że

$$\underset{\sim}{1} \circ \underset{\sim}{A} = id(\underset{\sim}{A}) \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_p$$

Tensor ten ma postać

$$\underset{\sim}{1} = id(\underset{\sim}{e}_i \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{d}^\alpha \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{1}_A) \otimes \underset{\sim}{e}^i \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{d}_\alpha \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{1}^A =$$

$$= \underset{\sim}{e}_i \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{d}^\alpha \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{e}^i \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{d}_\alpha \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{1}^A$$

gdzie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{d}^\alpha \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{1}_A\}$ jest dowolną bazą przestrzeni $\mathcal{T}_p$. Przyjmując permutację $\sigma = (1,3,\ldots,2p-1,2,4,\ldots,2p) \in \in \sum_{2p}$ tensor ten można zapisać w postaci

$$\underset{\sim}{1} = \sigma * (\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^i \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{d}^\alpha \otimes \underset{\sim}{d}_\alpha \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{1}_A \otimes \underset{\sim}{1}^A) =$$

$$= \sigma * (\underset{\sim}{1} \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{1} \otimes\ldots\otimes \underset{\sim}{1}) \qquad \text{(p-razy tensorowo)}$$

P r z y k ł a d 6.9. Niech $\mathcal{T}_1$ będzie przestrzenią euklidesową, a $Q : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$ izomorfizmem ortogonalnym. Znajdziemy tensor, który wyznacza to odwzorowanie.

Z twierdzenia 6.4 wynika, że istnieje tensor $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{T}_2$ taki, że

$$\underset{\sim}{Q} \circ \underset{\sim}{a} = Q(\underset{\sim}{a}) \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$$

Tensor $\underset{\sim}{Q}$ nazywamy ortogonalnym. Znajdziemy warunek jaki powinien spełniać ten tensor. Wykażemy najpierw, że dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ i dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in \mathcal{T}_1$ zachodzi wzór $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{A}^T$. Istotnie

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} = (A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes e_j)\underset{\sim}{a} = A^{ij}(\underset{\sim}{e}_j\underset{\sim}{a})\underset{\sim}{e}_i = A^{ij}a_j\underset{\sim}{e}_i$$

$$\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{a}((2,1) * (A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j)) = \underset{\sim}{a}(A^{ij}\underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i) = A^{ij}(\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{e}_j)\underset{\sim}{e}_i =$$
$$= A^{ij}a_j\underset{\sim}{e}_i$$

stąd

$$\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{A}^T$$

Ponieważ odwzorowanie Q jest ortogonalne, zatem

$$(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{a})(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{b}) = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{b} \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in \mathcal{T}_1$$

stąd

$$\underset{\sim}{a}\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{a}\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{b} \quad \text{dla} \quad \underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in \mathcal{T}_1$$

Ostatnia równość zachodzi dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in \mathcal{T}_1$, więc $\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1}$.

6.4. Zadania

Zadanie 6.1. Niech między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ przestrzeni euklidesowej E^3 zachodzą zależności: