Warunki twierdzenia 1.2 są spełnione, a więc zbiór X jest podprzestrzenią liniową przestrzeni R^4.

b) znajdziemy zbiór A, który generuje podprzestrzeń X, tzn. L(A) = X. Dowolny wektor $a = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ należy do podprzestrzeni X wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy $\alpha_1 = t$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = t + 2s$, $\alpha_4 = s$ dla $t, s \in R$. Zatem wektor a można przedstawić w postaci

$$a = [t, 0, t+2s, s] = t[1,0,1,0] + s[0,0,2,1] \quad \text{dla} \quad t,s \in R$$

Z definicji 1.4 wnioskujemy, że zbiór $A = \{[1,0,1,0], [0,0,2,1]\}$ generuje podprzestrzeń X.

1.3. Liniowa niezależność. Baza i jej własności. Suma prosta

Definicja 1.5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Podzbiór A zbioru V nazywamy:

a) liniowo niezależnym, jeśli dla każdego skończonego ciągu różnych wektorów $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ równanie

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = 0 \quad \text{gdzie } \alpha_i \in K \text{ dla } i = 1,2,\ldots,k$$

ma tylko rozwiązanie zerowe, tzn. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$;

b) liniowo zależnym, jeśli istnieje skończony ciąg różnych wektorów $a_1, a_2, \ldots, a_s \in A$ taki, że równanie

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = 0 \quad \text{gdzie } \alpha_i \in K \text{ dla } i = 1,2,\ldots,s$$

ma również rozwiązanie niezerowe.

Bezpośrednio z powyższej definicji wynika:

Wniosek 1.1. W przestrzeni liniowej:

1) każdy zbiór zawierający podzbiór liniowo zależny jest liniowo zależny,

2) każdy podzbiór zbioru liniowo niezależnego jest liniowo niezależny,

3) każdy zbiór zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny,

4) każdy zbiór składający się z jednego wektora niezerowego jest liniowo niezależny.

P r z y k ł a d 1.7. Niech R^4 będzie przestrzenią liniową ciągów 4-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych.

a) zbadamy liniową zależność zbioru wektorów $\{[1,-1,2,3], [1,0,2,1], [0,-1,0,2]\}$ tej przestrzeni. Rozpatrzmy równanie

$$\alpha_1[1,-1,2,3] + \alpha_2[1,0,2,1] + \alpha_3[0,-1,0,2] = [0,0,0,0],$$

które jest równoważne układowi równań skalarnych

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań $\alpha_1 = t$, $\alpha_2 = -t$, $\alpha_3 = -t$ dla $t \in R$. Zatem zbiór wektorów jest liniowo zależny.

b) zbadamy liniową zależność zbioru wektorów $\{[1,0,2,0], [0,1,-1,0], [-1,0,1,1], [2,0,-1,0]\}$ tej przestrzeni. Rozpatrzmy równanie

$$\alpha_1[1,0,2,0] + \alpha_2[0,1,-1,0] + \alpha_3[-1,0,1,1] + \\ + \alpha_4[2,0,-1,0] = [0,0,0,0]$$

które jest równoważne układowi równań skalarnych:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Układ ten ma tylko rozwiązanie zerowe $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Zatem zbiór wektorów jest liniowo niezależny.

P r z y k ł a d 1.8. Niech $\mathcal{F}(R;R)$ będzie przestrzenią liniową funkcji z ciała liczb rzeczywistych R w ciało R.

a) zbadamy liniową zależność zbioru funkcji $\{\sin x, \cos x, \sin 2x\}$ tej przestrzeni. Rozpatrzmy równanie

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 \sin 2x = 0 \quad \text{dla} \quad x \in R$$

które musi być spełnione dla każdego $x \in R$, a więc w szczególności dla:

$x = 0 \qquad \alpha_1 0 + \alpha_2 1 + \alpha_3 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha_1 1 + \alpha_2 0 + \alpha_3 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{4} \qquad \alpha_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + \alpha_3 1 = 0$

