Tensor $\underset{\sim}{A}'$ nazywamy odwrotnym do tensora $\underset{\sim}{A}$ i oznaczamy przez $\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$, więc $\underset{\sim}{A}' = \overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$.

Można wykazać, że zachodzą warunki:

1) jeśli tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ jest odwracalny, to tensor odwrotny $\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$ jest odwracalny i zachodzi wzór $\left(\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}\right)^{-1} = \underset{\sim}{A}$,

2) jeśli tensory $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2$ są odwracalne, to tensor $\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2$ jest odwracalny i zachodzi wzór $(\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B})^{-1} = \overset{-1}{\underset{\sim}{B}}\,\overset{-1}{\underset{\sim}{A}}$.

Definicja 7.2. Tensorem transponowanym do tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy tensor $\underset{\sim}{A}^T \in \mathcal{T}_2$ taki, że

$$\underset{\sim}{A}^T := (2,1) * \underset{\sim}{A}$$

gdzie $(2,1)$ jest permutacją z grupy permutacji $\sum_2 = \{(1,2),\ (2,1)\}$.

Łatwo wykazać, że transpozycja tensorów ma własności:

1) $\bigwedge_{\alpha \in R} \bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2} (\alpha \underset{\sim}{A})^T = \alpha \underset{\sim}{A}^T$

2) $\bigwedge_{\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2} (\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B})^T = \underset{\sim}{A}^T + \underset{\sim}{B}^T$

3) $\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2} (\underset{\sim}{A}^T)^T = \underset{\sim}{A}$

4) $\bigwedge_{\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2} (\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{B})^T = \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{A}^T$

5) $\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2} (\overset{-1}{\underset{\sim}{A}})^T = (\underset{\sim}{A}^T)^{-1}$ o ile tensor $\underset{\sim}{A}$ jest odwracalny.

7.2. Rozkład tensora na część symetryczną i antysymetryczną oraz kulistą i dewiatorową

Definicja 7.3:

a) tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy symetrycznym, jeśli $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^T$,

b) tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy antysymetrycznym, jeśli $\underset{\sim}{A} = -\underset{\sim}{A}^T$.

Twierdzenie 7.3. Tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ jest symetryczny (antysymetryczny) wtedy i tylko wtedy, gdy jego reprezentacja w bazie typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ lub $\{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ przestrzeni $\mathcal{T}_2$ jest macierzą symetryczną (antysymetryczną).

Dowód. Weźmy bazę typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$. Wtedy otrzymamy

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^{ij} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$$

$$\underset{\sim}{A}^T = (2,1) * \underset{\sim}{A} = (2,1) * (A^{ij} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) = A^{ij} \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i = A^{ji} \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$$

Stąd wynika, że tensor $\underset{\sim}{A}$ jest symetryczny, tzn. $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^T$, wtedy i tylko wtedy, gdy $A^{ij} = A^{ji}$ dla $i,j = 1,\dots,n$, co oznacza, że macierz $[A^{ij}]$ jest symetryczna. Zatem reprezentacja $[A^{ij}]$ tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ jest macierzą symetryczną.

Dla tensora antysymetrycznego dowód przebiega podobnie.

Twierdzenie 7.4. Każdy tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$\underset{\sim}{A} = \overset{s}{\underset{\sim}{A}} + \overset{a}{\underset{\sim}{A}}$$

gdzie: $\overset{s}{\underset{\sim}{A}} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{A}^T)$ jest częścią symetryczną tensora $\underset{\sim}{A}$,

$\overset{a}{\underset{\sim}{A}} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{A}^T)$ jest częścią antysymetryczną tensora $\underset{\sim}{A}$.

