a więc należy znaleźć macierz $[g^{\Omega\Phi}(\theta)]$. Macierz ta podana jest w przykładzie 9.2. Zatem

$$\hat{A}_{\Omega\Phi}(\theta)=\begin{bmatrix} \sin\theta^3\cos\theta^3 & \sin\theta^2\cos\theta^2\cos\theta^3, & \sin^2\theta^2\cos^2\theta^3-\cos^2\theta^2\sin^2\theta^3 \\ -\sin\theta^2\cos\theta^2\cos\theta^3 & 0 & \sin\theta^2\cos\theta^2\sin\theta^3 \\ (\cos^2\theta^2\cos^2\theta^3-\sin^2\theta^2\sin^2\theta^3), & \sin\theta^2\cos\theta^2\sin\theta^3, & -\sin\theta^3\cos\theta^3 \end{bmatrix}$$

10.2. Definicje gradientu, dywergencji, laplasjanu i rotacji pola tensorowego. Pochodne kowariantne

Definicja 10.2. Niech $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ będzie polem tensorowym o walencji p na obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n. Gradientem pola tensorowego w punkcie $X_o \in D$ nazywamy tensor $\nabla\underset{\sim}{\mu}(X_o) \in \mathcal{T}_{p+1}$ taki, że

$$\lim_{\underset{\sim}{h}\to\underset{\sim}{0}} \frac{\underset{\sim}{\mu}(X_o+\underset{\sim}{h}) - \underset{\sim}{\mu}(X_o) - \nabla\underset{\sim}{\mu}(X_o)\underset{\sim}{h}}{\|\underset{\sim}{h}\|} = \underset{\sim}{0}$$

gdzie granicę występującą w tym wzorze obliczamy w przestrzeni euklidesowej (unormowanej) $\mathcal{T}_p$.

Jeśli gradient istnieje w każdym punkcie obszaru, to jest polem tensorowym o walencji p+1 w tym obszarze.

Gradientem k-tego rzędu pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w punkcie $X_o \in D$ nazywamy tensor $\overset{k}{\nabla}\underset{\sim}{\mu}(X_o) \in \mathcal{T}_{p+k}$ określony rekurencyjnie

$$\overset{k}{\nabla}\underset{\sim}{\mu}(X_o) := \begin{cases} \nabla\underset{\sim}{\mu}(X_o) & \text{dla } k = 1 \\ \nabla(\overset{k-1}{\nabla}\underset{\sim}{\mu})(X_o) & \text{dla } k = 2,3,\ldots \end{cases}$$

Jeśli gradient k-tego rzędu istnieje w każdym punkcie obszaru, to jest polem tensorowym o walencji p+k w tym obszarze.

Definicja 10.3. Niech $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ będzie polem tensorowym o walencji $p \geq 1$ na obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n, a q - liczbą naturalną taką, że $1 \leq q \leq p$. q-tą diwergencją pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w punkcie $X_0 \in D$ nazywamy tensor $\operatorname{div}_q \underset{\sim}{\mu}(X_0) \in \mathcal{T}_{p-1}$ określony wzorem

$$\operatorname{div}_q \underset{\sim}{\mu}(X_0) = \underset{(q,p+1)}{\operatorname{tr}} \nabla \underset{\sim}{\mu}(X_0)$$

Jeśli diwergencja istnieje w każdym punkcie obszaru, to jest polem tensorowym o walencji p-1 w tym obszarze.

Definicja 10.4. Niech $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ będzie polem tensorowym o walencji p w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej ε^n. Laplasjanem pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w punkcie $X_0 \in D$ nazywamy tensor $\nabla\mu(X_0) \in \mathcal{T}_p$ określony wzorem

$$\Delta \underset{\sim}{\mu}(X_0) = \underset{(p,p+1)}{\operatorname{tr}} \overset{2}{\nabla} \underset{\sim}{\mu}(X_0)$$

Jeśli laplasjan istnieje w każdym punkcie obszaru, to jest polem tensorowym o walencji p na tym obszarze.

Definicja 10.5. Niech $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ będzie polem tensorowym o walencji $p \geqslant 1$ w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej ε^3 z kartezjańskim układem odniesienia $(0, \{\underset{\sim}{i}_i\})$. Rotacją pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$ w punkcie $X_0 \in D$ nazywamy tensor $\operatorname{rot} \underset{\sim}{\mu}(X_0) \in \mathcal{T}_p$ określony wzorem

$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{\mu}(X_0) := \underset{(p,p+1)}{\operatorname{tr}} (\nabla \underset{\sim}{\mu}(X_0) \underset{\sim}{E})$$

gdzie $\underset{\sim}{E}$ jest tensorem Ricciego.

Jeśli rotacja istnieje w każdym punkcie obszaru, to jest polem tensorowym o walencji p w tym obszarze.

Twierdzenie 10.2. Niech $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ będzie polem tensorowym w obszarze D przestrzeni ε^n, a $X : D_\varphi \to D$ układem współrzędnych krzywoliniowych w obszarze D, gdzie $D_\varphi \subset R^n$. Jeśli pole tensorowe $\underset{\sim}{\mu}$ w układzie współrzędnych krzywoliniowych ma postać

$$\underset{\sim}{\mu}(\varphi) = u^{\alpha \ldots\ldots \gamma}_{\ldots\beta\ldots}(\varphi) \underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^\beta(\varphi) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}_\gamma(\varphi) \quad \text{dla } \varphi \in D_\varphi$$

to pochodne cząstkowe (o ile istnieją) tego pola określone są wzorami

$$\underset{\sim}{\mu}_{,\delta}(\varphi) = \Big(\mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots,\delta}(\varphi) + \mu^{\psi\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\Gamma^{\alpha}_{\psi\delta}(\varphi) + \ldots$$

$$- \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\psi\cdots}(\varphi)\,\Gamma^{\psi}_{\beta\delta}(\varphi) + \ldots +$$

$$+ \mu^{\alpha\cdots\cdots\psi}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\,\Gamma^{\gamma}_{\psi\delta}(\varphi)\Big)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi)$$

dla $\varphi \in D_{\varphi}$; $\delta = 1,2,\ldots,n$.

Dowód. Korzystając z definicji pochodnej cząstkowej funkcji wielu zmiennych można wykazać, że

$$\underset{\sim}{\mu}_{,\delta}(\varphi) = \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots,\delta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi) +$$

$$+ \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\alpha,\delta}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi) + \ldots +$$

$$+ \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}{}_{,\delta}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi) +$$

$$+ \ldots + \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}_{\gamma,\delta}(\varphi)$$

Z twierdzenia 9.7 otrzymamy

$$\underset{\sim}{\mu}_{,\delta}(\varphi) = \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots,\delta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi) +$$

$$+ \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\left(\Gamma^{\psi}_{\alpha\delta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\psi}(\varphi)\right)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi) + \ldots$$

$$+ \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\left(-\Gamma^{\beta}_{\psi\delta}(\varphi)\underset{\sim}{d}^{\psi}(\varphi)\right)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi) + \ldots$$

$$+ \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\left(\Gamma^{\psi}_{\gamma\delta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\psi}(\varphi)\right)$$

Dokonując zmiany wskaźników sumacyjnych i korzystając z własności p-krotnego iloczynu tensorowego wektorów otrzymamy

$$\underset{\sim}{\mu}_{,\delta}(\varphi) = \Big(\mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots,\delta}(\varphi) + \mu^{\psi\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\,\Gamma^{\alpha}_{\psi\delta}(\varphi) + \ldots$$

$$- \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\psi\cdots}(\varphi)\,\Gamma^{\psi}_{\beta\delta}(\varphi) + \ldots +$$

$$+ \mu^{\alpha\cdots\cdots\psi}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\,\Gamma^{\gamma}_{\psi\delta}(\varphi)\Big)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi)$$

Twierdzenie 10.3. Niech $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ będzie polem tensorowym na obszarze D przestrzeni $\mathcal{E}^n$, a $X : D_\varphi \to D$ układem współrzędnych krzywoliniowych w obszarze D. Jeśli istnieje gradient $\nabla\underset{\sim}{\mu}(X)$ dla $X \in D$ pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$, to w układzie współrzędnych krzywoliniowych przyjmie postać

$$\nabla\underset{\sim}{\mu}(\varphi) = \underset{\sim}{\mu}_{,\delta}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\delta}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

gdzie $\underset{\sim}{\mu}(\varphi) = \underset{\sim}{\mu}(X)$, przy czym $\varphi = \varphi(X)$ lub $X = X(\varphi)$.

Dowód pomijamy.

Bezpośrednio z powyższych twierdzeń wynika:

Wniosek 10.1. Niech $\underset{\sim}{\mu} : D \to \mathcal{T}_p$ będzie polem tensorowym w obszarze $D \subset \mathcal{E}^n$, a $X : D_\varphi \to D$ układem współrzędnych krzywoliniowych w obszarze D, gdzie $D_\varphi \subset R^n$. Niech pole tensorowe $\underset{\sim}{\mu}$ w tym układzie współrzędnych krzywoliniowych ma postać

$$\underset{\sim}{\mu}(\varphi) = \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

1) jeśli istnieje gradient $\nabla\underset{\sim}{\mu}$ pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$, to można go przedstawić w postaci

$$\nabla\underset{\sim}{\mu}(\varphi) = \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots|\delta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi) \otimes \ldots \otimes \underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\delta}(\varphi)$$

dla $\varphi \in D_\varphi$

gdzie współrzędne gradientu określone wzorami

$$\mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots|\delta}(\varphi) := \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots,\delta}(\varphi) + \mu^{\psi\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\,\Gamma^{\alpha}_{\psi\delta}(\varphi) + \ldots -$$

$$- \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\psi\cdots}(\varphi)\,\Gamma^{\psi}_{\beta\delta}(\varphi) + \ldots + \mu^{\alpha\cdots\cdots\psi}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi)\,\Gamma^{\gamma}_{\psi\delta}(\varphi)$$

dla $\varphi \in D_\varphi$; $\alpha, \ldots, \beta, \ldots, \gamma, \delta = 1, \ldots, n$

nazywać będziemy pochodnymi kowariantnymi współrzędnych

$$\mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi; \quad \alpha, \ldots, \beta, \ldots, \gamma = 1, \ldots, n$$

pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$,

2) jeśli istnieje gradient drugiego rzędu $\overset{2}{\nabla}\underset{\sim}{\mu}$ pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$, to można go przedstawić w postaci

$$\overset{2}{\nabla}\underset{\sim}{\mu}(\varphi) = \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots|\delta\omega}(\varphi)\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\otimes\ldots\otimes\underset{\sim}{d}_{\gamma}(\varphi)\otimes\underset{\sim}{d}^{\delta}(\varphi)\otimes\underset{\sim}{d}^{\omega}(\varphi)$$

dla $\varphi \in D_\varphi$

gdzie współrzędne gradientu drugiego rzędu określone wzorami

$$\mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma\cdot\cdot}_{\cdots\beta\cdots|\delta\omega}(\varphi) := \mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma\cdot\cdot}_{\cdots\beta\cdots|\delta|\omega}(\varphi)$$

dla $\varphi \in D_\varphi$; $\alpha,\ldots,\beta,\ldots,\gamma,\delta,\omega = 1,\ldots,n$

nazywać będziemy drugimi pochodnymi kowariantnymi współrzędnych

$$\mu^{\alpha\cdots\cdots\gamma}_{\cdots\beta\cdots}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi; \quad \alpha,\ldots,\beta,\ldots,\gamma = 1,\ldots,n$$

pola tensorowego $\underset{\sim}{\mu}$.

Podobny wniosek można wysnuć dla gradientów wyższych rzędów.

Aby znaleźć gradient k-tego rzędu pola tensorowego wystarczy znaleźć k-tą pochodną kowariantną dowolnej reprezentacji tego pola w układzie współrzędnych krzywoliniowych.

Twierdzenie 10.4. Niech $X : D_\varphi \longrightarrow D$ będzie układem współrzędnych krzywoliniowych w obszarze D przestrzeni euklidesowej punktowej $\mathcal{E}^n$. Jeśli tensor jednostkowy w obszarze D w krzywoliniowym układzie współrzędnych przedstawimy w postaci

$$\underset{\sim}{1} = g_{\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi)\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

to zachodzą tożsamości

$$g_{\alpha\beta|\gamma}(\varphi) = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,\ldots,n$$

Dowód. Ponieważ tensor jednostkowy $\underset{\sim}{1} \in \mathcal{T}_2$ w obszarze D jest polem tensorowym stałym, zatem $\nabla\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{0}$. Z wniosku 10.1 wynika, że

$$\nabla\underset{\sim}{1} = g_{\alpha\beta|\gamma}(\varphi)\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi)\otimes\underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\otimes\underset{\sim}{d}^{\gamma}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

Zatem $\nabla\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$g_{\alpha\beta|\gamma}(\varphi) = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,\ldots,n; \quad \varphi \in D_\varphi$$

Rozpisując tezę tego twierdzenia otrzymamy

$$g_{\alpha\beta,\gamma}(\varphi) - g_{\delta\beta}(\varphi)\Gamma^{\delta}_{\alpha\gamma}(\varphi) - g_{\alpha\delta}(\varphi)\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}(\varphi) = 0 \quad \text{dla } \varphi\in D_{\varphi}$$

P r z y k ł a d 10.3. Niech $\psi : \mathcal{E}^3 \longrightarrow R$ będzie polem skalarnym klasy C^2 w układzie współrzędnych walcowych $\psi(\varphi)$ dla $\varphi\in D_{\varphi}$.

a) znajdziemy gradient tego pola skalarnego w układzie walcowym.