Łatwo sprawdzić, że powyższy układ równań ma tylko rozwiązanie zerowe $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Zatem zbiór funkcji jest liniowo niezależny.

b) zbadamy liniową zależność zbioru funkcji $\{\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x\}$ tej przestrzeni. Rozpatrzmy równanie

$$\alpha_1 \sin^2 x + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3 \cos 2x = 0 \quad \text{dla} \quad x \in R$$

które można zapisać w postaci

$$\alpha_1 \sin^2 x + \alpha_2 \cos^2 x + \alpha_3(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in R$$

Równanie to ma niezerowe rozwiązanie, np. $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1$. Zatem zbiór funkcji jest liniowo zależny.

<u>Definicja</u> 1.6. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Podzbiór B zbioru V nazywamy bazą przestrzeni V, jeśli spełnia aksjomaty:

1) zbiór B jest liniowo niezależny,
2) zbiór B generuje przestrzeń V, tzn. $L(B) = V$.

Z definicji bazy wynika, że jeśli zbiór B jest bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K, to dla każdego wektora $a \in V$

istnieją wektory $a_1, a_2, \ldots, a_k \in B$ tworzące zbiór liniowo niezależny i istnieją skalary $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in K$ takie, że zachodzi równość

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$$

Twierdzenie 1.4 (Steinitza). Jeśli wektory $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V, a wektory $b_1, b_2, \ldots, b_s$ tej przestrzeni tworzą zbiór liniowo niezależny, to spełnione są warunki:

1) $s \leqslant k$,

2) istnieje $k-s$ wektorów spośród wektorów $a_1, a_2, \ldots, a_k$, które łącznie z wektorami $b_1, b_2, \ldots, b_s$ tworzą bazę przestrzeni V.

Dowód pomijamy.

Wniosek 1.2. Jeśli wektory $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tworzą bazę przestrzeni liniowej V, to każda baza tej przestrzeni ma k wektorów.

Dowód. Niech wektory $b_1, b_2, \ldots, b_s$ tworzą drugą bazę przestrzeni liniowej V. Wtedy wektory te tworzą zbiór liniowo niezależny, a więc z punktu 1 twierdzenia 1.4 mamy $s \leqslant k$. Zmieniając rolę baz otrzymamy podobnie $k \leqslant s$. Zatem $k = s$.

Definicja 1.7. Przestrzeń liniową V nazywamy skończenie wymiarową, jeśli ma bazę złożoną ze skończonej liczby wektorów. Liczbę wektorów bazy nazywamy wymiarem przestrzeni i oznaczamy przez $\dim V$. Jeśli $\dim V = n$, to przestrzeń liniową nazywamy n-wymiarową i oznaczamy przez V^n.

Przestrzeń liniową V nazywamy nieskończenie wymiarową, jeśli ma bazę złożoną z nieskończonej liczby wektorów. Wtedy przyjmujemy, że wymiar tej przestrzeni $\dim V = \infty$.

Przestrzeń liniową $V = \{0\}$ złożoną z wektora zerowego nazywamy zerowo wymiarową. Wtedy przyjmujemy, że wymiar tej przestrzeni $\dim V = 0$.

Wniosek 1.3. W n-wymiarowej przestrzeni liniowej:

1) każdy zbiór, który zawiera więcej niż n wektorów jest liniowo zależny,

2) każdy zbiór, który zawiera mniej niż n wektorów nie jest bazą,

3) każdy zbiór liniowo niezależny można uzupełnić do bazy,

4) każda podprzestrzeń liniowa ma wymiar mniejszy lub równy n.

P r z y k ł a d 1.9. Niech K^n będzie przestrzenią liniową ciągów n-wyrazowych nad ciałem K. Wykażemy, że zbiór wektorów $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ takich, że $i_1 = [1,0,0,\ldots,0,0]$, $i_2 = [0,1,0,\ldots,0,0], \ldots, i_n = [0,0,0,\ldots,0,1]$, jest bazą przestrzeni K^n.

