$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] \circ [1,0,1,-1] = 0$$
$$[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] \circ [2,3,-1,2] = 0$$

a stąd otrzymamy

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_3 - \beta_4 = 0 \\ 2\beta_1 + 3\beta_2 - \beta_3 + 2\beta_4 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu jest zbiór liczb

$\beta_1 = t, \quad \beta_2 = -\frac{1}{3}s - \frac{4}{3}t, \quad \beta_3 = s, \quad \beta_4 = t + s \quad$ dla $t,s \in R$

Zatem

$$S^{\perp} = \left\{\left[t, -\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}s, s, t+s\right] \in R^4 : t,s \in R\right\}$$

Ponieważ

$$\left[t, -\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}s, s, t+s\right] = t\left[1, -\frac{4}{3}, 0, 1\right] + s\left[0, -\frac{1}{3}, 1, 1\right]$$

a więc zbiór $\left\{\left[1, -\frac{4}{3}, 0, 1\right], \left[0, -\frac{1}{3}, 1, 1\right]\right\}$ generuje podprzestrzeń $S^{\perp}$ i stanowi bazę tej podprzestrzeni.

3.2. Kobaza przestrzeni euklidesowej. Reprezentacja wektora Zmiana bazy i wzory transformacyjne

Definicja 3.6. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ będzie bazą n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Zbiór $\{\underset{\sim}{e}^j\}$ wektorów przestrzeni E^n nazywamy kobazą przestrzeni euklidesowej E^n względem bazy $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, jeśli spełnia warunki:

$$\bigwedge_{i,j=1,2,\ldots,n} \underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{e}^j = \delta_i^j$$

gdzie

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

jest symbolem Kroneckera.

Bezpośrednio z powyższej definicji wynikają wnioski:

Wniosek 3.3. W przestrzeni euklidesowej skończenie wymiarowej:

1) kobaza względem bazy jest również bazą,
2) kobaza względem kobazy danej bazy jest daną bazą.

Wniosek 3.4. Niech $\{\underset{\sim}{i}_i\}$ będzie bazą ortonormalną n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Wtedy są spełnione warunki:

1) $\underset{\sim}{i}_i \circ \underset{\sim}{i}_j = \delta_{ij}$ dla $i,j = 1,2,\dots,n$

2) kobaza $\{\underset{\sim}{i}^i\}$ względem bazy $\{\underset{\sim}{i}_i\}$ jest tą samą bazą, tzn.

$$\underset{\sim}{i}^i = \underset{\sim}{i}_i \quad \text{dla} \quad i = 1,2,\dots,n$$

gdzie $\circ$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni E^n, a δ_{ij} symbolem Kroneckera.

Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ będzie bazą, a $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ kobazą przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej E^n. Wtedy dowolny wektor $\underset{\sim}{a} \in E^n$ można przedstawić jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy

$$\underset{\sim}{a} = a^1\underset{\sim}{e}_1 + a^2\underset{\sim}{e}_2 + \dots + a^n\underset{\sim}{e}_n = a^i\underset{\sim}{e}_i \quad ^{*)}$$

lub w postaci kombinacji liniowej wektorów kobazy

$$\underset{\sim}{a} = a_1\underset{\sim}{e}^1 + a_2\underset{\sim}{e}^2 + \dots + a_n\underset{\sim}{e}^n = a_i\underset{\sim}{e}^i \quad ^{*)}$$

Liczby $a^i \in R$ dla $i = 1,2,\dots,n$ występujące we wzorze pierwszym nazywamy współrzędnymi kontrawariantnymi, a macierz (kolumnową) $[a^i]$ reprezentacją kontrawariantną wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$.

Liczby $a_i \in R$ dla $i = 1,2,\dots,n$ występujące we wzorze drugim nazywamy współrzędnymi kowariantnymi, a macierz (kolumnową) $[a_i] \in R^n$ reprezentacją kowariantną wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}^i\}$.

---

*) Obowiązuje w dalszym ciągu umowa sumacyjna Einsteina, patrz str. 25.