Dowód. Dla dowolnego tensora $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ z własności transpozycji tensorów otrzymamy

$$(\overset{s}{\underset{\sim}{A}})^T = \left(\frac{1}{2}(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{A}^T)\right)^T = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{A}^T)^T = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{A}^T + (\underset{\sim}{A}^T)^T) =$$

$$= \frac{1}{2}(\underset{\sim}{A}^T + \underset{\sim}{A}) = \overset{s}{\underset{\sim}{A}}$$

$$(\overset{a}{\underset{\sim}{A}})^T = \left(\frac{1}{2}(\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{A}^T)\right)^T = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{A}^T)^T = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{A}^T - (\underset{\sim}{A}^T)^T) =$$

$$= \frac{1}{2}(\underset{\sim}{A}^T - \underset{\sim}{A}) = -\overset{a}{\underset{\sim}{A}}$$

Stąd wynika, że tensor $\overset{s}{\underset{\sim}{A}}$ jest symetryczny, a tensor $\overset{a}{\underset{\sim}{A}}$ antysymetryczny. Łatwo zauważyć, że $\underset{\sim}{A} = \overset{s}{\underset{\sim}{A}} + \overset{a}{\underset{\sim}{A}}$.

Twierdzenie 7.5. Niech $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$. Wtedy zachodzą warunki:

1) zbiory tensorów symetrycznych $\mathcal{T}_2^s = \{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 : \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^T\}$ i antysymetrycznych $\mathcal{T}_2^a = \{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 : \underset{\sim}{A} = -\underset{\sim}{A}^T\}$ są podprzestrzeniami ortogonalnymi przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$ o wymiarach odpowiednio

$$\dim \mathcal{T}_2^s = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \dim \mathcal{T}_2^a = \frac{n(n-1)}{2}$$

2) przestrzeń tensorowa $\mathcal{T}_2$ jest sumą prostą podprzestrzeni tensorów symetrycznych $\mathcal{T}_2^s$ i antysymetrycznych $\mathcal{T}_2^a$, tzn. $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2^s \oplus \mathcal{T}_2^a$.

Dowód

1) wykażemy, że zbiory tensorów symetrycznych $\mathcal{T}_2^s$ i antysymetrycznych $\mathcal{T}_2^a$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni $\mathcal{T}_2$.

Ponieważ dla dowolnych tensorów $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2^s$ i dowolnej liczby $\alpha \in R$ mamy

$$(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B})^T = \underset{\sim}{A}^T + \underset{\sim}{B}^T = \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}, \quad \text{stąd} \quad \underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2^s$$

$$(\alpha \underset{\sim}{A})^T = \alpha \underset{\sim}{A}^T = \alpha \underset{\sim}{A}, \qquad \text{stąd} \quad \alpha \underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2^s$$

Zatem z twierdzenia 1.2 wnioskujemy, że zbiór $\mathcal{T}_2^s$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathcal{T}_2$. Podobnie dowodzi się, że zbiór $\mathcal{T}_2^a$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathcal{T}_2$.

Znajdziemy wymiary podprzestrzeni liniowych $\mathcal{T}_2^s$ i $\mathcal{T}_2^a$ w przypadku gdy $n = 3$. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ będzie bazą przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$.

Tensor symetryczny $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2^s$ można przedstawić w postaci

$$\underset{\sim}{A} = A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = A^{11}\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_1 + A^{12}\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + A^{13}\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + A^{21}\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1 +$$

$$+ A^{22}\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + A^{23}\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + A^{31}\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1 + A^{32}\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + A^{33}\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3 =$$

$$= A^{11}\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_1 + A^{22}\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + A^{33}\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + A^{12}(\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1) +$$
$$+ A^{13}(\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1) + A^{23}(\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2)$$

ponieważ z twierdzenia 7.3 wynika, że $A^{12} = A^{21}$, $A^{13} = A^{31}$, $A^{23} = A^{32}$. Zatem bazę podprzestrzeni tensorów symetrycznych $\mathcal{T}_2^s$ stanowi zbiór tensorów symetrycznych $\{\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_1,\ \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2,\ \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3,\ \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1,\ \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1,\ \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2\}$. Stąd wynika, że $\dim \mathcal{T}_2^s = \frac{3(3+1)}{2} = 6$.