Sprawdzamy aksjomaty definicji bazy:

1) rozpatrzmy równanie

$$\alpha_1[1,0,0,\ldots,0,0] + \alpha_2[0,1,0,\ldots,0,0] + \ldots + \alpha_n[0,0,0,\ldots,0,1] = $$
$$= [0,0,0,\ldots,0,0]$$

które jest równoważne równaniu

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = [0,0,\ldots,0]$$

Równanie to ma tylko rozwiązanie zerowe $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Zatem zbiór $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ jest liniowo niezależny.

2) dla dowolnego wektora $b \in K^n$ mamy

$$b = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] = \beta_1[1,0,0,\ldots,0,0] + \beta_2[0,1,0,\ldots,0,0] +$$
$$+ \ldots + \beta_n[0,0,0,\ldots,0,1]$$

a to oznacza, że zbiór $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ generuje przestrzeń K^n.

Aksjomaty definicji 1.6 są spełnione, a więc zbiór $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ jest bazą przestrzeni liniowej K^n. Bazę tę nazywamy bazą standardową dla K^n. Ponieważ baza standardowa składa się z n wektorów, stąd $\dim K^n = n$.

P r z y k ł a d 1.10. Niech R[x] będzie przestrzenią liniową wielomianów nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykażemy, że zbiór wielomianów $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ jest bazą przestrzeni liniowej R[x].

Sprawdzamy aksjomaty definicji bazy:

1) dla dowolnej liczby naturalnej $n \in N$ równanie

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0 \quad \text{dla} \quad x \in R$$

ma tylko rozwiązanie zerowe $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Zatem zbiór $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ jest liniowo niezależny.

2) łatwo zauważyć, że dowolny wielomian $w_\beta \in R[x]$ taki, że

$$w_\beta(x) = \beta_0 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_k x^k \quad \text{dla} \quad x \in R$$

jest kombinacją liniową wielomianów $1, x, x^2, \dots, x^k$. Zatem zbiór $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ generuje przestrzeń $R[x]$.

Aksjomaty definicji 1.6 są spełnione, a więc zbiór wielomianów $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ jest bazą przestrzeni $R[x]$. Bazę tę nazywamy bazą standardową dla przestrzeni $R[x]$. Ponieważ baza zawiera nieskończoną liczbę wielomianów, stąd $\dim R[x] = + \infty$.

P r z y k ł a d 1.11. Niech $R_n[x]$ będzie przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej n-tego nad ciałem liczb rzeczywistych.

Łatwo wykazać, że zbiór wielomianów $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $R_n[x]$. Bazę tę nazywamy bazą standardową dla przestrzeni $R_n[x]$. Ponieważ baza przestrzeni $R_n[x]$ składa się z n+1 wielomianów, stąd $\dim R_n[x] = n + 1$.

<u>Definicja</u> 1.8. Mówimy, że przestrzeń liniowa V jest sumą prostą podprzestrzeni V_1 i V_2, jeśli dla każdego wektora $a \in V$ istnieją wyznaczone jednoznaczne wektory $a_1 \in V_1$ i $a_2 \in V_2$ takie, że zachodzi równość

$$a = a_1 + a_2$$

Jeśli przestrzeń V jest sumą prostą podprzestrzeni V_1 i V_2, to piszemy, że $V = V_1 \oplus V_2$.

<u>Twierdzenie</u> 1.5. Jeśli V_1 jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V, to istnieje podprzestrzeń V_2 taka, że przestrzeń V jest sumą prostą podprzestrzeni V_1 i V_2, tzn. $V = V_1 \oplus V_2$.