Twierdzenie 3.4. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ będzie bazą, a $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ kobazą n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Wtedy współrzędne kontrawariantne i kowariantne dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in E^n$ wyrażają się wzorami

$$a^i = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}^i \quad \text{i} \quad a_i = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}_i \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,n$$

Dowód. Wektor $\underset{\sim}{a} \in E^n$ przedstawmy w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy, więc

$$\underset{\sim}{a} = a^i \underset{\sim}{e}_i$$

gdzie liczby $a^i \in R$ dla $i = 1,\dots,n$ są współrzędnymi kontrawariantnymi wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$. Stąd dla dowolnego ustalonego $j = 1,\dots,n$ mamy

$$\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}^j = (a^i \underset{\sim}{e}_i) \circ \underset{\sim}{e}^j = a^i (\underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{e}^j) = a^i \delta_i^j = a^j$$

Zatem

$$a^i = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}^i \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,n$$

Podobnie dowodzi się, że $a_i = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}_i$ dla $i = 1,\dots,n$.

Wniosek 3.5. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ będzie bazą, a $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ kobazą n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Wtedy dowolny wektor $\underset{\sim}{a} \in E^n$ daje się przedstawić w postaciach:

$$\underset{\sim}{a} = (\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}^i)\underset{\sim}{e}_i \quad \text{lub} \quad \underset{\sim}{a} = (\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}_i)\underset{\sim}{e}^i$$

P r z y k ł a d 3.8. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ będzie bazą przestrzeni kartezjańskiej R^3 taką, że $\underset{\sim}{e}_1 = [1,1,1]$, $\underset{\sim}{e}_2 = [1,1,0]$, $\underset{\sim}{e}_3 = [1,0,0]$.

a) znajdziemy kobazę $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ przestrzeni R^3 względem bazy $\{\underset{\sim}{e}_i\}$. Oznaczmy wektory kobazy przez $\underset{\sim}{e}^1 = [\alpha^1, \beta^1, \gamma^1]$, $\underset{\sim}{e}^2 = [\alpha^2, \beta^2, \gamma^2]$, $\underset{\sim}{e}^3 = [\alpha^3, \beta^3, \gamma^3]$. Z definicji kobazy $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ względem bazy $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ wynika, że $\underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{e}^j = \delta_i^j$ dla $i,j = 1,2,3$. Stąd otrzymamy następujące układy równań na poszczególne wektory kobazy:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 \circ \underset{\sim}{e}^1 = 1 \\ \underset{\sim}{e}_2 \circ \underset{\sim}{e}^1 = 0 \\ \underset{\sim}{e}_3 \circ \underset{\sim}{e}^1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} [1,1,1]\circ[\alpha^1,\beta^1,\gamma^1] = 1 \\ [1,1,0]\circ[\alpha^1,\beta^1,\gamma^1] = 0 \\ [1,0,0]\circ[\alpha^1,\beta^1,\gamma^1] = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha^1+\beta^1+\gamma^1 = 1 \\ \alpha^1+\beta^1 = 0 \\ \alpha^1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha^1 = 0 \\ \beta^1 = 0 \\ \gamma^1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 \circ \underset{\sim}{e}^2 = 0 \\ \underset{\sim}{e}_2 \circ \underset{\sim}{e}^2 = 1 \\ \underset{\sim}{e}_3 \circ \underset{\sim}{e}^2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} [1,1,1]\circ[\alpha^2,\beta^2,\gamma^2] = 0 \\ [1,1,0]\circ[\alpha^2,\beta^2,\gamma^2] = 1 \\ [1,0,0]\circ[\alpha^2,\beta^2,\gamma^2] = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 0 \\ \alpha^2+\beta^2 = 1 \\ \alpha^2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = 0 \\ \beta^2 = 1 \\ \gamma^2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 \circ \underset{\sim}{e}^3 = 0 \\ \underset{\sim}{e}_2 \circ \underset{\sim}{e}^3 = 0 \\ \underset{\sim}{e}_3 \circ \underset{\sim}{e}^3 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} [1,1,1]\circ[\alpha^3,\beta^3,\gamma^3] = 0 \\ [1,1,0]\circ[\alpha^3,\beta^3,\gamma^3] = 0 \\ [1,0,0]\circ[\alpha^3,\beta^3,\gamma^3] = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 0 \\ \alpha^3+\beta^3 = 0 \\ \alpha^3 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 = 1 \\ \beta^3 = -1 \\ \gamma^3 = 0 \end{cases}$$