Z wniosku 10.1 wynika, że

$$\nabla\psi(\varphi) = \psi_{|\alpha}(\varphi)\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi\in D_{\varphi}$$

przy czym pochodne kowariantne mają postać

$$\psi_{|\alpha}(\varphi) = \psi_{,\alpha}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi\in D_{\varphi};\ \alpha = 1,2,3$$

zatem otrzymamy

$$\nabla\psi = \psi_{,1}\,\underset{\sim}{d}^1 + \psi_{,2}\,\underset{\sim}{d}^2 + \psi_{,3}\,\underset{\sim}{d}^3$$

Zapiszemy ten gradient we współrzędnych fizycznych, więc

$$\nabla\psi(\varphi) = \hat{\psi}_{|\alpha}(\varphi)\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi\in D_{\varphi}$$

Z zależności między współrzędnymi a fizycznymi współrzędnymi mamy

$$\hat{\psi}(\varphi) = \psi(\varphi) \quad \text{i} \quad \hat{\psi}_{|\alpha}(\varphi) = \psi_{|\alpha}(\varphi)\sqrt{g^{\alpha\alpha}(\varphi)} \ \text{dla } \alpha = 1,2,3;\ \varphi\in D_{\varphi}$$

a stąd otrzymamy

$$\hat{\psi}_{|1} = \hat{\psi}_{,1};\quad \hat{\psi}_{|2} = \hat{\psi}_{,2}\frac{1}{\varphi^1};\quad \hat{\psi}_{|3} = \hat{\psi}_{,3}$$

Oznaczając tradycyjnie: $\varphi^1 = r$, $\varphi^2 = \varphi$, $\varphi^3 = z$; $\hat{\underset{\sim}{d}}^1 = \hat{\underset{\sim}{d}}_1 = \underset{\sim}{d}_r$, $\hat{\underset{\sim}{d}}^2 = \hat{\underset{\sim}{d}}_2 = \underset{\sim}{d}_{\varphi}$, $\hat{\underset{\sim}{d}}^3 = \hat{\underset{\sim}{d}}_3 = \underset{\sim}{d}_z$; $\hat{\psi} = \psi$ dostaniemy

$$\nabla\psi = \psi_{,r}\underset{\sim}{d}_r + \frac{1}{r}\psi_{,\varphi}\underset{\sim}{d}_{\varphi} + \psi_{,z}\underset{\sim}{d}_z$$

b) znajdziemy drugi gradient tego pola skalarnego w układzie współrzędnych walcowych. Z wniosku 10.1 mamy

$$\overset{2}{\nabla}\psi(\varphi) = \psi_{|\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi) \qquad \text{dla} \quad \varphi \in D_{\varphi}$$

przy czym drugie pochodne kowariantne mają postać

$$\psi_{|\alpha\beta}(\varphi) = \psi_{,\alpha|\beta}(\varphi) = \psi_{,\alpha\beta}(\varphi) - \psi_{,\gamma}(\varphi)\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\varphi) \qquad \text{dla} \quad \varphi \in D\,; \quad \alpha, \beta = 1,2,3$$

Stąd otrzymamy

$$\psi_{|11} = \psi_{,11} \qquad \psi_{|21} = \psi_{,21} - \frac{1}{\varphi^1}\psi_{,2} \qquad \psi_{|31} = \psi_{,31}$$

$$\psi_{|12} = \psi_{,12} - \frac{1}{\varphi^1}\psi_{,2} \qquad \psi_{|22} = \psi_{,22} + \varphi^1\psi_{,1} \qquad \psi_{|32} = \psi_{,32}$$

$$\psi_{|13} = \psi_{,13} \qquad \psi_{|23} = \psi_{,23} \qquad \psi_{|33} = \psi_{,33}$$

Zatem

$$\overset{2}{\nabla}\psi = \psi_{,11}\underset{\sim}{d}^1 \otimes \underset{\sim}{d}^1 + \left(\psi_{,12} - \frac{1}{\varphi^1}\psi_{,2}\right)(\underset{\sim}{d}^1 \otimes \underset{\sim}{d}^2 + \underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{d}^1) +$$
$$+ \psi_{,13}(\underset{\sim}{d}^1 \otimes \underset{\sim}{d}^3 + \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{d}^1) + (\psi_{,22} + \varphi^1\psi_{,1})\underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 +$$
$$+ \psi_{,23}(\underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{d}^3 + \underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{d}^2) + \psi_{,33}\underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{d}^3$$

Zapiszemy ten drugi gradient we współrzędnych fizycznych, więc

$$\overset{2}{\nabla}\psi(\varphi) = \widehat{\psi}_{|\alpha\beta}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}^{\beta}(\varphi) \qquad \text{dla} \quad \varphi \in D_{\varphi}$$

Z zależności między współrzędnymi a fizycznymi współrzędnymi mamy

$$\psi(\varphi) = \hat{\psi}(\varphi) \quad \text{i} \quad \widehat{\psi}_{|\alpha\beta}(\varphi) = \psi_{|\alpha\beta}(\varphi)\sqrt{g^{\alpha\alpha}(\varphi)}\sqrt{g^{\beta\beta}(\varphi)}$$

dla $\alpha, \beta = 1,2,3$; $\varphi \in D_{\varphi}$

a stąd otrzymamy

$$\widehat{\psi_{|11}} = \psi_{,11} = \hat{\psi}_{,11} \qquad \widehat{\psi_{|21}} = \left(\hat{\psi}_{,21} - \frac{1}{\varphi^1}\hat{\psi}_{,2}\right)\frac{1}{\varphi^1} \qquad \widehat{\psi_{|31}} = \hat{\psi}_{,31}$$

$$\widehat{\psi_{|12}} = \left(\hat{\psi}_{,12} - \frac{1}{\varphi^1}\hat{\psi}_{,2}\right)\frac{1}{\varphi^1} \qquad \widehat{\psi_{|22}} = \left(\hat{\psi}_{,22} + \varphi^1\hat{\psi}_{,1}\right)\frac{1}{(\varphi^1)^2} \qquad \widehat{\psi_{|32}} = \psi_{,32}\frac{1}{\varphi^1}$$

$$\widehat{\psi_{|13}} = \hat{\psi}_{,13} \qquad \widehat{\psi_{|23}} = \psi_{,23}\frac{1}{\varphi^1} \qquad \widehat{\psi_{|33}} = \psi_{,33}$$

Oznaczając tradycyjnie dostaniemy

$$\overset{2}{\nabla}\psi = \psi_{,rr}\underset{\sim}{d}_r \otimes \underset{\sim}{d}_r + \left(\psi_{,r} - \frac{1}{r}\psi_{,\varphi}\right)\frac{1}{r}\left(\underset{\sim}{d}_r \otimes \underset{\sim}{d}_\varphi + \underset{\sim}{d}_\varphi \otimes \underset{\sim}{d}_r\right) +$$

$$+ \psi_{,rz}\left(\underset{\sim}{d}_r \otimes \underset{\sim}{d}_z + \underset{\sim}{d}_z \otimes \underset{\sim}{d}_r\right) + \frac{1}{r^2}\left(\psi_{,\varphi\varphi} + r\psi_{,r}\right)\underset{\sim}{d}_\varphi \otimes \underset{\sim}{d}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{r}\psi_{,\varphi z}\left(\underset{\sim}{d}_\varphi \otimes \underset{\sim}{d}_z + \underset{\sim}{d}_z \otimes \underset{\sim}{d}_\varphi\right) + \psi_{,zz}\underset{\sim}{d}_z \otimes \underset{\sim}{d}_z$$

c) znajdziemy laplasjan tego pola skalarnego w układzie walcowym. Z definicji laplasjanu mamy

$$\Delta\psi(\varphi) = \underset{(1,2)}{\mathrm{tr}}\ \overset{2}{\nabla}\psi(\varphi) = \underset{(1,2)}{\mathrm{tr}}\left(\psi_{|\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\right) = \psi_{|\alpha\beta}(\varphi)g^{\alpha\beta}(\varphi)$$

dla $\varphi \in D$

a stąd otrzymamy

$$\Delta\psi = \psi_{,11} + \frac{1}{(\varphi^1)^2}\left(\psi_{,22} + \varphi^1\psi_{,1}\right) + \psi_{,33}$$

Zapiszemy ten laplasjan we współrzędnych fizycznych, więc

$$\Delta\psi(\varphi) = \underset{(1,2)}{\mathrm{tr}}\left(\widehat{\psi_{|\alpha\beta}}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}^{\beta}(\varphi)\right) = \widehat{\psi_{|\alpha\beta}}(\varphi)\hat{g}^{\alpha\beta}(\varphi)$$

Oznaczając tradycyjnie dostaniemy

$$\Delta\psi = \psi_{,rr} + \frac{1}{r^2}\left(\psi_{,\varphi\varphi} + r\psi_{,r}\right) + \psi_{,zz}$$

P r z y k ł a d 10.4. Niech $\underset{\sim}{u} : \mathcal{E}^3 \rightarrow \mathcal{T}_1$ będzie polem wektorowym klasy C^1 danym w układzie współrzędnych walcowych w postaci $\underset{\sim}{u}(\varphi) = u_\alpha(\varphi)\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi)$ dla $\varphi \in D_\varphi$.

a) znajdziemy gradient tego pola wektorowego w układzie walcowym. Z wniosku 10.1 wynika, że

$$\nabla \underset{\sim}{u}(\varphi) = u_{\alpha|\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

przy czym pochodne kowariantne mają postać

$$u_{\alpha|\beta}(\varphi) = u_{\alpha,\beta}(\varphi) - u_\gamma(\varphi)\,\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi;\ \alpha, \beta = 1,2,3$$

stąd otrzymamy

$$u_{1|1} = u_{1,1} \qquad u_{2|1} = u_{2,1} - \frac{1}{\varphi^1} u_2 \qquad u_{3|1} = u_{3,1}$$

$$u_{1|2} = u_{1,2} - \frac{1}{\varphi^1} u_2 \qquad u_{2|2} = u_{2,2} + \varphi^1 u_1 \qquad u_{3|2} = u_{3,2}$$

$$u_{1|3} = u_{1,3} \qquad u_{2|3} = u_{2,3} \qquad u_{3|3} = u_{3,3}$$

Zatem

$$\nabla \underset{\sim}{u} = u_{1,1}\underset{\sim}{d}^1 \otimes \underset{\sim}{d}^1 + \left(u_{1,2} - \frac{1}{\varphi^1} u_2\right)\underset{\sim}{d}^1 \otimes \underset{\sim}{d}^2 + u_{1,3}\underset{\sim}{d}^1 \otimes \underset{\sim}{d}^3 +$$
$$+ \left(u_{2,1} - \frac{1}{\varphi^1} u_2\right)\underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{d}^1 + (u_{2,2} + \varphi^1 u_1)\underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{d}^2 + u_{2,3}\underset{\sim}{d}^2 \otimes \underset{\sim}{d}^3 +$$
$$+ u_{3,1}\underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{d}^1 + u_{3,2}\underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{d}^2 + u_{3,3}\underset{\sim}{d}^3 \otimes \underset{\sim}{d}^3$$

Zapiszemy ten gradient we współrzędnych fizycznych, więc

$$\nabla \underset{\sim}{u}(\varphi) = \hat{u}_{\alpha|\beta}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}^{\beta}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