Tensor antysymetryczny $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2^a$ można przedstawić w postaci

$$\underset{\sim}{A} = A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = A^{11}\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_1 + A^{12}\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + A^{13}\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + A^{21}\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1 +$$
$$+ A^{22}\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + A^{23}\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + A^{31}\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1 + A^{32}\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + A^{33}\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3 =$$
$$= A^{12}(\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1) + A^{13}(\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 - \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1) +$$
$$+ A^{23}(\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 - \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2)$$

ponieważ z twierdzenia 7.3 wynika, że $A^{11} = A^{22} = A^{33} = 0$, $A^{12} = -A^{21}$, $A^{13} = -A^{31}$, $A^{23} = -A^{32}$. Zatem bazę podprzestrzeni tensorów antysymetrycznych $\mathcal{T}_2^a$ stanowi zbiór tensorów antysymetrycznych $\{\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1,\ \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 - \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1,\ \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 - \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2\}$. Stąd wynika, że $\dim \mathcal{T}_2^a = \frac{3(3-1)}{2} = 3$.

Wykażemy, że podprzestrzenie tensorów symetrycznych $\mathcal{T}_2^s$ i antysymetrycznych $\mathcal{T}_2^a$ są ortogonalne w przypadku gdy $n = 3$. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^k \otimes \underset{\sim}{e}^l\}$ będą bazami przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$. Wtedy dla dowolnych tensorów $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2^s$ i $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2^a$ iloczyn skalarny

$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} = (A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) \circ (B_{kl}\underset{\sim}{e}^k \otimes \underset{\sim}{e}^l) = A^{ij}B_{kl}\delta_i^k\delta_j^l = A^{ij}B_{ij} =$$
$$= A^{11}B_{11} + A^{12}B_{12} + A^{13}B_{13} + A^{21}B_{21} + A^{22}B_{22} + A^{23}B_{23} +$$
$$+ A^{31}B_{31} + A^{32}B_{32} + A^{33}B_{33} = A^{11}B_{11} + A^{22}B_{22} + A^{33}B_{33} +$$
$$+ A^{12}(B_{12} + B_{21}) + A^{13}(B_{13} + B_{31}) + A^{23}(B_{23} + B_{32}) = 0$$

ponieważ z twierdzenia 7.3 wynika, że $B_{11} = B_{22} = B_{33} = 0$, $A^{12} = A^{21}$, $A^{13} = A^{31}$, $A^{23} = A^{32}$, $B_{12} = -B_{21}$, $B_{13} = -B_{31}$, $B_{23} = -B_{32}$. Zatem podprzestrzenie $\mathcal{T}_2^s$ i $\mathcal{T}_2^a$ są ortogonalne.

2) dowód wynika z twierdzenia 7.4.

P r z y k ł a d 7.1. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$\left[A^i{}_\alpha\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

i dana jest zależność

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = 2\underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = 3\underset{\sim}{e}_1 - \underset{\sim}{e}_2 - 3\underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = -\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 \end{cases}$$

Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ przestrzeni euklidesowej E^3 ma postać

$$\underset{\sim}{d}^\alpha = g^{i\alpha}\underset{\sim}{e}_i \quad \text{dla } \alpha = 1,2,3, \quad \text{stąd} \quad g^{i\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Korzystając z wzorów podanych w twierdzeniu 3.5 otrzymamy

$$\left[g_{\alpha i}\right] = \left[g^{i\alpha}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) znajdziemy rozkład tensora $\underset{\sim}{A}$ na część symetryczną i antysymetryczną w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$.

Korzystając z twierdzenia 7.4 mamy

$$\overset{s}{\underset{\sim}{A}} = \frac{1}{2}\,(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{A}^T) = \frac{1}{2}\,(A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j + A^{ij}\underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j + A^{ji}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) = \frac{1}{2}\,(A^{ij} + A^{ji})\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$$

$$\overset{a}{\underset{\sim}{A}} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{A}^T) = \frac{1}{2}(A^{ij}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j - A^{ij}\underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i) =$$

$$= \frac{1}{2}(A^{ij} - A^{ji})\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$$