Zatem mamy $\underset{\sim}{e}^1 = [0,0,1]$, $\underset{\sim}{e}^2 = [0,1,-1]$, $\underset{\sim}{e}^3 = [1,-1,0]$.

b) znajdziemy reprezentację dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} = [\alpha,\beta,\gamma] \in R^3$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i kobazie $\{\underset{\sim}{e}^i\}$. Oznaczmy reprezentację wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ przez $[a^i]$, a w kobazie $\{e^i\}$ przez $[a_i]$. Wtedy z twierdzenia 3.4 mamy

$$a^i = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}^i \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3 \quad \text{i} \quad a_i = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}_i \quad \text{dla} \quad i = 1,2,3$$

Stąd otrzymamy

$$a^1 = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}^1 = [\alpha,\beta,\gamma] \circ [0,0,1] = \gamma$$
$$a_1 = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}_1 = [\alpha,\beta,\gamma] \circ [1,1,1] = \alpha + \beta + \gamma$$
$$a^2 = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}^2 = [\alpha,\beta,\gamma] \circ [0,1,-1] = \beta - \gamma$$
$$a_2 = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}_2 = [\alpha,\beta,\gamma] \circ [1,1,0] = \alpha + \beta$$
$$a^3 = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}^3 = [\alpha,\beta,\gamma] \circ [1,-1,0] = \alpha - \beta$$
$$a_3 = \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{e}_3 = [\alpha,\beta,\gamma] \circ [1,0,0] = \alpha$$

Zatem macierze kolumnowe

$$[a^i] = \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta - \gamma \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad [a_i] = \begin{bmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha + \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

są reprezentacjami wektora $\underset{\sim}{a}$ odpowiednio w bazach $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^i\}$.

Twierdzenie 3.5. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ będą bazami (kobazami) n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Jeśli wektory jednej bazy przedstawimy w postaci kombinacji liniowej wektorów drugiej bazy, np.

$\underset{\sim}{e}_j = g_{ij}\underset{\sim}{e}^i$ $[g_{ij}]$ - macierz przejścia od bazy $\{\underset{\sim}{e}_j\}$ do bazy $\{\underset{\sim}{e}^i\}$

$\underset{\sim}{d}_\alpha = g_{i\alpha}e^i$ $[g_{i\alpha}]$ - macierz przejścia od bazy $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$ do bazy $\{\underset{\sim}{e}^i\}$

$\underset{\sim}{e}^i = g^{\alpha i}\underset{\sim}{d}_\alpha$ $[g^{\alpha i}]$ - macierz przejścia od bazy $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ do bazy $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$

$\underset{\sim}{d}^\alpha = g_i^\alpha e^i$ $[g_i^\alpha]$ - macierz przejścia od bazy $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ do bazy $\{\underset{\sim}{e}^i\}$

$\underset{\sim}{d}^\beta = g^{\alpha\beta}d_\alpha$ $[g^{\alpha\beta}]$ - macierz przejścia od bazy $\{\underset{\sim}{d}^\beta\}$ do bazy $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$

$\underset{\sim}{e}^j = g_i^j\underset{\sim}{e}^i$ $[g_i{}^j]$ - macierz przejścia od bazy $\{\underset{\sim}{e}^j\}$ do bazy $\{\underset{\sim}{e}^i\}$

itp.

to otrzymamy wzory:

$g_{ij} = g_{ji} = \underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{e}_j$ $[g_{ij}] = [g_{ji}]$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną

$g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha} = \underset{\sim}{d}^\alpha \circ \underset{\sim}{d}^\beta$ $[g^{\alpha\beta}] = [g^{\beta\alpha}]$ jest macierzą symetryczną dodatnio określoną

$g_i^j = g_i{}^j = g^j{}_i = \underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{e}^j = \delta_i^j$ $[g_i{}^j] = [g^j{}_i]$ jest macierzą jednostkową

$g^{\alpha i} = g^{i\alpha} = \underset{\sim}{d}^\alpha \circ \underset{\sim}{e}^i$ $[g^{\alpha i}] = [g^{i\alpha}]^T$ jest macierzą nieosobliwą

$g_i^\alpha = g_i{}^\alpha = g^\alpha{}_i = \underset{\sim}{e}_i \circ \underset{\sim}{d}^\alpha$ $[g_i^\alpha] = [g^\alpha{}_i]^T$ jest macierzą nieosobliwą

itp.