Z zależności między współrzędnymi a fizycznymi współrzędnymi mamy

$$u_\alpha(\varphi) = \hat{u}_\alpha(\varphi)\frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}(\varphi)}} \quad \text{i} \quad \hat{u}_{\alpha|\beta}(\varphi) = u_{\alpha|\beta}(\varphi)\sqrt{g^{\alpha\alpha}(\varphi)}\sqrt{g^{\beta\beta}(\varphi)}$$

dla $\alpha, \beta = 1,2,3;\ \varphi \in D_\varphi$
stąd otrzymamy

$$u_1 = \hat{u}_1, \qquad u_2 = \hat{u}_2\varphi^1, \qquad u_3 = \hat{u}_3$$

oraz

$$\widehat{u_{1|1}} = u_{1|1} = u_{1,1} = \hat{u}_{1,1}$$

$$\widehat{u_{1|2}} = u_{1|2}\frac{1}{\varphi^1} = \left(u_{1,2} - \frac{1}{\varphi^1}u_2\right)\frac{1}{\varphi^1} = \frac{1}{\varphi^1}\left(\hat{u}_{1,2} - \hat{u}_2\right)$$

$$\widehat{u_{1|3}} = u_{1|3} = u_{1,3} = \hat{u}_{1,3}$$

$$\widehat{u_{2|1}} = u_{2|1}\frac{1}{\varphi^1} = \left(u_{2,1} - \frac{1}{\varphi^1}u_2\right)\frac{1}{\varphi^1} =$$
$$= \frac{1}{\varphi^1}\left((\varphi^1\hat{u}_2)_{,1} - \frac{1}{\varphi^1}\varphi^1\hat{u}_2\right) = \hat{u}_{2,1}$$

$$\widehat{u_{2|2}} = u_{2|2}\frac{1}{(\varphi^1)^2} = (u_{2,2} + \varphi^1 u_1)\frac{1}{(\varphi^1)^2} = \frac{1}{(\varphi^1)^2}\left((\varphi^1\hat{u}_2)_{,2} + \varphi^1\hat{u}_1\right) =$$
$$= \frac{1}{\varphi^1}\left(\hat{u}_{2,2} + \hat{u}_1\right)$$

$$\widehat{u_{2|3}} = u_{2|3}\frac{1}{\varphi^1} = u_{2,3}\frac{1}{\varphi^1} = \frac{1}{\varphi^1}(\varphi^1\hat{u}_2)_{,3} = \hat{u}_{2,3}$$

$$\widehat{u_{3|1}} = u_{3|1} = u_{3,1} = \hat{u}_{3,1}$$

$$\widehat{u_{3|2}} = u_{3|2}\frac{1}{\varphi^1} = \frac{1}{\varphi^1}u_{3,2} = \frac{1}{\varphi^1}\hat{u}_{3,2}$$

$$\widehat{u_{3|3}} = u_{3|3} = u_{3,3} = \hat{u}_{3,3}$$

Tradycyjnie oznaczając: $\varphi^1 = r$, $\varphi^2 = \varphi$, $\varphi^3 = z$; $\hat{\underset{\sim}{d}}_1 = \hat{\underset{\sim}{d}}^1 = \underset{\sim}{d}_r$, $\hat{\underset{\sim}{d}}_2 = \underset{\sim}{d}^2 = \underset{\sim}{d}_\varphi$, $\hat{\underset{\sim}{d}}_3 = \hat{\underset{\sim}{d}}^3 = \underset{\sim}{d}_z$; $\hat{u}_1 = \hat{u}^1 = u_r$, $\hat{u}_2 = \hat{u}^2 = u_\varphi$, $\hat{u}_3 = \hat{u}^3 = u_z$ dostaniemy

$$\nabla\underset{\sim}{u} = u_{r,r}\underset{\sim}{d}_r\otimes\underset{\sim}{d}_r + \frac{1}{r}(u_{r,\varphi} - u_\varphi)\underset{\sim}{d}_r\otimes\underset{\sim}{d}_\varphi + u_{r,z}\underset{\sim}{d}_r\otimes\underset{\sim}{d}_z +$$
$$+ u_{\varphi,r}\underset{\sim}{d}_\varphi\otimes\underset{\sim}{d}_r + \frac{1}{r}(u_{\varphi,\varphi} + u_r)\underset{\sim}{d}_\varphi\otimes\underset{\sim}{d}_\varphi + u_{\varphi,z}\underset{\sim}{d}_\varphi\otimes\underset{\sim}{d}_z +$$
$$+ u_{z,r}\underset{\sim}{d}_z\otimes\underset{\sim}{d}_r + \frac{1}{r}u_{z,\varphi}\underset{\sim}{d}_z\otimes\underset{\sim}{d}_\varphi + u_{z,z}\underset{\sim}{d}_z\otimes\underset{\sim}{d}_z$$

b) znajdziemy dywergencję tego pola wektorowego w układzie walcowym. Z definicji dywergencji mamy

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{u}(\varphi) = \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} \nabla \underset{\sim}{u}(\varphi) = \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} (u_{\alpha|\beta}(\varphi) \underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)) =$$

$$= u_{\alpha|\beta}(\varphi) g^{\alpha\beta}(\varphi) \qquad \text{dla} \quad \varphi \in D_{\varphi}$$

a stąd otrzymamy

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{u} = u_{1,1} + \frac{1}{(\varphi^1)^2}(u_{2,2} + \varphi^1 u_1) + u_{3,3}$$

Zapiszemy tę dywergencję we współrzędnych fizycznych, więc

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{u}(\varphi) = \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} \nabla \underset{\sim}{u}(\varphi) = \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} (\widehat{u}_{\alpha|\beta}(\varphi) \hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}^{\beta}(\varphi)) =$$

$$= \widehat{u}_{\alpha|\beta}(\varphi) g^{\alpha\beta}(\varphi) \qquad \text{dla} \quad \varphi \in D_{\varphi}$$

Oznaczając tradycyjnie, otrzymamy stąd

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{u} = u_{r,r} + \frac{1}{r}(u_{\varphi,\varphi} + u_r) + u_{z,z}$$

c) znajdziemy rotację pola wektorowego we współrzędnych fizycznych układu walcowego.

Z definicji rotacji mamy

$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{u}(\varphi) = \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} (\nabla \underset{\sim}{u}(\varphi) \underset{\sim}{E}) =$$

$$= \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} (\widehat{u}_{\alpha|\beta}(\varphi) \hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi))(\varepsilon^{\gamma\delta\omega} \hat{\underset{\sim}{d}}_{\gamma}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}_{\delta}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}_{\omega}(\varphi)) =$$

$$= \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} (\widehat{u}_{\alpha|\beta}(\varphi) \varepsilon^{\gamma\delta\omega} \delta^{\beta}_{\gamma} \underset{\sim}{d}^{\alpha}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}_{\delta}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}_{\omega}(\varphi)) =$$

$$= \varepsilon^{\gamma\delta\omega} \widehat{u}_{\alpha|\beta}(\varphi) \delta^{\beta}_{\gamma} \delta^{\alpha}_{\gamma} \underset{\sim}{d}_{\omega}(\varphi) = \varepsilon^{\beta\alpha\omega} \widehat{u}_{\alpha|\beta}(\varphi) \hat{\underset{\sim}{d}}_{\omega}(\varphi) =$$

$$= (\widehat{u}_{3|2}(\varphi) - \widehat{u}_{2|3}(\varphi)) \hat{\underset{\sim}{d}}_1(\varphi) + (\widehat{u}_{1|3}(\varphi) - \widehat{u}_{3|1}(\varphi)) \hat{\underset{\sim}{d}}_2(\varphi) +$$

$$+ (\widehat{u}_{2|1}(\varphi) - \widehat{u}_{1|2}(\varphi)) \hat{\underset{\sim}{d}}_3$$

Oznaczając tradycyjnie otrzymamy

$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{u} = \left(\frac{1}{r} u_{z,\varphi} - u_{\varphi,z}\right) \underset{\sim}{d}_r + (u_{r,z} - u_{z,r}) \underset{\sim}{d}_{\varphi} + \left(u_{\varphi,r} - \frac{1}{r}(u_{r,} - u_{\varphi})\right) \underset{\sim}{d}_z$$

P r z y k ł a d 10.5. Niech $\underset{\sim}{T} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{T}_2$ będzie polem tensorowym klasy C^1 danym w układzie współrzędnych walcowych w postaci $\underset{\sim}{T}(\varphi) = T^{\alpha\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}_\beta(\varphi)$ dla $\varphi \in D_\varphi$. Znajdziemy dywergencję div_2 tego pola tensorowego w układzie walcowym.

Z definicji dywergencji mamy

$$\mathrm{div}_2\underset{\sim}{T}(\varphi) = \underset{(2,3)}{\mathrm{tr}}\ \nabla\underset{\sim}{T}(\varphi) = \underset{(2,3)}{\mathrm{tr}}\left(T^{\alpha\beta}{}_{|\gamma}(\varphi)\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}_\beta(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^\gamma(\varphi)\right) =$$

$$= T^{\alpha\beta}{}_{|\gamma}(\varphi)\delta^\gamma_\beta\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) = T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}(\varphi)\underset{\sim}{d}_\alpha(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

przy czym pochodne kowariantne mają postać

$$T^{\alpha\beta}{}_{|\gamma}(\varphi) = T^{\alpha\beta}{}_{,\gamma}(\varphi) + T^{\delta\beta}(\varphi)\Gamma^\alpha_{\delta\gamma}(\varphi) + T^{\alpha\delta}(\varphi)\Gamma^\beta_{\delta\gamma}(\varphi)$$

$$\text{dla} \quad \varphi \in D\ ;\ \alpha, \beta, \gamma = 1,2,3$$

Zatem mamy

$$T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}(\varphi) = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}(\varphi) + T^{\delta\beta}(\varphi)\Gamma^\alpha_{\delta\beta}(\varphi) + T^{\alpha\delta}(\varphi)\Gamma^\beta_{\delta\beta}(\varphi)$$

$$\text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi;\ \alpha = 1,2,3$$

a stąd otrzymamy

$$T^{1\beta}{}_{|\beta} = T^{11}{}_{,1} + T^{12}{}_{,2} + T^{13}{}_{,3} - T^{22}\varphi^1 + T^{11}\frac{1}{\varphi^1}$$

$$T^{2\beta}{}_{|\beta} = T^{21}{}_{,1} + T^{22}{}_{,2} + T^{23}{}_{,3} + T^{12}\frac{1}{\varphi^1} + T^{21}\frac{1}{\varphi^1} + T^{21}\frac{1}{\varphi^1}$$

$$T^{3\beta}{}_{|\beta} = T^{31}{}_{,1} + T^{32}{}_{,2} + T^{33}{}_{,3} + T^{31}\frac{1}{\varphi^1}$$

A więc

$$\mathrm{div}_2\underset{\sim}{T} = \left(T^{11}{}_{,1} + T^{12}{}_{,2} + T^{13}{}_{,3} - \varphi^1 T^{22} + \frac{1}{\varphi^1}T^{11}\right)\underset{\sim}{d}_1 +$$

$$+ \left(T^{21}{}_{,1} + T^{22}{}_{,2} + T^{23}{}_{,3} + \frac{1}{\varphi^1}T^{12} + \frac{2}{\varphi^1}T^{21}\right)\underset{\sim}{d}_2 +$$

$$+ \left(T^{31}{}_{,1} + T^{32}{}_{,2} + T^{33}{}_{,3} + \frac{1}{\varphi^1}T^{31}\right)\underset{\sim}{d}_3$$

Zapiszemy tę dywergencję pola tensorowego we współrzędnych fizycznych, więc

$$\mathrm{div}_2\underset{\sim}{T}(\varphi) = \widehat{T^{\alpha\beta}}{}_{|\beta}(\varphi)\hat{d}_\alpha(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

Z zależności między współrzędnymi a fizycznymi współrzędnymi mamy

$$T^{\alpha\beta}(\varphi) = \hat{T}^{\alpha\beta}(\varphi)\frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}(\varphi)}}\frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}(\varphi)}}$$

i

$$\widehat{T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}}(\varphi) = T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}(\varphi)\sqrt{g_{\alpha\alpha}(\varphi)}$$

dla $\varphi \in D_\varphi$; $\alpha, \beta = 1,2,3$

a stąd otrzymamy

$$T^{11} = \hat{T}^{11} \qquad T^{21} = \hat{T}^{21}\frac{1}{\varphi^1} \qquad T^{31} = \hat{T}^{31}$$

$$T^{12} = \hat{T}^{12}\frac{1}{\varphi^1} \qquad T^{22} = \hat{T}^{22}\frac{1}{(\varphi^1)^2} \qquad T^{32} = \hat{T}^{32}\frac{1}{\varphi^1}$$

$$T^{13} = \hat{T}^{13} \qquad T^{23} = \hat{T}^{23}\frac{1}{\varphi^1} \qquad T^{33} = \hat{T}^{33}$$

oraz

$$\widehat{T^{1\beta}}_{|\beta} = \hat{T}^{11}{}_{,1} + \frac{1}{\varphi^1}\hat{T}^{12}{}_{,2} + \hat{T}^{13}{}_{,3} - \frac{1}{\varphi^1}\hat{T}^{22} + \frac{1}{\varphi^1}\hat{T}^{11}$$

$$\widehat{T^{2\beta}}_{|\beta} = \Big(\Big(\frac{1}{\varphi^1}\hat{T}^{21}\Big)_{,1} + \frac{1}{(\varphi^1)^2}\hat{T}^{22}{}_{,2} + \frac{1}{\varphi^1}\hat{T}^{23}{}_{,3} +$$

$$+ \frac{1}{(\varphi^1)^2}\hat{T}^{12} + \frac{2}{(\varphi^1)^2}\hat{T}^{21}\Big)\varphi^1 =$$

$$= \hat{T}^{21}{}_{,1} + \frac{1}{\varphi^1}\hat{T}^{22}{}_{,2} + \hat{T}^{23}{}_{,3} + \frac{1}{\varphi^1}\hat{T}^{12} + \frac{1}{\varphi^1}\hat{T}^{21}$$

$$\widehat{T^{3\beta}}_{|\beta} = \hat{T}^{31}{}_{,1} + \frac{1}{\varphi^1}\hat{T}^{32}{}_{,2} + \hat{T}^{33}{}_{,3} + \frac{1}{\varphi^1}\hat{T}^{31}$$