Stąd wynika, że

$$\overset{s}{A}{}^{ij} = \frac{1}{2}(A^{ij} + A^{ji}) \quad \text{dla} \quad i,j = 1,2,3$$

są współrzędnymi tensora $\overset{s}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$;

$$\overset{a}{A}{}^{ij} = \frac{1}{2}(A^{ij} - A^{ji}) \quad \text{dla} \quad i,j = 1,2,3$$

są współrzędnymi tensora $\overset{a}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$, przy czym

$$A^{ij} = A^i_{\alpha} g^{j\alpha} \quad \text{dla} \quad i,j = 1,2,3$$

Z powyższych wzorów łatwo znaleźć reprezentacje $[\overset{s}{A}{}^{ij}]$ i $[\overset{a}{A}{}^{ij}]$ tensorów $\overset{s}{\underset{\sim}{A}}$ i $\overset{a}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$, więc

$$[A^{ij}] = [A^i_{\alpha}][g^{\alpha j}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -7 \\ 5 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$[\overset{s}{A}{}^{ij}] = \frac{1}{2}\left([A^{ij}] + [A^{ij}]^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 9 & -4 & -7 \\ 5 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ -4 & -3 & 0 \\ -7 & -3 & -6 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -6 \end{bmatrix}$$

$$[\overset{a}{A}{}^{ij}] = \frac{1}{2}\left([A^{ij}] - [A^{ij}]^T\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 9 & -4 & -7 \\ 5 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ -4 & -3 & 0 \\ -7 & -3 & -6 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{9}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{11}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem

$$\overset{s}{\underset{\sim}{A}} = 9\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_1 + \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1\right) - \frac{3}{2}\left(\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1\right) -$$

$$- 3\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 - \frac{3}{2}\left(\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 + \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2\right) - 6\,\underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3$$

$$\overset{a}{\underset{\sim}{A}} = -\frac{9}{2}\left(\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_1\right) - \frac{11}{2}\left(\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_3 - \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_1\right) -$$

$$- \frac{3}{2}\left(\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3 - \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_2\right)$$

b) znajdziemy reprezentację części symetrycznej i antysymetrycznej tensora $\underset{\sim}{A}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}\}$.

Korzystając z twierdzenia 7.4 mamy

$$\overset{s}{\underset{\sim}{A}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{A}^T\right) = \frac{1}{2}\left(A^i{}_{\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} + A^i{}_{\alpha}\underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \underset{\sim}{e}_i\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(A^i{}_{\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} + A^j{}_{\beta}(g^{\beta i}\underset{\sim}{e}_i) \otimes (g_{j\alpha}\underset{\sim}{d}^{\alpha})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(A^i{}_{\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} + A^j{}_{\beta}g^{\beta i}g_{j\alpha}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(A^i{}_{\alpha} + A^j{}_{\beta}g^{\beta i}g_{j\alpha}\right)\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(A^i{}_{\alpha} + A_{\alpha}{}^i\right)\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}$$

$$\overset{a}{\underset{\sim}{A}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{A}^T\right) = \frac{1}{2}\left(A^i{}_{\alpha} - A_{\alpha}{}^i\right)\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}$$

Stąd wynika, że

$$\overset{s}{A}{}^i{}_{\alpha} = \frac{1}{2}\left(A^i{}_{\alpha} + A_{\alpha}{}^i\right) \quad \text{dla} \quad i,\alpha = 1,2,3$$

są współrzędnymi tensora $\overset{s}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}\}$

$$\overset{a}{A}{}^{i}{}_{\alpha} = \frac{1}{2}\,(A^{i}{}_{\alpha} - A_{\alpha}{}^{i}) \quad \text{dla} \quad i,\alpha = 1,2,3$$

są współrzędnymi tensora $\overset{a}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}\}$, przy czym

$$A_{\alpha}{}^{i} = A^{j}{}_{\beta}\, g^{i\beta} g_{\alpha j} \quad \text{dla} \quad i,\alpha = 1,2,3$$