$g^{j\alpha}g_{\alpha i} = \delta_i^j$ $[g^{j\alpha}][g_{\alpha i}] = [\delta^j{}_i]$

lub macierzowo

$g_{\alpha i}g^{i\beta} = \delta_\alpha^\beta$ $[g_{\alpha i}][g^{i\beta}] = [\delta_\alpha{}^\beta]$

więc macierz $[g^{i\alpha}]$ jest odwrotna do macierzy $[g_{\alpha i}]$

$g_\alpha^i g_j^\alpha = \delta_j^i$ $[g^i{}_\alpha][g^\alpha{}_j] = [\delta^i{}_j]$

lub macierzowo

$g_\beta^i g_i^\alpha = \delta_\beta^\alpha$ $[g^\alpha{}_i][g^i{}_\beta] = [\delta^\alpha{}_\beta]$

więc macierz $[g^\alpha{}_i]$ jest odwrotna do macierzy $[g^i{}_\alpha]$

$$g^{i\alpha}g_{\alpha\beta} = g^i{}_\beta \qquad\qquad [g^{i\alpha}][g_{\alpha\beta}] = [g^i{}_\beta]$$

$$g^i_\alpha g^{\alpha j} = g^{ij} \qquad \text{lub macierzowo} \qquad [g^i{}_\alpha][g^{\alpha j}] = [g^{ij}]$$

$$g^i_\alpha g^{\alpha\beta} = g^{i\beta} \qquad\qquad [g^i{}_\alpha][g^{\alpha\beta}] = [g^{i\beta}]$$

itp.

Dowód. Dla przykładu udowodnimy tylko ostatni wzór. Korzystając z określeń i wzorów podanych w tym twierdzeniu oraz z własności iloczynu skalarnego wektorów otrzymamy

$$g^{i\beta} = \underset{\sim}{e}^i \circ \underset{\sim}{d}^\beta = \left(g^i_\alpha \underset{\sim}{d}^\alpha\right) \circ \underset{\sim}{d}^\beta = g^i_\alpha(\underset{\sim}{d}^\alpha \circ \underset{\sim}{d}^\beta) = g^i_\alpha g^{\alpha\beta}$$

Zatem $g^i_\alpha g^{\alpha\beta} = g^{i\beta}$ dla $i, \beta = 1,\dots,n$.

Wszystkie macierze przejścia między bazami przestrzeni euklidesowej są nieosobliwe. Oznaczamy je literą g z odpowiednimi indeksami. Jeśli różne bazy oznaczymy indeksami innego alfabetu, to układ odpowiednich indeksów w macierzy przejścia określa jednoznacznie bazy związane z tą macierzą. Np. $[g_\alpha{}^i]$ jest macierzą przejścia od bazy $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ do bazy $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$.

P r z y k ł a d 3.9. Niech $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ będzie bazą przestrzeni kartezjańskiej R^3 taką, że $\underset{\sim}{e}^1 = [2,1,0]$, $\underset{\sim}{e}^2 = [-1,0,0]$, $\underset{\sim}{e}^3 = [1,2,1]$. Znajdziemy kobazę $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ przestrzeni R^3 względem bazy $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ za pomocą macierzy przejścia.