Tradycyjnie oznaczając: $\varphi^1 = r$, $\varphi^2 = \varphi$, $\varphi^3 = z$; $\hat{\underset{\sim}{d}}^1 = \hat{\underset{\sim}{d}}_1 = \hat{\underset{\sim}{d}}_r$, $\hat{\underset{\sim}{d}}^2 = \hat{\underset{\sim}{d}}_2 = \underset{\sim}{d}_\varphi$, $\hat{\underset{\sim}{d}}^3 = \hat{\underset{\sim}{d}}_3 = \underset{\sim}{d}_z$, $\hat{T}^{11} = \hat{T}_{11} = T_{rr}$, $\hat{T}^{12} = \hat{T}_{12} = T_{r\varphi}$, $\hat{T}^{13} = \hat{T}_{13} = T_{rz}$, $\hat{T}^{21} = \hat{T}_{21} = T_{\varphi r}$, $\hat{T}^{22} = \hat{T}_{22} = T_{\varphi\varphi}$, $\hat{T}^{23} = \hat{T}_{23} = T_{\varphi z}$, $\hat{T}^{31} = \hat{T}_{31} = T_{zr}$, $\hat{T}^{32} = \hat{T}_{32} = T_{z\varphi}$, $\hat{T}^{33} = \hat{T}_{33} = T_{zz}$ otrzymamy

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_2 \underset{\sim}{T} = & \left(T_{rr,r} + \frac{1}{r} T_{r\varphi,\varphi} + T_{rz,z} + \frac{1}{r} T_{rr} - \frac{1}{r} T_{\varphi\varphi}\right) \underset{\sim}{d}_r + \\ & + \left(T_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} T_{\varphi\varphi,\varphi} + T_{\varphi z,z} + \frac{1}{r} T_{r\varphi} + \frac{1}{r} T_{\varphi r}\right) \underset{\sim}{d}_\varphi + \\ & + \left(T_{zr,r} + \frac{1}{r} T_{z\varphi,\varphi} + T_{zz,z} + \frac{1}{r} T_{zr}\right) \underset{\sim}{d}_z\end{aligned}$$

P r z y k ł a d 10.6. Niech $\psi : \varepsilon^3 \to R$ będzie polem skalarnym klasy C^2 danym w układzie kulistym $\psi(\Theta)$ dla $\Theta \in D_\theta$.

a) znajdziemy gradient pola skalarnego w układzie kulistym. Z wniosku 10.1 wynika, że

$$\nabla\psi(\Theta) = \psi_{|\Omega}(\Theta)\underset{\sim}{h}^{\Omega}(\Theta) \quad \text{dla} \quad \Theta \in D_\theta$$

przy czym pochodne kowariantne mają postać

$$\psi_{|\Omega}(\Theta) = \psi_{,\Omega}(\Theta) \quad \text{dla} \quad \Theta \in D_\theta; \; \Omega = 1,2,3$$

Stąd otrzymamy

$$\nabla\psi = \psi_{,1}\underset{\sim}{h}^1 + \psi_{,2}\underset{\sim}{h}^2 + \psi_{,3}\underset{\sim}{h}^3$$

Zapiszemy ten gradient we współrzędnych fizycznych, więc

$$\nabla\psi(\Theta) = \widehat{\psi}_{|\Omega}(\Theta)\hat{\underset{\sim}{h}}^{\Omega}(\Theta) \quad \text{dla} \quad \Theta \in D_\varphi$$

Z zależności między współrzędnymi a fizycznymi współrzędnymi mamy

$$\psi(\Theta) = \hat{\psi}(\Theta) \quad \text{i} \quad \widehat{\psi}_{|\Omega}(\Theta) = \psi_{|\Omega}(\Theta)\sqrt{g^{\Omega\Omega}(\Theta)} \quad \text{dla } \Theta \in D \; ; \; \Omega = 1,2,3$$

a stąd otrzymamy

$$\widehat{\psi}_{|1} = \hat{\psi}_{,1}, \quad \widehat{\psi}_{|2} = \hat{\psi}_{,2}\frac{1}{\Theta^1 \sin\Theta^3}, \quad \widehat{\psi}_{|3} = \hat{\psi}_{,3}\frac{1}{\Theta^1}$$

Tradycyjnie oznaczając: $\Theta^1 = \varrho$, $\Theta^2 = \varphi$, $\Theta^3 = \vartheta$; $\hat{\underset{\sim}{h}}^1 = \hat{\underset{\sim}{h}}_1 = \underset{\sim}{h}_\varrho$, $\hat{\underset{\sim}{h}}^2 = \hat{\underset{\sim}{h}}_2 = \underset{\sim}{h}_\varphi$, $\hat{\underset{\sim}{h}}^3 = \hat{\underset{\sim}{h}}_3 = \underset{\sim}{h}_\vartheta$; $\hat{\psi} = \psi$ dostaniemy

$$\nabla\psi = \psi_{,\varrho}\underset{\sim}{h}_\varrho + \frac{1}{\varrho\sin\vartheta}\psi_{,\varphi}\underset{\sim}{h}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\psi_{,\vartheta}\underset{\sim}{h}_\vartheta$$

b) znajdziemy drugi gradient tego pola skalarnego w układzie współrzędnych kulistych. Z wniosku 10.1 wynika, że

$$\overset{2}{\nabla}\psi(\theta) = \psi_{|\Omega\Phi}(\theta)\underset{\sim}{h}^{\Omega}(\theta)\otimes h^{\Phi}(\theta) \quad \text{dla} \quad \theta \in D_{\varphi}$$

przy czym drugie pochodne kowariantne mają postać

$$\psi_{|\Omega\Phi}(\theta) = \psi_{,\Omega|\Phi}(\theta) = \psi_{,\Omega\Phi}(\theta) - \psi_{,\mathcal{A}}(\theta)\Gamma^{\mathcal{A}}_{\Omega\Phi}(\theta) \quad \text{dla} \quad \theta\in D\,; \quad \Omega,\Phi = 1,2,3$$

Stąd otrzymamy

$$\psi_{|11} = \psi_{,11}$$

$$\psi_{|12} = \psi_{,12} - \frac{1}{\theta^1}\psi_{,2}$$

$$\psi_{|13} = \psi_{,13} - \frac{1}{\theta^1}\psi_{,3}$$

$$\psi_{|21} = \psi_{,21} - \frac{1}{\theta^1}\psi_{,2}$$

$$\psi_{|22} = \psi_{,22} + \theta^1\sin^2\theta^3\psi_{,1} + \sin\theta^3\cos\theta^3\psi_{,3}$$

$$\psi_{|23} = \psi_{,23} - \operatorname{ctg}\theta^3\psi_{,2}$$

$$\psi_{|31} = \psi_{,31} - \frac{1}{\theta^1}\psi_{,3}$$

$$\psi_{|32} = \psi_{,32} - \operatorname{ctg}\theta^3\psi_{,2}$$

$$\psi_{|33} = \psi_{,33} + \theta^1\psi_{,1}$$

Zatem

$$\overset{2}{\nabla}\psi = \psi_{,11}\underset{\sim}{h}^1\otimes\underset{\sim}{h}^1 + \left(\psi_{,12} - \frac{1}{\theta^1}\psi_{,2}\right)\underset{\sim}{h}^1\otimes\underset{\sim}{h}^2 +$$

$$+ \left(\psi_{,13} - \frac{1}{\theta^1}\psi_{,3}\right)\underset{\sim}{h}^1\otimes\underset{\sim}{h}^3 + \left(\psi_{,21} - \frac{1}{\theta^1}\psi_{,2}\right)\underset{\sim}{h}^2\otimes\underset{\sim}{h}^1 +$$

$$+ \left(\psi_{,22} + \theta^1\sin^2\theta^3\psi_{,1} + \sin\theta^3\cos\theta^3\psi_{,3}\right)\underset{\sim}{h}^2\otimes\underset{\sim}{h}^2 +$$

$$+ (\psi_{,23} - \mathrm{ctg}\,\theta^3 \psi_{,2}) \underset{\sim}{h}^2 \otimes \underset{\sim}{h}^3 + \left(\psi_{,31} - \frac{1}{\theta^1}\psi_{,3}\right)\underset{\sim}{h}^3 \otimes \underset{\sim}{h}^1 +$$

$$+ (\psi_{,32} - \mathrm{ctg}\,\theta^3 \psi_{,2}) \underset{\sim}{h}^3 \otimes \underset{\sim}{h}^2 + (\psi_{,33} + \theta^1 \psi_{,1}) \underset{\sim}{h}^3 \otimes \underset{\sim}{h}^3$$

Zapiszemy ten drugi gradient we współrzędnych fizycznych

$$\overset{2}{\nabla}\psi(\theta) = \widehat{\psi_{|\Omega\Phi}}(\theta) \underset{\sim}{h}^{\Omega}(\theta) \otimes \underset{\sim}{h}^{\Phi}(\theta) \quad \text{dla} \quad \theta \in D_\theta$$

Z zależności między współrzędnymi a fizycznymi współrzędnymi mamy

$$\psi(\theta) = \hat{\psi}(\theta) \qquad \hat{\psi}_{|\Omega\Phi}(\theta) = \psi_{|\Omega\Phi}(\theta)\sqrt{g^{\Omega\Omega}(\theta)}\sqrt{g^{\Phi\Phi}(\theta)}$$

dla $\theta \in D$; $\Omega, \Phi = 1,2,3$

a stąd otrzymamy

$$\widehat{\psi_{|11}} = \hat{\psi}_{,11}$$

$$\widehat{\psi_{|12}} = \left(\hat{\psi}_{,12} - \frac{1}{\theta^1}\hat{\psi}_{,2}\right)\frac{1}{\theta^1 \sin\theta^3}$$

$$\widehat{\psi_{|13}} = \left(\hat{\psi}_{,13} - \frac{1}{\theta^1}\hat{\psi}_{,3}\right)\frac{1}{\theta^1}$$

$$\widehat{\psi_{|21}} = \left(\hat{\psi}_{,21} - \frac{1}{\theta^1}\hat{\psi}_{,2}\right)\frac{1}{\theta^1 \sin\theta^3}$$

$$\widehat{\psi_{|22}} = \left(\hat{\psi}_{,22} + \theta^1 \sin^2\theta^3 \psi_{,1} + \sin\theta^3 \cos\theta^3 \hat{\psi}_{,3}\right)\frac{1}{(\theta^1)^2 \sin^2\theta^2}$$

$$\widehat{\psi_{|23}} = \left(\hat{\psi}_{,23} - \mathrm{ctg}\,\theta^3 \hat{\psi}_{,2}\right)\frac{1}{(\theta^1)^2 \sin\theta^3}$$

$$\widehat{\psi_{|31}} = \left(\hat{\psi}_{,31} - \frac{1}{\theta^1}\hat{\psi}_{,3}\right)\frac{1}{\theta^1}$$

$$\widehat{\psi_{|32}} = (\hat{\psi}_{,32} - \mathrm{ctg}\,\theta^3 \hat{\psi}_{,2})\frac{1}{(\theta^1)^2 \sin\theta^3}$$

$$\widehat{\psi_{|33}} = (\hat{\psi}_{,33} + \theta^1 \hat{\psi}_{,1})\frac{1}{(\theta^1)^2}$$

