P r z y k ł a d 1.3. Niech $K^{m \times n}$ będzie zbiorem wszystkich macierzy o wymiarach $m \times n$ nad ciałem K. W zbiorze $K^{m \times n}$ wprowadźmy działania dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez skalary następująco:

$$\bigwedge_{A,B \in K^{m \times n}} A + B = [\alpha_{ij}] + [\beta_{ij}] := [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]$$

$$\bigwedge_{\gamma \in K} \bigwedge_{A \in K^{m \times n}} \gamma \cdot A = \gamma \cdot [\alpha_{ij}] := [\gamma \alpha_{ij}]$$

Można udowodnić podobnie jak w przykładzie 1.2, że układ $(K^{m \times n}, K, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową nad ciałem K. Przestrzeń tę nazywamy przestrzenią liniową macierzy $m \times n$ wymiarowych nad ciałem K.

1.2. Definicja i własności podprzestrzeni liniowej

Definicja 1.2. Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową, a V_0 niepustym podzbiorem zbioru V. Jeśli układ $(V_0, K, +, \cdot)$ jest przestrzenią liniową, to nazywamy go podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $(V, K, +, \cdot)$.

Badanie czy pewien układ jest podprzestrzenią liniową danej przestrzeni liniowej z definicji jest pracochłonne, ponieważ należy sprawdzić, czy spełnia on aksjomaty przestrzeni liniowej. Wygodniej jest korzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 1.2. Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową, a V_0 niepustym podzbiorem zbioru V. Układ $(V_0, K, +, \cdot)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $(V, K, +, \cdot)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

1) $\bigwedge_{a,b \in V} a + b \in V_0$

2) $\bigwedge_{\alpha \in K} \bigwedge_{a \in V} \alpha \cdot a \in V_0$

Dowód pomijamy.

P r z y k ł a d 1.4. Niech $(\mathcal{F}(K;K),+,\cdot)$ będzie przestrzenią liniową funkcji z ciała K w ciało K, a

$$K[x] := \{ w_\alpha \in \mathcal{F}(K;K) :$$

$$: \bigvee_{n\in N} \; \bigvee_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in K} w_\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_1 x^n \quad \text{dla} \quad x \in K \}$$

zbiorem wszystkich wielomianów o współczynnikach z ciała K. Wykażemy, że układ $(K[x],K,+,\cdot)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $(\mathcal{F}(K;K),K,+,\cdot)$.

Ponieważ $K[x] \subset \mathcal{F}(K;K)$, zatem wystarczy sprawdzić warunki twierdzenia 1.2:

1) dla dowolnych wielomianów w_α, $w_\beta \in K[x]$ mamy

$$(w_\alpha + w_\beta)(x) := w_\alpha(x) + w_\beta(x) = (\alpha_0+\alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m) +$$
$$+ (\beta_0+\beta_1 x + \ldots + \beta_m x^m + \ldots + \beta_n x^n) =$$
$$= (\alpha_0+\beta_0) + (\alpha_1+\beta_1)x + \ldots + (\alpha_m+\beta_m)x^m +$$
$$+ \beta_{m+1}x^{m+1} + \ldots + \beta_n x^n \quad \text{dla} \quad x \in K,\ m \leqslant n$$

stąd $w_\alpha + w_\beta \in K[x]$.

2) dla dowolnego skalara $\gamma \in K$ i dowolnego wielomianu $w_\alpha \in K[x]$ mamy

$$(\gamma\cdot w_\alpha)(x) := \gamma w_\alpha(x) = \gamma(\alpha_0+\alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m) =$$
$$= \gamma\alpha_0 + \gamma\alpha_1 x + \ldots + \gamma\alpha_m x^m \quad \text{dla} \quad x \in K,$$

stąd $\gamma \cdot w_\alpha \in K[x]$.

Warunki twierdzenia 1.2 są spełnione, a więc struktura $(K[x],K,+,\cdot)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $(\mathcal{F}(K;K),K,+,\cdot)$. Podprzestrzeń tę nazywamy przestrzenią liniową wielomianów nad ciałem K.

P r z y k ł a d 1.5. Niech $(K[x],K,+,\cdot)$ będzie przestrzenią liniową wielomianów nad ciałem K, a

$$K_n[x] := \{ w_\alpha \in K[x] : \bigvee_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K} w_\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n \quad \text{dla} \quad x \in K \}$$

zbiorem wielomianów o współczynnikach z ciała K stopnia co najwyżej n-tego.

Można udowodnić podobnie jak w przykładzie 1.4, że układ $(K_n[x], K, +, \cdot)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $(K[x], K, +, \cdot)$. Podprzestrzeń tę nazywamy przestrzenią liniową wielomianów stopnia co najwyżej n-tego nad ciałem K.

Definicja 1.3. Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Wektor $a \in V$ nazywamy skończoną kombinacją liniową wektorów $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V$, jeśli istnieją skalary $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in K$ takie, że zachodzi równość

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$$

Skalary $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ nazywamy współczynnikami tej kombinacji.