Korzystamy z określeń i wzorów podanych w twierdzeniu 3.5. Zatem

$$g^{ij} = \underset{\sim}{e}^i \circ \underset{\sim}{e}^j \quad \text{dla } i,j = 1,2,3, \quad \text{stąd} \quad [g^{ij}] = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j \qquad\qquad [g^{ik}][g_{kj}] = [\delta^i{}_j]$$

dla $i,j = 1,2,3$ lub macierzowo

$$g_{ij}g^{kj} = \delta^j_i \qquad\qquad [g_{ik}][g^{kj}] = [\delta_i{}^j]$$

stąd

$$[g_{ki}] = [g^{ik}]^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 8 & 14 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ponieważ $\underset{\sim}{e}_i = g_{ki}\underset{\sim}{e}^k$ dla $i = 1,2,3$, to dostaniemy

$$\underset{\sim}{e}_1 = g_{k1}\underset{\sim}{e}^k = g_{11}\underset{\sim}{e}^1 + g_{21}\underset{\sim}{e}^2 + g_{31}\underset{\sim}{e}^3 =$$
$$= 5[2,1,0] + 8[-1,0,0] - 2[1,2,1] = [0,1,-2]$$
$$\underset{\sim}{e}_2 = g_{k2}\underset{\sim}{e}^k = g_{12}\underset{\sim}{e}^1 + g_{22}\underset{\sim}{e}^2 + g_{32}\underset{\sim}{e}^3 =$$
$$= 8[2,1,0] + 14[-1,0,0] - 3[1,2,1] = [-1,2,-3]$$
$$\underset{\sim}{e}_3 = g_{k3}\underset{\sim}{e}^k = g_{13}\underset{\sim}{e}^1 + g_{23}\underset{\sim}{e}^2 + g_{33}\underset{\sim}{e}^3 =$$
$$= -2[2,1,0] - 3[-1,0,0] + 1[1,2,1] = [0,0,1]$$

A więc otrzymaliśmy wektory kobazy $\underset{\sim}{e}_1 = [0,1,-2]$, $\underset{\sim}{e}_2 = [-1,2,-3]$, $\underset{\sim}{e}_3 = [0,0,1]$.

P r z y k ł a d 3.10. Niech między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej E^3 zachodzą zależności

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = \underset{\sim}{e}^1 - \underset{\sim}{e}^2 \\ \underset{\sim}{e}_2 = -\underset{\sim}{e}^1 + 2\underset{\sim}{e}^2 - \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{e}_3 = -\underset{\sim}{e}^2 + 2\underset{\sim}{e}^3 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = \underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = 2\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = 3\underset{\sim}{e}_1 + 2\underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3 \end{cases}$$

Znajdziemy wszystkie macierze przejścia między tymi bazami.

Korzystamy z określeń i wzorów podanych w twierdzeniu 3.5. Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ dana jest w postaci

$$\underset{\sim}{e}_j = g_{ij}\underset{\sim}{e}^i \quad \text{dla} \quad j = 1,2,3, \quad \text{a stąd} \quad [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ponieważ mamy

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j \qquad [g_{ik}][g^{kj}] = [\delta_i{}^j]$$

dla $i,j=1,2,3$ lub macierzowo

$$g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i \qquad [g^{ik}][g_{kj}] = [\delta^i{}_j]$$

a więc

$$[g^{ik}] = [g_{kj}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{d}^{\alpha}\}$ i $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ dana jest w postaci

$$\underset{\sim}{d}^{\alpha} = g^{i\alpha}\underset{\sim}{e}_i \quad \text{dla } \alpha = 1,2,3, \qquad \text{a stąd} \quad [g^{i\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ponieważ mamy

$$g^{i\alpha}g_{\alpha j} = \delta^i_j \quad \text{dla } i,j = 1,2,3 \qquad [g^{i\alpha}][g_{\alpha j}] = [\delta^i{}_j]$$

lub macierzowo

$$g_{\alpha i}g^{i\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} \quad \text{dla } \alpha,\beta = 1,2,3 \qquad [g_{\alpha i}][g^{i\beta}] = [\delta_{\alpha}{}^{\beta}]$$

więc

$$[g_{\alpha i}] = [g^{i\alpha}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Pozostałe macierze przejścia otrzymamy ze wzorów

$$g_{ij}g^{j\alpha} = g^{\alpha}_i \quad \text{dla } i = 1,2,3; \ \alpha = 1,2,3$$

więc

$$[g_i^{\alpha}] = [g_{ij}][g^{j\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$g_{\alpha i}g^{ij} = g^j_{\alpha} \quad \text{dla } j = 1,2,3; \ \alpha = 1,2,3$$