Z powyższych wzorów łatwo znaleźć reprezentacje $[\overset{s}{A}{}^{i}{}_{\alpha}]$ i $[\overset{a}{A}{}^{i}{}_{\alpha}]$ tensorów $\overset{s}{\underset{\sim}{A}}$ i $\overset{a}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^{\alpha}\}$, zatem

$$[A_{\alpha}{}^{i}] = [g_{\alpha j}][A^{j}{}_{\beta}][g^{\beta i}] =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & -21 & -42 \\ -18 & 7 & 16 \\ 37 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$[\overset{s}{A}{}^{i}{}_{\alpha}] = \frac{1}{2}\left([A^{i}{}_{\alpha}] + [A_{\alpha}{}^{i}]^{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 50 & -18 & 37 \\ -21 & 7 & -17 \\ -42 & 16 & -29 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 25\frac{1}{2} & -8 & 18 \\ -10\frac{1}{2} & 4 & -9\frac{1}{2} \\ -21 & 9 & -13\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\overset{a}{A}{}^{i}{}_{\alpha}] = \frac{1}{2}\left([A^{i}{}_{\alpha}] - [A_{\alpha}{}^{i}]^{T}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 50 & -18 & 37 \\ -21 & 7 & -17 \\ -42 & 16 & -29 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -24\frac{1}{2} & 10 & -19 \\ 10\frac{1}{2} & -3 & 7\frac{1}{2} \\ 21 & -7 & 15\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Tensor z przestrzeni $\mathcal{T}_2$ najwygodniej jest rozkładać na część symetryczną i antysymetryczną w bazie typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ lub $\{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$.

Definicja 7.4:

a) tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy kulistym, jeśli ma postać $\underset{\sim}{A} = \alpha \underset{\sim}{1}$, gdzie $\alpha \in R$,

b) tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ nazywamy dewiatorowym, jeśli tr $\underset{\sim}{A} = 0$.

Twierdzenie 7.6

1) tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ jest kulisty wtedy i tylko wtedy, gdy jego reprezentacja w bazie typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ lub $\{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ jest macierzą diagonalną,

2) tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ jest dewiatorowy wtedy i tylko wtedy, gdy jego reprezentacja w bazie typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ lub $\{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$ jest macierzą o śladzie równym zeru.

Dowód. Weźmy bazę typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ przestrzeni $\mathcal{T}_2$ i tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$.

1) tensor $\underset{\sim}{A} = A^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j$ jest kulisty, jeśli jest równy tensorowi $\alpha \underset{\sim}{1} = \alpha \delta^i{}_j \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j$, a to zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

$$A^i{}_j = \alpha \delta^i{}_j \quad \text{dla} \quad i,j = 1,2,3$$

Zatem $[A^i{}_j] = [\alpha \delta^i{}_j]$, gdzie $\delta^i{}_j$ jest symbolem Kroneckera.

2) ponieważ tr $\underset{\sim}{A}$ = tr $A^i{}_j\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j = A^i{}_j \delta^j{}_i = A^i{}_i = \mathrm{tr}[A^i{}_j]$, to stąd wynika, że tensor $\underset{\sim}{A}$ jest dewiatorowy, tzn. tr $\underset{\sim}{A} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{tr}[A^i{}_j] = 0$.

Twierdzenie 7.7. Niech $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$. Wtedy każdy tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$\underset{\sim}{A} = \overset{k}{\underset{\sim}{A}} + \overset{d}{\underset{\sim}{A}}$$

gdzie: $\overset{k}{\underset{\sim}{A}} = \left(\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{A}\right)\underset{\sim}{1}$ jest częścią kulistą tensora $\underset{\sim}{A}$,

$\overset{d}{\underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{A} - \left(\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{A}\right)\underset{\sim}{1}$ jest częścią dewiatorową tensora $\underset{\sim}{A}$.

Dowód. Niech tensor $A \in \mathcal{T}_2$. Wtedy $\frac{1}{n}$ tr $\underset{\sim}{A} \in R$, a więc tensor $\overset{k}{\underset{\sim}{A}} = \left(\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{A}\right)\underset{\sim}{1}$ jest kulisty i $\mathrm{tr}\left(\underset{\sim}{A} - \left(\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{A}\right)\underset{\sim}{1}\right) = $
$= \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{A} - \frac{1}{n}\,(\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{A})\, \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{1} = \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{A} - \frac{1}{n}\,(\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{A})n = 0$, a więc tensor

$\overset{d}{\underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{A} - \left(\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A}\right)\underset{\sim}{1}$ jest dewiatorowy. Łatwo zauważyć również, że $\underset{\sim}{A} = \overset{k}{\underset{\sim}{A}} + \overset{d}{\underset{\sim}{A}}$.