Dowód dla przypadku, gdy przestrzeń V jest skończenie wymiarowa. Niech przestrzeń V będzie n-wymiarowa, a podprzestrzeń V_1 r-wymiarowa. Wtedy z warunku 4 wniosku 1.3 wynika, że $r \leqslant n$. Niech zbiór $\{e_1,\dots,e_r\}$ będzie bazą przestrzeni V_1. Wtedy z warunku 3 wniosku 1.3 wynika, że bazę tę można rozszerzyć do bazy $\{e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n\}$ przestrzeni V. Niech V_2 będzie podprzestrzenią generowaną przez zbiór $\{e_{r+1},\dots,e_n\}$. Łatwo wykazać, że przestrzeń V jest sumą prostą podprzestrzeni V_1 i V_2.

Wniosek 1.4. Jeśli przestrzeń liniowa skończenie wymiarowa V jest sumą prostą podprzestrzeni V_1 i V_2, tzn. $V = V_1 \oplus V_2$, to

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$$

Dowód wynika z przebiegu dowodu twierdzenia 1.5.

P r z y k ł a d 1.12. Niech R^3 będzie przestrzenią liniową ciągów 3-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych. Wykażemy, że przestrzeń R^3 jest sumą prostą podprzestrzeni

$$V_1 = \{[t,t,s] \in R^3:\ t,s \in R\} \quad \text{i} \quad V_2 = \{[r,-r,0] \in R^3:\ r \in R\}$$

Dla dowolnego wektora $a = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] \in R^3$ rozpatrzmy równanie

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3] = [t,t,s] + [r,-r,0]$$

gdzie $[t,t,s] \in V_1$ i $[r,-r,0] \in V_2$.
Równanie to jest równoważne układowi równań skalarnych

$$\begin{cases} t + r = \alpha_1 \\ t - r = \alpha_2 \\ \quad s = \alpha_3 \end{cases}$$

Układ ten ma jedno rozwiązanie $t = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, $s = \alpha_3$, $r = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}$.
A więc wektory $\left[\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2),\ \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2),\alpha_3\right] \in V_1$ i $\left[\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2),\ -\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2),\ 0\right] \in V_2$ wyznaczone są jednoznacznie

i dają w sumie wektor $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \in R^3$. Zatem na mocy definicji 1.8 przestrzeń R^3 jest sumą prostą podprzestrzeni V_1 i V_2.

1.4. Reprezentacja wektora. Zmiana bazy i wzory transformacyjne Orientacja przestrzeni

Bazą uporządkowaną przestrzeni liniowej skończenie wymiarowej nazywać będziemy bazę z pewnym ustalonym porządkiem wektorów. Ponieważ każdą bazę można uporządkować, będziemy opuszczać określenie "uporządkowana" i pisząc baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ będziemy rozumieć, że jest to baza uporządkowana we wskazany sposób. Bazę uporządkowaną będziemy również oznaczać krótko przez $\{e_i\}$.

Twierdzenie 1.6. Zbiór wektorów $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ jest bazą (uporządkowaną) n-wymiarowej przestrzeni liniowej V^n nad ciałem K wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wektora $a \in V^n$ istnieją jednoznacznie wyznaczone skalary $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n \in K$ takie, że zachodzi równość

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \ldots + \alpha^n e_n$$

Dowód $\Longrightarrow$ Niech $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ będzie bazą przestrzeni V^n. Wtedy na mocy definicji bazy dla dowolnego wektora a istnieją skalary $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n \in K$ takie, że

$$a = \alpha^1 e_1 + \alpha^2 e_2 + \ldots + \alpha^n e_n$$

Wystarczy wykazać, że skalary te są wyznaczone jednoznacznie. Przypuśćmy, że dla wektora a istnieją inne skalary $\alpha^{1'}, \alpha^{2'}, \ldots, \alpha^{n'} \in K$ takie, że

$$a = \alpha^{1'} e_1 + \alpha^{2'} e_2 + \ldots + \alpha^{n'} e_n$$

Odejmując powyższe równania stronami otrzymamy

$$(\alpha^1 - \alpha^{1'}) e_1 + (\alpha^2 - \alpha^{2'}) e_2 + \ldots + (\alpha^n - \alpha^{n'}) e_n = 0$$