Oznaczając tradycyjnie dostaniemy

$$\overset{2}{\nabla}\psi = \psi_{,\varrho\varrho} \underset{\sim}{h}_\varrho \otimes \underset{\sim}{h}_\varrho + \frac{1}{\varrho \sin\vartheta}\left(\psi_{,\varrho\varphi} - \frac{1}{\varrho}\psi_{,\varphi}\right)\underset{\sim}{h}_\varrho \otimes \underset{\sim}{h}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\varrho}\left(\psi_{,\varrho\vartheta} - \frac{1}{\varrho}\psi_{,\vartheta}\right)\underset{\sim}{h}_\varrho \otimes \underset{\sim}{h}_\vartheta + \frac{1}{\varrho \sin\vartheta}\left(\psi_{,\varphi\varrho} - \frac{1}{\varrho}\psi_{,\varrho}\right)\underset{\sim}{h}_\varphi \otimes \underset{\sim}{h}_\varrho +$$

$$+\frac{1}{\varrho^2\sin^2\vartheta}(\psi,_{\varphi\varphi}+\varrho\sin^2\vartheta\,\psi,_\varrho+\sin\vartheta\cos\vartheta\,\psi,_\vartheta)\underset{\sim}{h}_\varphi\otimes\underset{\sim}{h}_\varphi+$$

$$+\frac{1}{\varrho^2\sin\vartheta}(\psi,_{\varphi\vartheta}-\operatorname{ctg}\vartheta\,\psi,_\varphi)\underset{\sim}{h}_\varphi\otimes\underset{\sim}{h}_\vartheta+\frac{1}{\varrho}(\psi,_{\vartheta\varrho}-\frac{1}{\varrho}\psi,_\vartheta)\underset{\sim}{h}_\vartheta\otimes\underset{\sim}{h}_\varrho+$$

$$+\frac{1}{\varrho^2\sin\vartheta}(\psi,_{\vartheta\varphi}-\operatorname{ctg}\vartheta\,\psi,_\varphi)\underset{\sim}{h}_\vartheta\otimes\underset{\sim}{h}_\varphi+\frac{1}{\varrho^2}(\psi,_{\vartheta\vartheta}+\varrho\psi,_\varrho)\underset{\sim}{h}_\vartheta\otimes\underset{\sim}{h}_\vartheta$$

c) znajdziemy laplasjan tego pola skalarnego w układzie współrzędnych kulistych. Z definicji laplasjanu mamy

$$\Delta\psi(\theta)=\underset{(1,2)}{\operatorname{tr}}\overset{2}{\nabla}\psi(\theta)=\underset{(1,2)}{\operatorname{tr}}(\psi_{|\Omega\Phi}(\theta)\underset{\sim}{d}^\Omega(\theta)\otimes\underset{\sim}{d}^\Phi(\theta)=$$

$$=\psi_{|\Omega\Phi}(\theta)g^{\Omega\Phi}(\theta)\qquad\text{dla}\quad\theta\in D_\theta$$

a stąd otrzymamy

$$\Delta\psi=\psi,_{11}+(\psi,_{22}+\theta^1\sin^2\theta^3\psi,_1+\sin\theta^3\cos\theta^3\psi,_3)\frac{1}{(\theta^1)^2\sin^2\theta^3}+$$

$$+(\psi,_{33}+\theta^1\psi,_1)\frac{1}{(\theta^1)^2}$$

Zapiszemy ten laplasjan we współrzędnych fizycznych, więc

$$\Delta\psi(\theta)=\underset{(1,2)}{\operatorname{tr}}\overset{2}{\nabla}\psi(\theta)=\underset{(1,2)}{\operatorname{tr}}\widehat{\psi_{|\Omega\Phi}}(\theta)\underset{\sim}{\hat{h}}^\Omega(\theta)\otimes\underset{\sim}{\hat{h}}^\Phi(\theta)=\widehat{\psi_{|\Omega\Phi}}(\theta)\hat{g}^{\Omega\Phi}(\theta)$$

$$\text{dla}\quad\theta\in D_\theta$$

Tradycyjnie oznaczając otrzymamy

$$\Delta\psi=\psi,_{\varrho\varrho}+\frac{1}{\varrho^2\sin^2\vartheta}(\psi,_{\varphi\varphi}+\varrho\sin^2\vartheta\psi,_\varrho+\sin\vartheta\cos\vartheta\,\psi,_\vartheta)+$$

$$+\frac{1}{\varrho^2}(\psi,_{\vartheta\vartheta}+\varrho\psi,_\varrho)$$

P r z y k ł a d 10.7. Niech $\underset{\sim}{u}:\mathcal{E}^3\to\mathcal{T}_1$ będzie polem wektorowym klasy C^1 danym w układzie współrzędnych kulistych w postaci

$$\underset{\sim}{u}(\theta)=u^\Omega(\theta)\underset{\sim}{h}_\Omega(\theta)\quad\text{dla}\quad\theta\in D_\theta$$

a) znajdziemy gradient tego pola wektorowego w układzie kulistym. Z wniosku 10.1 wynika, że

$$\nabla u(\theta) = u^{\Omega}{}_{|\Phi}(\theta)\, \underset{\sim}{h}_{\Omega}(\theta) \otimes \underset{\sim}{h}^{\Phi}(\theta) \quad \text{dla} \quad \theta \in D_\theta$$

przy czym pochodne kowariantne mają postać

$$u^{\Omega}{}_{|\Phi}(\theta) = u^{\Omega}{}_{,\Phi}(\theta) + u^{\mathfrak{A}}(\theta)\,\Gamma^{\Omega}_{\mathfrak{A}\Phi}(\theta) \quad \text{dla} \quad \theta \in D;\ \Omega, \Phi = 1,2,3$$

Stąd otrzymamy

$$u^1{}_{|1} = u^1{}_{,1} \qquad u^2{}_{|1} = u^2{}_{,1} + u^2\frac{1}{\theta^1}$$

$$u^1{}_{|2} = u^1{}_{,2} - u^2\theta^1\sin^2\theta^3, \qquad u^2{}_{|2} = u^2{}_{,2} + u^1\frac{1}{\theta^1} + u^3\operatorname{ctg}\theta^3$$

$$u^1{}_{|3} = u^1{}_{,3} - u^3\theta^1 \qquad u^2{}_{|3} = u^2{}_{,3} + u^2\operatorname{ctg}\theta^3$$

$$u^3{}_{|1} = u^3{}_{,1} + u^3\frac{1}{\theta^1}$$

$$u^3{}_{|2} = u^3{}_{,2} - u^2\sin\theta^3\cos\theta^3$$

$$u^3{}_{|3} = u^3{}_{,3} + u^1\frac{1}{\theta^1}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\nabla \underset{\sim}{u} = {} & u^1{}_{,1}\underset{\sim}{h}_1 \otimes \underset{\sim}{h}^1 + (u^1{}_{,2} - \theta^1\sin^2\theta^3 u^2)\underset{\sim}{h}_1 \otimes \underset{\sim}{h}^2 + \\ & + (u^1{}_{,3} - \theta^1 u^3)\underset{\sim}{h}_1 \otimes \underset{\sim}{h}^3 + \left(u^2{}_{,1} + \frac{1}{\theta^1}u^2\right)\underset{\sim}{h}_2 \otimes \underset{\sim}{h}^1 + \\ & + \left(u^2{}_{,2} + \frac{1}{\theta^1}u^1 + \operatorname{ctg}\theta^3 u^3\right)\underset{\sim}{h}_2 \otimes \underset{\sim}{h}^2 + \\ & + \quad u^2{}_{,3} + \operatorname{ctg}\theta^3 u^2)\underset{\sim}{h}_2 \otimes \underset{\sim}{h}^3 + \left(u^3{}_{,1} + \frac{1}{\theta^1}u^3\right)\underset{\sim}{h}_3 \otimes \underset{\sim}{h}^1 + \\ & + \left(u^3{}_{,2} - \sin\theta^3\cos\theta^3 u^2\right)\underset{\sim}{h}_3 \otimes \underset{\sim}{h}^2 + \left(u^3{}_{,3} + \frac{1}{\theta^1}u^1\right)\underset{\sim}{h}_3 \otimes \underset{\sim}{h}^3\end{aligned}$$

Zapiszemy ten gradient we współrzędnych fizycznych, więc

$$\nabla \underset{\sim}{u}(\theta) = \widehat{u^{\Omega}}{}_{|\Phi}(\theta)\,\hat{\underset{\sim}{h}}_{\Omega}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}^{\Phi}(\theta) \quad \text{dla} \quad \theta \in D_\theta$$

Z zależności między współrzędnymi a fizycznymi współrzędnymi mamy

$$u^{\Omega}(\Theta) = \hat{u}^{\Omega}(\Theta)\frac{1}{\sqrt{g_{\Omega\Omega}(\Theta)}} \quad \text{i} \quad \hat{u}^{\Omega}{}_{|\Phi}(\Theta) = u^{\Omega}{}_{|\Phi}(\Theta)\sqrt{g_{\Omega\Omega}(\Theta)}\sqrt{g^{\Phi\Phi}(\Theta)}$$

dla $\Theta \in D$; $\Omega, \Phi = 1,2,3$

Stąd otrzymamy

$$u^1 = \hat{u}^1, \qquad u^2 = \hat{u}^2\frac{1}{\Theta^1 \sin\Theta^3}, \qquad u^3 = \hat{u}^3\frac{1}{\Theta^1}$$

oraz

$$\widehat{u^1}_{|1} = u^1{}_{|1} = u^1{}_{,1} = \hat{u}^1{}_{,1}$$

$$\widehat{u^1}_{|2} = u^1{}_{|2}\frac{1}{\Theta^1 \sin\Theta^3} = \left(u^1{}_{,2} - u^2\Theta^1\sin^2\Theta^3\right)\frac{1}{\Theta^1\sin\Theta^3} =$$

$$= \frac{1}{\Theta^1\sin\Theta^3}\left(\hat{u}^1{}_{,2} - \sin\Theta^3\hat{u}^2\right)$$

$$\widehat{u^1}_{|3} = u^1{}_{|3}\frac{1}{\Theta^1} = (u^1{}_{,3} - u^3\Theta^1)\frac{1}{\Theta^1} = \frac{1}{\Theta^1}(\hat{u}^1{}_{,3} - \hat{u}^3)$$

$$\widehat{u^2}_{|1} = u^2{}_{|1}\Theta^1\sin\Theta^3 = \left(u^2{}_{,1} + u^2\frac{1}{\Theta^1}\right)\Theta^1\sin\Theta^3 = \left(\left(\hat{u}^2\frac{1}{\Theta^1\sin\Theta^3}\right)_{,1} + \right.$$

$$\left. + \hat{u}^2\frac{1}{(\Theta^1)^2\sin\Theta^3}\right)\Theta^1\sin\Theta^3 = \hat{u}^2{}_{,1}$$

$$\widehat{u^2}_{|2} = u^2{}_{|2} = \left(u^2{}_{,2} + u^1\frac{1}{\Theta^1} + u^3\operatorname{ctg}\Theta^3\right) = \left(\left(\hat{u}^2\frac{1}{\Theta^1\sin\Theta^3}\right)_{,2} + \right.$$

$$\left. + \hat{u}^1\frac{1}{\Theta^1} + \hat{u}^3\frac{\operatorname{ctg}\Theta^3}{\Theta^1}\right) = \frac{1}{\Theta^1}\left(\hat{u}^1 + \frac{1}{\sin\Theta^3}\hat{u}^2{}_{,2} + \operatorname{ctg}\Theta^3\,\hat{u}^3\right)$$

$$\widehat{u^2}_{|3} = u^2{}_{|3}\sin\Theta^3 = (u^2{}_{,3} + u^2\operatorname{ctg}\Theta^3)\sin\Theta^3 = \left(\left(\hat{u}^2\frac{1}{\Theta^1\sin\Theta^3}\right)_{,3} + \right.$$

$$\left. + \hat{u}^2\frac{\operatorname{ctg}\Theta^3}{\Theta^1\sin\Theta^3}\right)\sin\Theta^3 = \frac{1}{\Theta^1}\hat{u}^2{}_{,3}$$

$$\widehat{u^3}_{|1} = u^3{}_{|1}\Theta^1 = \left(u^3{}_{,1} + u^3\frac{1}{\Theta^1}\right)\Theta^1 = \left(\left(\hat{u}^3\frac{1}{\Theta^1}\right)_{,1} + \hat{u}^3\frac{1}{(\Theta^1)^2}\right)\Theta^1 = \hat{u}^3{}_{,1}$$

$$\hat{u}^3{}_{|2} = u^3{}_{|2}\frac{1}{\sin\theta^3} = \left(u^3{}_{,2} - u^2\sin\theta^3\cos\theta^3\right)\frac{1}{\sin\theta^3} =$$

$$= \left(\left(\hat{u}^3\frac{1}{\theta^1}\right)_{,2} - u^2\frac{\cos\theta^3}{\theta^1}\right)\frac{1}{\sin\theta^3} =$$

$$= \frac{1}{\theta^1\sin\theta^3}\left(\hat{u}^3{}_{,2} - \cos\theta^3\hat{u}^2\right)$$

$$\hat{u}^3{}_{|3} = u^3{}_{|3} = u^3{}_{,3} + u^1\frac{1}{\theta^1} = \left(\left(\hat{u}^3\frac{1}{\theta^1}\right)_{,3} + \hat{u}^1\frac{1}{\theta^1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\theta^1}\left(\hat{u}^3{}_{,3} + \hat{u}^1\right)$$