<u>Twierdzenie</u> 7.8. Niech $\mathcal{T}_2 = E^n \otimes E^n$. Wtedy zachodzą warunki:

1) zbiory tensorów kulistych $\mathcal{T}_2^k := \{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 : \underset{\sim}{A} = \alpha \underset{\sim}{1}$ dla $\alpha \in R\}$ i dewiatorowych $\mathcal{T}_2^d := \{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 : \mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A} = 0\}$ są podprzestrzeniami liniowymi ortogonalnymi przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$ o wymiarach odpowiednio $\dim \mathcal{T}_2^k = 1$ i $\dim \mathcal{T}_2^d = n^2 - 1$,

2) przestrzeń tensorowa $\mathcal{T}_2$ jest sumą prostą podprzestrzeni tensorów kulistych $\mathcal{T}_2^k$ i dewiatorowych $\mathcal{T}_2^d$, tzn. $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2^k \otimes \mathcal{T}_2^d$.

Dowód

1) wykażemy, że zbiory tensorów kulistych $\mathcal{T}_2^k$ i dewiatorowych $\mathcal{T}_2^d$ są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$.

Ponieważ suma dowolnych tensorów kulistych (dewiatorowych) jest tensorem kulistym (dewiatorowym) i iloczyn dowolnego tensora kulistego (dewiatorowego) przez dowolną liczbę rzeczywistą jest tensorem kulistym (dewiatorowym), zatem z twierdzenia 1.2 wynika, że zbiór tensorów kulistych $\mathcal{T}_2^k$ (dewiatorowych $\mathcal{T}_2^d$) jest podprzestrzenią liniową przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$.

Znajdziemy wymiary podprzestrzeni liniowych $\mathcal{T}_2^k$ i $\mathcal{T}_2^d$ w przypadku gdy $n = 3$.

Niech $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ będzie bazą przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$. Bazę w przestrzeni tensorów kulistych $\mathcal{T}_2^k$ stanowi tensor kulisty $\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}^1 + \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}^2 + \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}^3$, a stąd wynika, że $\dim \mathcal{T}_2^k = 1$. Bazę w podprzestrzeni tensorów dewiatorowych $\mathcal{T}_2^d$ stanowi zbiór tensorów dewiatorowych $\{\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}^2,\ \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}^3,\ \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}^1,$ $\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}^3,\ \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}^1,\ \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}^2,\ \underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}^1 - \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}^2,\ \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}^2 - \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}^3\}$, a stąd wynika, że $\dim \mathcal{T}_2^d = n^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$.

Wykażemy, że podprzestrzenie tensorów kulistych $\mathcal{T}_2^k$ i dewiatorowych $\mathcal{T}_2^d$ są ortogonalne.

Dla dowolnych tensorów $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2{}^k$ i $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{T}_2^d$ iloczyn skalarny

$$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{B} = (\alpha \underset{\sim}{1}) \circ \underset{\sim}{B} = \alpha(\underset{\sim}{1} \circ \underset{\sim}{B}) = \alpha \,\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{B} = 0$$

ponieważ z twierdzenia 7.2 wynika, że $\mathrm{tr}\, \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{1} \circ \underset{\sim}{B}$.
Zatem podprzestrzenie $\mathcal{T}_2^k$ i $\mathcal{T}_2^d$ są ortogonalne.

2) dowód wynika z twierdzenia 7.7.