więc

$$[g_{\alpha}{}^j] = [g_{\alpha i}][g^{ij}] = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$g_{\alpha}^{i} g_{\beta i} = g_{\alpha\beta} \quad \text{dla } \alpha, \beta = 1,2,3$$

więc

$$[g_{\alpha\beta}] = [g_{\alpha}{}^{i}][g_{i\beta}] = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 11 & -14 \\ 11 & 6 & -7 \\ -14 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$g_{i}^{\alpha} g^{i\beta} = g^{\alpha\beta} \quad \text{dla } \alpha, \beta = 1,2,3$$

więc

$$[g^{\alpha\beta}] = [g^{\alpha}{}_{i}][g^{i\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 3.6. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ będą bazami (kobazami) n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Jeśli dowolny wektor $\underset{\sim}{a} \in E^n$ przedstawimy w postaci kombinacji liniowej każdej z tych baz, tzn.

$\underset{\sim}{a} = a^i \underset{\sim}{e}_i$ $\quad [a^i]$ - reprezentacja wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$

$\underset{\sim}{a} = a_i \underset{\sim}{e}^i$ $\quad [a_i]$ - reprezentacja wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}^i\}$

$\underset{\sim}{a} = a^\alpha \underset{\sim}{d}_\alpha$ $\quad [a^\alpha]$ - reprezentacja wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$

$\underset{\sim}{a} = a_\alpha \underset{\sim}{d}^\alpha$ $\quad [a_\alpha]$ - reprezentacja wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$

to otrzymamy wzory transformacyjne:

$a^i = g_{\alpha}^{i} a^\alpha$ $\qquad\qquad [a^i] = [g_{\alpha}^{i}][a^\alpha]$

$a_\alpha = g_{\alpha i} a^i$ $\qquad$ lub macierzowo $\qquad [a_\alpha] = [g_{\alpha i}][a^i]$

$a_i = g_{ij} a^j$ $\qquad\qquad [a_i] = [g_{ij}][a^j]$

itp.

gdzie $g_{\alpha}^{i}, g_{\alpha i}, g_{ij}, \ldots \in R$ dla $i,j = 1,\ldots,n$; $\alpha, \beta = 1,\ldots,n$ są współczynnikami macierzy przejścia.

Dowód. Dla przykładu udowodnimy tylko drugi wzór. Z założeń tego twierdzenia i twierdzenia 3.5 wynika, że dla dowolnego wektora $\underset{\sim}{a} \in E^n$ otrzymamy

$$\underset{\sim}{a} = a_\alpha \underset{\sim}{d}^\alpha \quad \text{i} \quad \underset{\sim}{a} = a^i \underset{\sim}{e}_i = a^i (g_{\alpha i} \underset{\sim}{d}^\alpha) = g_{\alpha i} a^i \underset{\sim}{d}^\alpha,$$

stąd

$$a_\alpha \underset{\sim}{d}^\alpha = g_{\alpha i} a^i \underset{\sim}{d}^\alpha$$

Ponieważ przedstawienie wektora w bazie jest jednoznaczne, więc

$$a_\alpha = g_{\alpha i} a^i \quad \text{dla} \quad \alpha = 1,\ldots,n$$

Jeśli indeksy każdej bazy przestrzeni euklidesowej oznaczymy literami innego alfabetu, to wystarczy podać samą reprezentację i określa już ona jednoznacznie wektor, gdyż rodzaj indeksu reprezentacji wskazuje na to, w jakiej ona jest bazie. Np. $[a_\alpha]$ jest reprezentacją wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$. Wzory transformacyjne podają zależności między współrzędnymi (reprezentacjami) tego samego wektora w dwu różnych bazach. Wynika z nich, że zmiana indeksów w reprezentacji odbywa się za pomocą układu liczb g indeksowanych tak, aby zachodziła konwencja sumacyjna.

P r z y k ł a d 3.11. Niech między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n zachodzi zależność

$$\begin{cases} \underset{\sim}{d}^1 = 2\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^2 = -\underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3 \\ \underset{\sim}{d}^3 = \underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 \end{cases}$$

oraz wektor $\underset{\sim}{a} \in E^n$ ma reprezentację $[a^i]^T = [-1,0,3]$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$. Znajdziemy reprezentację $[a_\alpha]$ wektora $\underset{\sim}{a}$ w bazie $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$.