Tradycyjnie oznaczając: $\theta^1 = \varrho$, $\theta^2 = \varphi$, $\theta^3 = \vartheta$; $\hat{\underset{\sim}{h}}^1 = \hat{\underset{\sim}{h}}_1 = \underset{\sim}{h}_\varrho$, $\hat{\underset{\sim}{h}}^2 = \hat{\underset{\sim}{h}}_2 = \underset{\sim}{h}_\varphi$, $\hat{\underset{\sim}{h}}^3 = \hat{\underset{\sim}{h}}_3 = \underset{\sim}{h}_\vartheta$; $\hat{u}^1 = \hat{u}_1 = u_\varrho$, $\hat{u}^2 = \hat{u}_2 = u_\varphi$, $\hat{u}^3 = \hat{u}_3 = u_\vartheta$ dostaniemy

$$\nabla\underset{\sim}{u} = u_{\varrho,\varrho}\underset{\sim}{h}_\varrho\otimes\underset{\sim}{h}_\varrho + \frac{1}{\varrho\sin\vartheta}\left(u_{\varrho,\varphi} - \sin\vartheta\, u_\varphi\right)\underset{\sim}{h}_\varrho\otimes\underset{\sim}{h}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{\varrho}\left(u_{\varrho,\vartheta} - u_\vartheta\right)\underset{\sim}{h}_\varrho\otimes\underset{\sim}{h}_\vartheta + u_{\varphi,\varrho}\underset{\sim}{h}_\varphi\otimes\underset{\sim}{h}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\Big(u_\varrho + \frac{1}{\sin\vartheta}u_{\varphi,\varphi} +$$

$$+ \operatorname{ctg}\vartheta\, u_\vartheta\Big)\underset{\sim}{h}_\varphi\otimes\underset{\sim}{h}_\varphi + \frac{1}{\varrho}u_{\varphi,\vartheta}\underset{\sim}{h}_\varphi\otimes\underset{\sim}{h}_\vartheta + u_{\vartheta,\varrho}\underset{\sim}{h}_\vartheta\otimes\underset{\sim}{h}_\varrho +$$

$$+ \frac{1}{\varrho\sin\vartheta}\left(u_{\vartheta,\varphi} - \cos\vartheta\, u_\varphi\right)\underset{\sim}{h}_\vartheta\otimes\underset{\sim}{h}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\left(u_{\vartheta,\vartheta} + u_\varrho\right)\underset{\sim}{h}_\vartheta\otimes\underset{\sim}{h}_\vartheta$$

b) znajdziemy dywergencję tego pola wektorowego w układzie kulistym. Z definicji dywergencji mamy

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{u}(\theta) = \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}}\nabla u(\theta) = \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}}\, u^\Omega{}_{|\Phi}(\theta)\underset{\sim}{h}_\Omega(\theta)\otimes\underset{\sim}{h}^\Phi(\theta) =$$

$$= u^\Omega{}_{|\Phi}(\theta)\delta^\Phi_\Omega = u^\Omega{}_{|\Omega}(\theta) \qquad \text{dla } \theta\in D_\theta$$

a stąd otrzymamy

$$\operatorname{div}\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}^1{}_{,1} + u^2{}_{,2} + \frac{1}{\theta^1}u^1 + \operatorname{ctg}\theta^3 u^3 + u^3{}_{,3} + \frac{1}{\theta^1}u^1$$

Zapiszemy tę dywergencję we współrzędnych fizycznych, więc

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{u}(\theta) = \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} \nabla \underset{\sim}{u}(\theta) = \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} \widehat{u^{\Omega}}_{|\Phi}(\theta) \hat{\underset{\sim}{h}}_{\Omega}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}^{\Phi}(\theta) =$$

$$= \widehat{u^{\Omega}}_{|\Phi}(\theta)\,\delta^{\Phi}_{\Omega} = \widehat{u^{\Omega}}_{|\Omega}(\theta)$$

Dokonując tradycyjnych oznaczeń otrzymamy

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{u} = u_{\varrho,\varrho} + \frac{1}{\varrho}\left(u_{\varrho} + \frac{1}{\sin\vartheta} u_{\varphi,\varphi} + \operatorname{ctg}\vartheta \; u_{\vartheta}\right) + \frac{1}{\varrho}\left(u_{\vartheta,\vartheta} + u_{\varrho}\right)$$

c) znajdziemy rotację pola wektorowego we współrzędnych fizycznych układu kulistego. Z definicji rotacji mamy

$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{u}(\theta) = \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} (\nabla \underset{\sim}{u}(\theta) \underset{\sim}{E}) =$$

$$= \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} (\widehat{u^{\Omega}}_{|\Phi}(\theta) \underset{\sim}{h}_{\Omega}(\theta) \otimes \underset{\sim}{h}^{\Phi}(\theta))(\varepsilon^{\mathfrak{ABC}} \hat{\underset{\sim}{h}}_{\mathfrak{A}}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}_{\mathfrak{B}}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}_{\mathfrak{C}}(\theta)) =$$

$$= \underset{(1,2)}{\operatorname{tr}} (\hat{u}^{\Omega}{}_{|\Phi}(\theta)\,\varepsilon^{\mathfrak{ABC}} \delta^{\Phi}_{\mathfrak{A}} \hat{\underset{\sim}{h}}_{\Omega}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}_{\mathfrak{B}}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}_{\mathfrak{C}}(\theta) =$$

$$= \varepsilon^{\mathfrak{ABC}} \widehat{u^{\Omega}}_{|\Phi}(\theta) \delta^{\Phi}_{\mathfrak{A}} \hat{g}_{\Omega\mathfrak{B}} \hat{\underset{\sim}{h}}_{\mathfrak{C}}(\theta) = \varepsilon^{\mathfrak{ABC}} \widehat{u}_{\mathfrak{B}|\mathfrak{A}}(\theta) \hat{\underset{\sim}{h}}_{\mathfrak{C}}(\theta) =$$

$$= (\widehat{u_{3|2}}(\theta) - \widehat{u_{2|3}}(\theta)) \underset{\sim}{h}_1(\theta) + (\widehat{u_{1|3}}(\theta) -$$

$$- \widehat{u_{3|1}}(\theta)) \hat{\underset{\sim}{h}}_2(\theta) + (\widehat{u_{2|1}}(\theta) - \widehat{u_{1|2}}(\theta)) \hat{\underset{\sim}{h}}_3(\theta)$$

Oznaczając tradycyjnie dostaniemy

$$\operatorname{rot} \underset{\sim}{u} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{\sin\vartheta} u_{\vartheta,\varphi} - u_{\varphi,\vartheta} - u_{\varphi}\operatorname{ctg}\vartheta\right) \underset{\sim}{h}_{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\left(u_{\varrho,\vartheta} - \varrho u_{\vartheta,\varrho} - u_{\vartheta}\right)\underset{\sim}{h}_{\varphi} +$$

$$+ \frac{1}{\varrho}\left(\varrho u_{\varphi,\varrho} - \frac{1}{\sin\vartheta} u_{\varrho,\varphi} + u_{\varphi}\right)\underset{\sim}{h}_{\vartheta}$$

P r z y k ł a d 10.8. Niech $\underset{\sim}{T} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{T}_2$ będzie polem tensorowym klasy C^1 danym w układzie współrzędnych kulistych w postaci

$$\underset{\sim}{T}(\theta) = T^{\Omega}{}_{\Phi}(\theta) \underset{\sim}{h}_{\Omega}(\theta) \otimes \underset{\sim}{h}^{\Phi}(\theta) \quad \text{dla} \quad \theta \in D_{\theta}$$

Znajdziemy dywergencję div_2 tego pola tensorowego w układzie kulistym. Z definicji dywergencji mamy

$$\operatorname{div}_2 \underset{\sim}{T}(\Theta) = \underset{(2,3)}{\operatorname{tr}} \nabla \underset{\sim}{T}(\Theta) = \underset{(2,3)}{\operatorname{tr}} T^{\Omega}{}_{\Phi|\mathfrak{K}}(\Theta) \underset{\sim}{h}_{\Omega}(\Theta) \otimes \underset{\sim}{h}^{\Phi}(\Theta) \otimes \underset{\sim}{h}^{\mathfrak{K}}(\Theta) =$$

$$= T^{\Omega}{}_{\Phi|\mathfrak{K}}(\Theta) g^{\Phi\mathfrak{K}}(\Theta) \underset{\sim}{h}_{\Omega}(\Theta) \qquad \text{dla} \quad \Theta \in D_{\Theta},$$

przy czym pochodne kowariantne mają postać

$$T^{\Omega}{}_{\Phi|\mathfrak{K}}(\Theta) = T^{\Omega}{}_{\Phi,\mathfrak{K}}(\Theta) + T^{\mathfrak{B}}{}_{\Phi}(\Theta) \Gamma^{\Omega}_{\mathfrak{B}\mathfrak{K}}(\Theta) - T^{\Omega}{}_{\mathfrak{B}}(\Theta) \Gamma^{\mathfrak{B}}_{\Omega\mathfrak{K}}(\Theta)$$

dla $\Theta \in D_{\Theta}$; $\Omega, \Phi, \mathfrak{K} = 1,2,3$

Skąd otrzymamy

$$T^{1}{}_{1|1} = T^{1}{}_{1,1}$$

$$T^{1}{}_{1|2} = T^{1}{}_{1,2} - T^{2}{}_{1}\Theta^{1}\sin^{2}\Theta^{3} - T^{1}{}_{2}\frac{1}{\Theta^{1}}$$

$$T^{1}{}_{1|3} = T^{1}{}_{1,3} - T^{3}{}_{1}\Theta^{1} - T^{1}{}_{3}\frac{1}{\Theta^{1}}$$

$$T^{1}{}_{2|1} = T^{1}{}_{2,3} - T^{1}{}_{2}\frac{1}{\Theta^{1}}$$

$$T^{1}{}_{2|2} = T^{1}{}_{2,2} - T^{2}{}_{2}\Theta^{1}\sin^{2}\Theta^{3} + T^{1}{}_{1}\Theta^{1}\sin^{2}\Theta^{3} + T^{1}{}_{3}\sin\Theta^{3}\cos\Theta^{3}$$

$$T^{1}{}_{2|3} = T^{1}{}_{2,3} - T^{3}{}_{2}\Theta^{1} - T^{1}{}_{2}\operatorname{ctg}\Theta^{3}$$

$$T^{1}{}_{3|1} = T^{1}{}_{3,1} - T^{1}{}_{3}\frac{1}{\Theta^{1}}$$

$$T^{1}{}_{3|2} = T^{2}{}_{3,2} - T^{2}{}_{3}\Theta^{1}\sin^{2}\Theta^{3} - T^{1}{}_{2}\operatorname{ctg}\Theta^{3}$$

$$T^{1}{}_{3|3} = T^{1}{}_{3,3} - T^{3}{}_{3}\Theta^{1} + T^{1}{}_{1}\Theta^{1}$$

$$T^{2}{}_{1|1} = T^{2}{}_{1,1} + T^{2}{}_{1}\frac{1}{\Theta^{1}}$$

$$T^{2}{}_{1|2} = T^{2}{}_{1,2} + T^{1}{}_{1}\frac{1}{\Theta^{1}} + T^{3}{}_{1}\operatorname{ctg}\Theta^{3} - T^{2}{}_{2}\frac{1}{\Theta^{1}}$$

$$T^2{}_{1|3} = T^2{}_{1,3} + T^2{}_1 \operatorname{ctg} \theta^3 - T^2{}_3 \frac{1}{\theta^1}$$

$$T^2{}_{2|1} = T^2{}_{2,1} + T^2{}_2 \frac{1}{\theta^1} - T^2{}_2 \frac{1}{\theta^1} = T^2{}_{2,1}$$

$$T^2{}_{2|2} = T^2{}_{2,2} + T^1{}_2 \frac{1}{\theta^1} + T^3{}_2 \operatorname{ctg} \theta^3 + T^2{}_1 \theta^1 \sin^2\theta^3 + $$
$$+ T^2{}_3 \sin\theta^3 \cos\theta^3$$

$$T^2{}_{2|3} = T^2{}_{2,3} + T^2{}_2 \operatorname{ctg} \theta^3 - T^2{}_2 \operatorname{ctg} \theta^3 = T^2{}_{2,3}$$

$$T^2{}_{3|1} = T^2{}_{3,1} + T^2{}_3 \frac{1}{\theta^1} - T^2{}_3 \frac{1}{\theta^1} = T^2{}_{3,1}$$

$$T^2{}_{3|2} = T^2{}_{3,2} + T^1{}_3 \frac{1}{\theta^1} + T^3{}_3 \operatorname{ctg} \theta^3 - T^2{}_2 \operatorname{ctg} \theta^3$$

$$T^2{}_{3|3} = T^2{}_{3,3} + T^2{}_3 \operatorname{ctg} \theta^3 + T^2{}_1 \theta^1$$

$$T^3{}_{1|1} = T^3{}_{1,1} + T^3{}_1 \frac{1}{\theta^1}$$

$$T^3{}_{2|1} = T^3{}_{2,1} + T^3{}_2 \frac{1}{\theta^1} - T^3{}_2 \frac{1}{\theta^1} = T^3{}_{2,1}$$

$$T^3{}_{2|2} = T^3{}_{2,2} - T^2{}_2 \sin\theta^3 \cos\theta^3 + T^3{}_1 \theta^1 \sin^2\theta^3 + $$
$$+ T^3{}_3 \sin\theta^3 \cos\theta^3$$

$$T^3{}_{2|3} = T^3{}_{2,3} + T^1{}_2 \frac{1}{\theta^1} - T^3{}_2 \operatorname{ctg} \theta^3$$

$$T^3{}_{3|1} = T^3{}_{3,1} + T^3{}_3 \frac{1}{\theta^1} - T^3{}_3 \frac{1}{\theta^1} = T^3{}_{3,1}$$

$$T^3{}_{3|2} = T^3{}_{3,2} - T^2{}_3 \sin\theta^3 \cos\theta^3 - T^3{}_2 \operatorname{ctg} \theta^3$$