Twierdzenie 1.3. Niech $(V, K, +, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową, A - niepustym podzbiorem zbioru V, a

$$L(A) := \{ a \in V : \bigvee_{n \in N} \; \bigvee_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K} \; \bigvee_{a_1, \ldots, a_n \in A} a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \}$$

zbiorem wszystkich skończonych kombinacji liniowych wektorów ze zbioru A. Wtedy układ $(L(A), K, +, \cdot)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $(V, K, +, \cdot)$.

Dowód. Ponieważ $L(A) \subset V$, zatem wystarczy sprawdzić warunki twierdzenia 1.2:

1) suma dwu dowolnych kombinacji liniowych wektorów ze zbioru A jest kombinacją liniową wektorów ze zbioru A,

2) iloczyn dowolnej kombinacji liniowej wektorów ze zbioru A przez dowolny skalar z ciała K jest kombinacją liniową wektorów ze zbioru A.

Warunki te są spełnione, a więc struktura $(L(A),K,+,\cdot)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $(V,K,+,\cdot)$.

Definicja 1.4. Podprzestrzeń liniową $(L(A),K,+,\cdot)$ przestrzeni liniowej $(V,K,+,\cdot)$ określoną w twierdzeniu 1.3 nazywamy podprzestrzenią generowaną przez zbiór A. Zbiór A nazywamy generatorem tej podprzestrzeni lub mówimy, że generuje podprzestrzeń $L(A)$.

P r z y k ł a d 1.6. Niech R^4 będzie przestrzenią liniową ciągów 4-wyrazowych nad ciałem liczb rzeczywistych, a

$$X = \{a = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4] \in R^4 : \alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \wedge \alpha_2 = 0\}$$

podzbiorem zbioru R^4.

a) wykażemy, że zbiór X jest podprzestrzenią liniową przestrzeni R^4.

Ponieważ $X \subset R^4$, zatem wystarczy sprawdzić warunki twierdzenia 1.2:

1) dla dowolnych ciągów $a,b \in X$ mamy

$$a + b = [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4] + [\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4] =$$
$$= [\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \alpha_3+\beta_3,\ \alpha_4+\beta_4]$$

$$\begin{cases} (\alpha_1+\beta_1)-(\alpha_3+\beta_3)+2(\alpha_4+\beta_4) = (\alpha_1-\alpha_3+2\alpha_4)+(\beta_1-\beta_3+2\beta_4) = 0+0 = 0 \\ \alpha_2 + \beta_2 = 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

stąd $a + b \in X$,

2) dla dowolnego skalara $\gamma \in R$ i dowolnego wektora $a \in X$ mamy

$$\gamma a = \gamma[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4] = [\gamma\alpha_1,\gamma\alpha_2,\gamma\alpha_3,\gamma\alpha_4]$$

$$\begin{cases} \gamma\alpha_1 - \gamma\alpha_3 + 2\gamma\alpha_4 = \gamma(\alpha_1-\alpha_3+2\alpha_4) = \gamma 0 = 0 \\ \gamma_2 = \gamma 0 = 0 \end{cases}$$

stąd $\gamma a \in X$.

Warunki twierdzenia 1.2 są spełnione, a więc zbiór X jest podprzestrzenią liniową przestrzeni R^4.

b) znajdziemy zbiór A, który generuje podprzestrzeń X, tzn. L(A) = X. Dowolny wektor $a = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ należy do podprzestrzeni X wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest układ równań

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy $\alpha_1 = t$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = t + 2s$, $\alpha_4 = s$ dla $t,s \in R$. Zatem wektor a można przedstawić w postaci

$$a = [t,0,t+2s,s] = t[1,0,1,0] + s[0,0,2,1] \quad \text{dla} \quad t,s \in R$$

Z definicji 1.4 wnioskujemy, że zbiór $A = \{[1,0,1,0], [0,0,2,1]\}$ generuje podprzestrzeń X.

1.3. Liniowa niezależność. Baza i jej własności. Suma prosta

Definicja 1.5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Podzbiór A zbioru V nazywamy:

a) liniowo niezależnym, jeśli dla każdego skończonego ciągu różnych wektorów $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ równanie

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = 0 \quad \text{gdzie } \alpha_i \in K \text{ dla } i = 1,2,\ldots,k$$

ma tylko rozwiązanie zerowe, tzn. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$;

b) liniowo zależnym, jeśli istnieje skończony ciąg różnych wektorów $a_1, a_2, \ldots, a_s \in A$ taki, że równanie

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = 0 \quad \text{gdzie } \alpha_i \in K \text{ dla } i = 1,2,\ldots,s$$

ma również rozwiązanie niezerowe.

Bezpośrednio z powyższej definicji wynika:

Wniosek 1.1. W przestrzeni liniowej:

1) każdy zbiór zawierający podzbiór liniowo zależny jest liniowo zależny,