P r z y k ł a d 7.2. Niech tensor $\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2 = E^3 \otimes E^3$ ma reprezentację

$$[A^i{}_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{w bazie } \{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\} \text{ przestrzeni } \mathcal{T}_2$$

oraz dana jest zależność

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = 2\underset{\sim}{e}^1 - \underset{\sim}{e}^2 - \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = 3\underset{\sim}{e}^1 - \underset{\sim}{e}^2 - 3\underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = -\underset{\sim}{e}^1 + \underset{\sim}{e}^2 \end{cases}$$

Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ przestrzeni euklidesowej E^3 ma postać

$$\underset{\sim}{d}^\alpha = g_i^\alpha \underset{\sim}{e}^i \quad \text{dla } \alpha = 1,2,3, \quad \text{stąd} \quad [g_i{}^\alpha] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Korzystając ze wzorów podanych w twierdzeniu 3.5 otrzymamy

$$[g_\alpha{}^i] = [g_i{}^\alpha]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) znajdziemy rozkład tensora $\underset{\sim}{A}$ na część kulistą i dewiatorową w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$.

Z twierdzenia 7.7 mamy

$$\overset{k}{\underset{\sim}{A}} = \left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A}\right)\underset{\sim}{1} = \left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A}\right)\delta^{i}{}_{j}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j$$

$$\overset{d}{\underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{A} - \overset{k}{\underset{\sim}{A}} = A^{i}{}_{j}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j - \left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A}\right)\delta^{i}{}_{j}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j =$$

$$= \left(A^{i}{}_{j} - \left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A}\right)\delta^{i}{}_{j}\right)\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j$$

Stąd wynika, że

$$\overset{k}{A}{}^{i}{}_{j} = \left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A}\right)\delta^{i}{}_{j} \quad \text{dla} \quad i,j = 1,2,3$$

są współrzędnymi tensora $\overset{k}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$,

$$\overset{d}{A}{}^{i}{}_{j} = A^{i}{}_{j} - \left(\tfrac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A}\right)\delta^{i}{}_{j} \quad \text{dla} \quad i,j = 1,2,3$$

są współrzędnymi tensora $\overset{d}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$, przy czym ze wzoru transformacyjnego

$$A^{i}{}_{j} = A^{i}{}_{\alpha}g^{\alpha}_{j} \quad \text{dla} \quad i,j = 1,2,3$$

a z definicji śladu

$$\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A} = \mathrm{tr}(A^{i}{}_{j}\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j) = A^{i}{}_{j}(\underset{\sim}{e}_i\underset{\sim}{e}^j) = A^{i}{}_{j}\delta^{j}_{i} = A^{i}{}_{i}$$

Korzystając z powyższych wzorów łatwo znaleźć reprezentacje $[\overset{k}{A}{}^{i}{}_{j}]$ i $[\overset{d}{A}{}^{i}{}_{j}]$ tensorów $\overset{k}{\underset{\sim}{A}}$ i $\overset{d}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$, więc

$$[A^{i}{}_{j}] = [A^{i}{}_{\alpha}][g^{\alpha}{}_{j}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 & -7 \\ 5 & -3 & -3 \\ 7 & -1 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{A} = A^{i}{}_{i} = A^{1}{}_{1} + A^{2}{}_{2} + A^{3}{}_{3} = 9 - 3 - 9 = -3$$

$$\left[\overset{k}{A}{}^i{}_j\right] = \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\underset{\sim}{A}\right)\left[\delta^i{}_j\right] = \frac{1}{3}(-3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\left[\overset{d}{A}{}^i{}_j\right] = \left[A^i{}_j\right] - \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\underset{\sim}{A}\right)\left[\delta^i{}_j\right] =$$

$$= \begin{bmatrix}9 & -4 & -7\\ 5 & -3 & -3\\ 7 & -1 & -9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & -4 & -7\\ 5 & -2 & -3\\ 7 & -1 & -8\end{bmatrix}$$

b) znajdziemy rozkład tensora $\underset{\sim}{A}$ na część kulistą i dewiatorową w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$.