$$T^3{}_{3|3} = T^3{}_{3,3} + T^1{}_3 \frac{1}{\theta^1} + T^3{}_1 \theta^1$$

oraz

$$T^1{}_{\Phi|\mathfrak{K}} g^{\Phi\mathfrak{K}} = T^1{}_{1,1} + \left(T^1{}_{2,2} - T^2{}_2 \theta^1 \sin^2\theta^3 + T^1{}_1 \theta^1 \sin^2\theta^3 + T^1{}_3 \sin\theta^3 \cos\theta^3\right)$$
$$\frac{1}{(\theta^1)^2 \sin^2\theta^3} + \left(T^1{}_{3,3} - T^3{}_3 \theta^1 + T^1{}_1 \theta^1\right) \frac{1}{(\theta^1)^2}$$

$$
\begin{aligned}
T^2{}_{\Phi|\mathfrak{K}}\, g^{\Phi\mathfrak{K}} = {} & \left(T^2{}_{1,1} + T^2{}_1 \frac{1}{\theta^1}\right) + \left(T^2{}_{2,2} + T^1{}_2 \frac{1}{\theta^1} + T^3{}_2 \operatorname{ctg} \theta^3 + \right. \\
& \left. + T^2{}_1 \theta^1 \sin^2\theta^3 + T^2{}_3 \sin\theta^3 \cos\theta^3\right) \frac{1}{(\theta^1)^2 \sin^2\theta^3} + \\
& + \left(T^2{}_{3,3} + T^2{}_3 \operatorname{ctg}\theta^3 + T^2{}_1 \theta^1\right) \frac{1}{(\theta^1)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T^3{}_{\Phi|\mathfrak{K}}\, g^{\Phi\mathfrak{K}} = {} & \left(T^3{}_{1,1} + T^3{}_1 \frac{1}{\theta^1}\right) + \left(T^3{}_{2,2} - T^2{}_2 \sin\theta^3 \cos\theta^3 + \right. \\
& \left. + T^3{}_1 \theta^1 \sin^2\theta^3 + T^3{}_3 \sin\theta^3 \cos\theta^3\right) \frac{1}{(\theta^1)^2 \sin^2\theta^3} + \\
& + \left(T^3{}_{3,3} + T^1{}_3 \frac{1}{\theta^1} + T^3{}_1 \theta^1\right) \frac{1}{(\theta^1)^2}
\end{aligned}
$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_2 \underset{\sim}{T} = {} & \left(T^1{}_{1,1} + \frac{1}{(\theta^1)^2 \sin^2 3} T^1{}_{2,2} + \frac{1}{(\theta^1)^2} T^1{}_{3,3} + \frac{2}{\theta^1} T^1{}_1 + \right. \\
& \left. + \frac{\operatorname{ctg}\theta^3}{(\theta^1)^2} T^1{}_3 - \frac{1}{\theta^1} T^2{}_2 - \frac{1}{\theta^1} T^3{}_3\right) \underset{\sim}{h}_1 + (T^2{}_{1,1} + \\
& + \frac{1}{(\theta^1)^2 \sin^2\theta^3} T^2{}_{2,2} + \frac{1}{(\theta^1)^2} T^2{}_{3,3} + \frac{1}{(\theta^1)^3 \sin^2\theta^3} T^1{}_2 + \\
& + \frac{3}{\theta^1} T^2{}_1 + \frac{2\operatorname{ctg}\theta^3}{(\theta^1)^2} T^2{}_3 + \frac{\operatorname{ctg}\theta^3}{(\theta^1)^2 \sin^2\theta^3} T^3{}_2\Big) \underset{\sim}{h}_2 + \\
& + \left(T^3{}_{1,1} + \frac{1}{(\theta^1)^2 \sin^2\theta^3} T^3{}_{2,2} + \frac{1}{(\theta^1)^2} T^3{}_{3,3} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(\theta^1)^3} T^1{}_3 - \frac{\operatorname{ctg}\theta^3}{(\theta^1)^2} T^2{}_2 + \frac{3}{(\theta^1)^2} T^3{}_1 + \frac{\operatorname{ctg}\theta^3}{(\theta^1)^2} T^3{}_3\right) \underset{\sim}{h}_3
\end{aligned}
$$

Zapiszemy dywergencję tego pola tensorowego we współrzędnych fizycznych, więc

$$
\operatorname{div}_2 \underset{\sim}{T}(\theta) = \underset{(2,3)}{\operatorname{tr}} \nabla \underset{\sim}{T}(\theta) = T^{\Omega}{}_{\Phi|\mathfrak{K}}(\theta) g^{\Phi\mathfrak{K}}(\theta) \underset{\sim}{h}_{\Omega}(\theta) = \hat{T}^{\Omega}(\theta) \underset{\sim}{h}_{\Omega}(\theta)
$$

Z zależności między współrzędnymi a fizycznymi współrzędnymi mamy

$$T^{\Omega}_{\ \Phi}(\Theta) = \hat{T}^{\ \Omega}_{\ \Phi}(\Theta)\,\frac{1}{\sqrt{g_{\Omega\Omega}(\Theta)}}\,\frac{1}{\sqrt{g^{\Phi\Phi}(\Theta)}} \text{ i } \hat{T}^{\Omega}(\Theta) = T^{\Omega}_{\ \Phi|\mathfrak{K}}(\Theta)\,g^{\Phi\mathfrak{K}}(\Theta)\sqrt{g_{\Omega\Omega}(\Theta)}$$

dla $\Theta \in D_{\Theta}$; $\Omega, \Phi = 1,2,3$
a stąd otrzymamy

$$T^1_{\ 1} = \hat{T}^1_{\ 1} \qquad T^2_{\ 1} = \hat{T}^2_{\ 1}\,\frac{1}{\Theta^1 \sin\Theta^3} \qquad T^3_{\ 1} = \hat{T}^3_{\ 1}\,\frac{1}{\Theta^1}$$

$$T^1_{\ 2} = \hat{T}^1_{\ 2}\,\Theta^1 \sin\Theta^3 \qquad T^2_{\ 2} = \hat{T}^2_{\ 2} \qquad T^3_{\ 3} = \hat{T}^3_{\ 2}\sin\Theta^3$$

$$T^1_{\ 3} = T^1_{\ 3}\,\Theta^1 \qquad T^2_{\ 3} = \hat{T}^2_{\ 3}\,\frac{1}{\sin\Theta^3} \qquad T^3_{\ 3} = \hat{T}^3_{\ 3}$$

oraz

$$\hat{T}^1 = \hat{T}^1_{\ 1,1} + \frac{1}{(\Theta^1)^2\sin^2\Theta^3}\left(\hat{T}^1_{\ 2}\,\Theta^1\sin\Theta^3\right)_{,2} + \frac{1}{(\Theta^1)^2}\left(\hat{T}^1_{\ 3}\,\Theta^1\right)_{,3} +$$

$$+ \frac{2}{\Theta^1}\hat{T}^1_{\ 1} + \frac{\operatorname{ctg}\Theta^3}{\Theta^1}\hat{T}^1_{\ 3} - \frac{1}{\Theta^1}\hat{T}^2_{\ 2} - \frac{1}{\Theta^1}\hat{T}^3_{\ 3} =$$

$$= \hat{T}^1_{\ 1,1} + \frac{1}{\Theta^1\sin\Theta^3}\hat{T}^1_{\ 2,2} + \frac{1}{\Theta^1}\hat{T}^1_{\ 3,3} + \frac{2}{\Theta^1}\hat{T}^1_{\ 1} +$$

$$+ \frac{\operatorname{ctg}\Theta^3}{\Theta^1}\hat{T}^1_{\ 3} - \frac{1}{\Theta^1}\hat{T}^2_{\ 2} - \frac{1}{\Theta^1}\hat{T}^3_{\ 3}$$

$$\hat{T}^2 = \left(\left(\hat{T}^2_{\ 1}\,\frac{1}{\Theta^1\sin\Theta^3}\right)_{,1} + \frac{1}{(\Theta^1)^2\sin^2\Theta^3}\hat{T}^2_{\ 2,2} +\right.$$

$$+ \frac{1}{(\Theta^1)^2}\left(\hat{T}^2_{\ 3}\,\frac{1}{\sin\Theta^3}\right)_{,3} + \frac{1}{(\Theta^1)^2\sin\Theta^3}\hat{T}^1_{\ 2} +$$

$$\left.+ \frac{3}{(\Theta^1)^2\sin\Theta^3}\hat{T}^2_{\ 1} + \frac{2\operatorname{ctg}\Theta^3}{(\Theta^1)^2\sin\Theta^3}\hat{T}^2_{\ 3} + \frac{\operatorname{ctg}\Theta^3}{\Theta^1\sin\Theta^3}\hat{T}^3_{\ 2}\right)\Theta^1\sin\Theta^3 =$$

$$= \hat{T}^2_{\ 1,1} + \frac{1}{\Theta^1\sin\Theta^3}\hat{T}^2_{\ 2,2} + \frac{1}{\Theta^1}\hat{T}^2_{\ 3,3} + \frac{2}{\Theta^1}\hat{T}^2_{\ 1} + \frac{1}{\Theta^1}\hat{T}^1_{\ 2} +$$

$$+ \frac{\operatorname{ctg}\Theta^3}{\Theta^1}\hat{T}^3_{\ 2} + \frac{\operatorname{ctg}\Theta^3}{\Theta^1}\hat{T}^2_{\ 3}$$

$$\hat{T}^3 = \left(\left(\hat{T}^3{}_1 \frac{1}{\theta^1}\right)_{,1} + \frac{1}{(\theta^1)^2 \sin^2\theta^3} (\hat{T}^3{}_2 \sin\theta^3)_{,2} + \frac{1}{(\theta^1)^2} \hat{T}^3{}_{3,3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\theta^1)^2} \hat{T}^1{}_3 - \frac{\mathrm{ctg}\,\theta^3}{(\theta^1)^2} \hat{T}^2{}_2 + \frac{3}{(\theta^1)^2} \hat{T}^3{}_1 + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta^3}{(\theta^1)^2} \hat{T}^3{}_3 \right)\theta^1 =$$

$$= \hat{T}^3{}_{1,1} + \frac{1}{\theta^1 \sin\theta^3} \hat{T}^3{}_{2,2} + \frac{1}{\theta^1} \hat{T}^3{}_{3,3} + \frac{1}{\theta^1} \hat{T}^1{}_3 - \frac{\mathrm{ctg}\,\theta^3}{\theta^1} \hat{T}^2{}_2 +$$

$$+ \frac{2}{\theta^1} \hat{T}^3{}_1 + \frac{\mathrm{ctg}\,\theta^3}{\theta^1} \hat{T}^3{}_3$$

Tradycyjnie oznaczając: $\theta^1 = \varrho$, $\theta^2 = \varphi$, $\theta^3 = \vartheta$; $\hat{\underset{\sim}{h}}^1 = \hat{\underset{\sim}{h}}_1 = \hat{h}_\varrho$, $\hat{\underset{\sim}{h}}^2 = \hat{\underset{\sim}{h}}_2 = \underset{\sim}{h}_\varphi$, $\hat{\underset{\sim}{h}}^3 = \hat{\underset{\sim}{h}}_3 = \underset{\sim}{h}_\vartheta$; $\hat{T}^1{}_1 = \hat{T}_{11} = T_{\varrho\varrho}$, $\hat{T}^1{}_2 = \hat{T}_{12} = T_{\varrho\varphi}$, $\hat{T}^1{}_3 = \hat{T}_{13} = T_{\varrho\vartheta}$, $\hat{T}^2{}_1 = \hat{T}_{21} = T_{\varphi\varrho}$, $\hat{T}^2{}_2 = \hat{T}_{22} = T_{\varphi\varphi}$, $\hat{T}^2{}_3 = \hat{T}_{23} = T_{\varphi\vartheta}$, $\hat{T}^3{}_1 = \hat{T}_{31} = T_{\vartheta\varrho}$, $\hat{T}^3{}_2 = \hat{T}_{32} = T_{\vartheta\varphi}$, $\hat{T}^3{}_3 = \hat{T}_{33} = T_{\vartheta\vartheta}$, dostaniemy

$$\mathrm{div}_2 \underset{\sim}{T} = \Big(T_{\varrho\varrho,\varrho} + \frac{1}{\varrho\sin\vartheta} T_{\varrho\varphi,\varrho} + \frac{1}{\varrho} T_{\varrho\vartheta,\vartheta} +$$

$$+ \frac{1}{\varrho}(2T_{\varrho\varrho} - T_{\varphi\varphi} - T_{\vartheta\vartheta} + \mathrm{ctg}\,\vartheta\, T_{\varrho\vartheta})\Big)\underset{\sim}{h}_\varrho +$$

$$+ \Big(T_{\varphi\varrho,\varrho} + \frac{1}{\varrho\sin\vartheta} T_{\varphi\varphi,\varphi} + \frac{1}{\varrho} T_{\varphi\vartheta,\vartheta} +$$

$$+ \frac{1}{\varrho}(2T_{\varphi\varrho} + T_{\varrho\varphi} + \mathrm{ctg}\,\vartheta\, T_{\vartheta\varphi} + \mathrm{ctg}\,\vartheta\, T_{\varphi\vartheta})\Big)\underset{\sim}{h}_\varphi +$$

$$+ \Big(T_{\vartheta\varrho,\varrho} + \frac{1}{\varrho\sin\vartheta} T_{\vartheta\varphi,\varphi} + \frac{1}{\varrho} T_{\vartheta\vartheta,\vartheta} +$$

$$+ \frac{1}{\varrho}(T_{\varrho\vartheta} + 2T_{\vartheta\varrho} - \mathrm{ctg}\,\vartheta\, T_{\varphi\varphi} + \mathrm{ctg}\,\vartheta\, T_{\vartheta\vartheta})\Big)\underset{\sim}{h}_\vartheta$$

P r z y k ł a d 10.9. Niech ciało materialne zajmuje w konfiguracji początkowej obszar D przestrzeni euklidesowej $\mathcal{E}^3$ i niech

$\underset{\sim}{u} : D \to \mathcal{T}_1$ będzie polem wektorowym przemieszczeń ciała,

$\underset{\sim}{E} : D \to \mathcal{T}_2^s$ będzie symetrycznym polem tensorowym odkształceń ciała,

$\underset{\sim}{F} : D \to \mathcal{T}_1$ będzie polem wektorowym sił masowych,

$\underset{\sim}{T} : D \to \mathcal{T}_2^s$ będzie symetrycznym polem tensorowym naprężeń w ciele.

Wtedy związki geometryczne w teorii nieskończenie małych odkształceń mają postać

$$\underset{\sim}{E}(x) = \frac{1}{2}\left(\nabla \underset{\sim}{u}(x) + \nabla^T u(x)\right) \quad \text{dla} \quad x \in D$$

a równania równowagi

$$\mathrm{div}_2 \underset{\sim}{T}(x) + \underset{\sim}{F}(x) = \underset{\sim}{0} \quad \text{dla} \quad x \in D$$

a) zapiszemy związki geometryczne we współrzędnych fizycznych układu walcowego. Niech

$$\underset{\sim}{E}(\varphi) = \hat{E}_{\alpha\beta}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}^{\beta}(\varphi) \quad \text{i} \quad \nabla \underset{\sim}{u}(\varphi) = \widehat{u_{\alpha|\beta}}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}^{\beta}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

Wtedy otrzymamy kolejno

$$\hat{E}_{\alpha\beta}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}^{\beta}(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\widehat{u_{\alpha|\beta}}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}^{\beta}(\varphi) + \left(\widehat{u_{\alpha|\beta}}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\right)^T\right) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

$$\hat{E}_{\alpha\beta}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}^{\beta}(\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\widehat{u_{\alpha|\beta}}(\varphi) + \widehat{u_{\beta|\alpha}}(\varphi)\right)\hat{\underset{\sim}{d}}^{\alpha}(\varphi) \otimes \hat{\underset{\sim}{d}}^{\beta}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi$$

Stąd mamy

$$\hat{\underset{\sim}{E}}_{\alpha\beta}(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\widehat{u_{\alpha|\beta}}(\varphi) + \widehat{u_{\beta|\alpha}}(\varphi)\right) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_\varphi;\ \alpha, \beta = 1,2,3$$

Tradycyjnie oznaczając i korzystając z wyników przykładu 10.4 dostaniemy

$$E_{rr} = u_{r,r} \qquad\qquad E_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}\left(u_{\varphi,\varphi} + u_r\right)$$

$$E_{r\varphi} = E_{\varphi r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}u_{r,\varphi} + u_{\varphi,r} - \frac{1}{r}u_\varphi\right) \qquad E_{\varphi z} = E_{z\varphi} = \frac{1}{2}\left(u_{\varphi,z} + \frac{1}{r}u_{z,\varphi}\right)$$

$$E_{rz} = E_{zr} = \frac{1}{2}\left(u_{r,z} + u_{z,r}\right) \qquad\qquad E_{zz} = u_{z,z}$$

b) zapiszemy równania równowagi we współrzędnych fizycznych układu walcowego. Niech

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{T}(\varphi) = \widehat{T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}}\,\hat{\underset{\sim}{d}}_{\alpha}(\varphi) \quad \text{i} \quad \underset{\sim}{F}(\varphi) = \hat{F}^{\alpha}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}_{\alpha}(\varphi) \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_{\varphi}$$

Wtedy otrzymamy

$$T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}_{\alpha}(\varphi) + \hat{F}^{\alpha}(\varphi)\hat{\underset{\sim}{d}}_{\alpha}(\varphi) = 0 \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_{\varphi}$$

Stąd mamy

$$\widehat{T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}} + \hat{F}^{\alpha}(\varphi) = 0 \quad \text{dla} \quad \varphi \in D_{\varphi}; \quad \alpha = 1,2,3$$

Tradycyjnie oznaczając i korzystając z wyników przykładu 10.5 otrzymamy

$$T_{rr},_{r} + \frac{1}{r}\,T_{r\varphi},_{\varphi} + T_{rz},_{z} + \frac{1}{r}\,(T_{rr} - T_{\varphi\varphi}) + F_{r} = 0$$

$$T_{r\varphi},_{r} + \frac{1}{r}\,T_{\varphi\varphi},_{\varphi} + T_{\varphi z},_{z} + \frac{2}{r}\,T_{r\varphi} + F_{\varphi} = 0$$

$$T_{rz},_{z} + \frac{1}{r}\,T_{\varphi z},_{\varphi} + T_{zz},_{z} + \frac{1}{r}\,T_{rz} + F_{z} = 0$$

c) zapiszemy związki geometryczne we współrzędnych fizycznych układu kulistego. Niech

$$\underset{\sim}{E}(\theta) = \hat{E}_{\Omega\Phi}(\theta)\hat{\underset{\sim}{h}}^{\Omega}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}^{\Phi}(\theta) \quad \text{i} \quad \nabla \underset{\sim}{u}(\theta) = \widehat{u_{\Omega|\Phi}}(\theta)\hat{\underset{\sim}{h}}^{\Omega}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}^{\Phi}(\theta)$$

dla $\theta \in D_{\theta}$

Wtedy kolejno otrzymamy

$$\hat{E}_{\Omega\Phi}(\theta)\hat{\underset{\sim}{h}}^{\Omega}(\theta) \otimes \underset{\sim}{h}^{\Phi}(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\widehat{u_{\Omega|\Phi}}(\theta)\hat{\underset{\sim}{h}}^{\Omega}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}^{\Phi}(\theta) + \widehat{u_{\Omega|\Phi}}(\theta)\hat{\underset{\sim}{h}}^{\Omega}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}^{\Phi}(\theta)^{T}) \quad \text{dla} \quad \theta \in D_{\theta}$$

$$\hat{E}_{\Omega\Phi}(\theta)\hat{\underset{\sim}{h}}^{\Omega}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}^{\Phi}(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(\widehat{u_{\Omega|\Phi}}(\theta) + \widehat{u_{\Phi|\Omega}}(\theta))\hat{\underset{\sim}{h}}^{\Omega}(\theta) \otimes \hat{\underset{\sim}{h}}^{\Phi}(\theta) \quad \text{dla} \quad \theta \in D_{\theta}$$

Stąd mamy

$$\hat{E}_{\Omega\Phi}(\theta) = \frac{1}{2}\,(\widehat{u_{\Omega|\Phi}}(\theta) + \widehat{u_{\Phi|\Omega}}(\theta)) \quad \text{dla} \quad \theta \in D; \ \Omega\,,\ \Phi = 1,2,3$$

Tradycyjnie oznaczając i korzystając z wyników przykładu 10.9 otrzymamy

$$E_{\varrho\varrho} = u_{\varrho,\varrho}$$
$$E_{\varrho\vartheta} = E_{\vartheta\varrho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho\sin\vartheta}\, u_{\varrho,\varphi} + u_{\varphi,\varrho} - \frac{1}{\varrho}\, u_{\varphi}\right)$$
$$E_{\varrho\vartheta} = E_{\vartheta\varrho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho}\, u_{\varrho,\vartheta} + u_{\vartheta,\varrho} - \frac{1}{\varrho}\, u_{\vartheta}\right)$$
$$E_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\, u_{\varphi,\varphi} + u_{\varrho} + u_{\vartheta}\operatorname{ctg}\vartheta\right)$$
$$E_{\varphi\vartheta} = E_{\vartheta\varphi} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\varrho}\left(u_{\varphi,\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\, u_{\vartheta,\varphi} - \operatorname{ctg}\vartheta\ u_{\varphi}\right)$$
$$E_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{\varrho}\,(u_{\vartheta,\vartheta} + u_{\varrho})$$

d) zapiszemy równania równowagi we współrzędnych fizycznych układu kulistego. Niech

$$\operatorname{div} \underset{\sim}{T}(\theta) = \widehat{T^{\Omega}}(\theta)\underset{\sim}{\hat{h}}_{\Omega}(\theta) \qquad i \qquad \underset{\sim}{F}(\theta) = \hat{F}^{\Omega}(\theta)\underset{\sim}{\hat{h}}_{\Omega}(\theta) \qquad \text{dla} \quad \theta \in D_{\theta}$$

Wtedy otrzymamy

$$\hat{T}^{\Omega}(\theta)\underset{\sim}{\hat{h}}_{\Omega}(\theta) + \hat{F}^{\Omega}(\theta)\hat{h}_{\Omega}(\theta) = 0 \quad \text{dla} \quad \theta \in D_{\theta}$$

Stąd mamy

$$\widehat{T^{\Omega}}(\theta) + \hat{F}^{\Omega}(\theta) = 0 \quad \text{dla} \quad \theta \in D\ ;\ \Omega = 1,2,3$$

Tradycyjnie oznaczając i korzystając z wyników przykładu 10.8 otrzymamy

$$T_{\varrho\varrho,\varrho} + \frac{1}{\varrho\sin\vartheta}\, T_{\varrho\varphi,\varrho} + \frac{1}{\varrho}\, T_{\varrho\vartheta,\vartheta} + \frac{1}{\varrho}\,(2T_{\varrho\varrho} - T_{\varphi\varphi} - T_{\vartheta\vartheta} + \operatorname{ctg}\vartheta\, T_{\varrho\vartheta}) + F_{\varrho} = 0$$

$$T_{\varrho\varphi,\varrho} + \frac{1}{\varrho\sin\vartheta}\, T_{\varphi\varphi,\varrho} + \frac{1}{\varrho}\, T_{\varphi\vartheta,\vartheta} + \frac{1}{\varrho}\,(3T_{\varrho\varphi} + 2\operatorname{ctg}\vartheta\, T_{\varphi\vartheta}) + F_{\varphi} = 0$$

$$T_{\varrho\vartheta,\varrho} + \frac{1}{\varrho \sin\vartheta} T_{\varphi\vartheta,\varphi} + \frac{1}{\varrho} T_{\vartheta\vartheta,\vartheta} + \frac{1}{\varrho}(3T_{\varrho\vartheta} - \operatorname{ctg}\vartheta\, T_{\varphi\varphi} + \operatorname{ctg}\vartheta\, T_{\vartheta\vartheta}) + F_{\vartheta} = 0$$

10.3. Zadania

Zadanie 10.1. Niech pole wektorowe $\underset{\sim}{a} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{T}_1$ ma reprezentację

$$[a_{\Omega}(\Theta)] = \begin{bmatrix} \ln \Theta^1 \\ \sin \Theta^2 \\ \cos \Theta^3 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{h}^{\Omega}(\Theta)\} \text{ dla } \Theta = (\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \in D_{\Theta}$$

we współrzędnych sferycznych.

Znaleźć gradient, dywergencję i laplasjan tego pola.

Zadanie 10.2. Niech pole tensorowe $A : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{T}_1$ ma reprezentację

$$A^{\alpha}{}_{\beta}(\varphi) = \begin{bmatrix} \ln \varphi^1 & \sin \varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^2\varphi^3 \\ \cos \varphi^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\}$$

dla $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) \in D_{\varphi}$ we współrzędnych walcowych.

Znaleźć gradient, div_1 i div_2 tego pola.

Zadanie 10.3. Niech będzie dane pole tensorowe $\underset{\sim}{T} : D \to \mathcal{T}_2$ klasy C^2 w obszarze $D \subset \mathcal{E}^3$ o reprezentacji $[T^{\alpha}{}_{\beta}(\varphi)]$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}_{\alpha}(\varphi) \otimes \underset{\sim}{d}^{\beta}(\varphi)\}$ dla $\varphi \in D_{\varphi}$ we współrzędnych krzywoliniowych.

a) wyprowadzić wzór na reprezentację drugiego gradientu (drugą pochodną kowariantną) tego pola,

b) wyprowadzić wzór na reprezentację laplasjanu tego pola.

LITERATURA

1. Jeżewski M., Muszyński J., Żekanowski Z.: Matematyka. Cz.II. WPW, Warszawa 1976.
2. Gołąb S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1962.