Z twierdzenia 7.7 mamy

$$\overset{k}{\underset{\sim}{A}} = \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\underset{\sim}{A}\right)\underset{\sim}{1} = \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\underset{\sim}{A}\right) g^i{}_\alpha \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha$$

$$\overset{d}{\underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{A} - \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\underset{\sim}{A}\right)\underset{\sim}{1} = A^i{}_\alpha \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha - \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\underset{\sim}{A}\right) g^i{}_\alpha \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha =$$

$$= \left(A^i{}_\alpha - \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\underset{\sim}{A}\right) g^i{}_\alpha\right)\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha$$

Stąd wynika, że

$$\overset{k}{A}{}^i{}_\alpha = \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\underset{\sim}{A}\right) g^i{}_\alpha \quad \text{dla } i,\alpha = 1,2,3$$

są współrzędnymi tensora $\overset{k}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$,

$$\overset{d}{A}{}^i{}_\alpha = A^i{}_\alpha - \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}\underset{\sim}{A}\right) g^i{}_\alpha \quad \text{dla } i,\alpha = 1,2,3$$

są współrzędnymi tensora $\overset{d}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$, przy czym

$$\operatorname{tr}\underset{\sim}{A} = \operatorname{tr}(A^i{}_\alpha \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha) = A^i{}_\alpha(\underset{\sim}{e}_i \underset{\sim}{d}^\alpha) = A^i{}_\alpha g^\alpha_i$$

Korzystając z powyższych wzorów łatwo znaleźć reprezentacje $\left[\overset{k}{A}{}^i{}_\alpha\right]$ i $\left[\overset{d}{A}{}^i{}_\alpha\right]$ tensorów $\overset{k}{\underset{\sim}{A}}$ i $\overset{d}{\underset{\sim}{A}}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{d}^\alpha\}$, więc

$$\operatorname{tr} \underset{\sim}{A} = A^{i}{}_{\alpha} g^{\alpha}_{i} = A^{1}{}_{1} g^{1}_{1} + A^{1}{}_{2} g^{2}_{1} + A^{1}{}_{3} g^{3}_{1} + A^{2}{}_{1} g^{1}_{2} + A^{2}{}_{2} g^{2}_{2} + A^{2}{}_{3} g^{3}_{2} +$$

$$+ A^{3}{}_{1} g^{1}_{3} + A^{3}{}_{2} g^{2}_{3} + A^{3}{}_{3} g^{3}_{3} =$$

$$= 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + (-1)(1) + 0\cdot(-1) + 1(-1) + (-2)\cdot 1 +$$

$$+ 0\cdot(-1) + 3\cdot(-3) + 2\cdot 0 = -3$$

$$\left[{}^{k}\!A^{i}{}_{\alpha}\right] = \left(\frac{1}{3} \operatorname{tr} \underset{\sim}{A}\right)\left[g^{i}{}_{\alpha}\right] = \frac{1}{3}(-3)\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[{}^{d}\!A^{i}{}_{\alpha}\right] = \left[A^{i}{}_{\alpha}\right] - \left(\frac{1}{3} \operatorname{tr} \underset{\sim}{A}\right)\left[g^{i}{}_{\alpha}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tensor z przestrzeni tensorowej $\mathcal{T}_2$ najwygodniej rozkładać na część kulistą i dewiatorową w bazie typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ lub $\{\underset{\sim}{e}^i \otimes \underset{\sim}{e}_j\}$.

7.3. Wyznacznik tensora. Tensor wzajemny i odwrotny
Wartości własne i wektory własne tensora

Definicja 7.5. Wyznacznikiem tensorów przestrzeni $\mathcal{T}_2$ nazywamy funkcję det : $\mathcal{T}_2 \longrightarrow R$ określoną następująco:

$$\bigwedge_{\underset{\sim}{A} \in \mathcal{T}_2} \det \underset{\sim}{A} := \det \left[A^{i}{}_{j}\right] = \det\left[A_{\alpha}{}^{\beta}\right]$$

gdzie $\left[A^{i}{}_{j}\right]$ i $\left[A_{\alpha}{}^{\beta}\right]$ są reprezentacjami tensora $\underset{\sim}{A}$ odpowiednio w bazach typu $\{\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}^j\}$ i $\{\underset{\sim}{d}^{\alpha} \otimes \underset{\sim}{d}_{\beta}\}$. Liczbę det $\underset{\sim}{A}$ nazywamy wyznacznikiem tensora $\underset{\sim}{A}$.