Ze wzorów transformacyjnych podanych w twierdzeniu 3.6 wynika, że

$$a_\alpha = g_{\alpha i} a^i \quad \text{dla} \quad \alpha = 1,2,3 \quad \text{lub macierzowo} \quad [a_\alpha] = [g_{\alpha i}][a^i]$$

a więc należy znaleźć macierz $[g_{\alpha i}]$. Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ i $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ dana jest w postaci

$$\underset{\sim}{d}^\alpha = g^{i\alpha} \underset{\sim}{e}_i \quad \text{dla} \quad \alpha = 1,2,3; \quad \text{a stąd} \quad [g^{i\alpha}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Korzystając ze wzorów podanych w twierdzeniu 3.5 mamy

$g^{i\alpha}g_{\alpha j} = \delta^i_j$ dla $i,j = 1,2,3$ $\qquad [g^{i\alpha}][g_{\alpha j}] = [\delta^i{}_j]$

lub macierzowo

$g_{\alpha i}g^{i\beta} = \delta^\beta_\alpha$ dla $\alpha,\beta = 1,2,3$ $\qquad [g_{\alpha i}][g^{i\beta}] = [\delta_\alpha{}^\beta]$

stąd

$$[g_{\alpha i}] = [g^{i\alpha}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Zatem otrzymamy

$$[a_\alpha] = [g_{\alpha i}]\,[a^i] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie 3.7. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$, $\{\underset{\sim}{e}^i\}$, $\{\underset{\sim}{d}_\alpha\}$, $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ będą bazami n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Wtedy dla dowolnych wektorów $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b} \in E^n$ zachodzą wzory:

$$\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} = a^i b^j g_{ij} = a^i b_i = a_i b_j g^{ij} = a_i b^i = a_\alpha b_i g^{\alpha i} = a^\alpha b_i g^i_\alpha \text{ itp.}$$

$$\cos\sphericalangle(\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b}) = \frac{a \circ b}{\sqrt{\underset{\sim}{a}\circ\underset{\sim}{b}}\sqrt{\underset{\sim}{b}\circ\underset{\sim}{b}}} = \frac{a^i b^j g_{ij}}{\sqrt{a^k a^l g_{kl}}\sqrt{b^r b^s g_{rs}}} =$$

$$= \frac{a_\alpha b^i g^\alpha_i}{\sqrt{a_\beta a^j g^\beta_j}\sqrt{b_\gamma b^k g^\gamma_k}} \quad \text{itp.}$$

a stąd

$$\cos\sphericalangle(\underset{\sim}{e}_i,\underset{\sim}{e}_j) = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} \qquad \text{dla} \quad i,j = 1,\dots,n$$

$$\cos\sphericalangle(\underset{\sim}{e}_i,\underset{\sim}{d}^\alpha) = \frac{g^\alpha_i}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g^{\alpha\alpha}}} \qquad \text{dla} \quad i,\alpha = 1,\dots,n$$

itd.

Dowód wynika z własności iloczynu skalarnego i twierdzenia 3.5.

P r z y k ł a d 3.12. Niech między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n zachodzi zależność

$$\begin{cases} \underset{\sim}{e}_1 = 2\underset{\sim}{e}^1 + \underset{\sim}{e}^2 + \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{e}_2 = \underset{\sim}{e}^1 + 2\underset{\sim}{e}^2 + \underset{\sim}{e}^3 \\ \underset{\sim}{e}_3 = \underset{\sim}{e}^1 + \underset{\sim}{e}^2 + 2\underset{\sim}{e}^3 \end{cases}$$

oraz wektory $\underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{b} \in E^3$ mają reprezentacje $[a^i]^T = [1,-1,2]$ i $[b^i]^T = [2,3,1]$ w bazie $\{\underset{\sim}{e}_i\}$. Znajdziemy cosinus kąta między wektorami $\underset{\sim}{a}$ i $\underset{\sim}{b}$.

Zależność między bazami $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{e}^i\}$ ma postać

$$\underset{\sim}{e}_j = g_{ij}\underset{\sim}{e}^i \quad \text{dla} \quad j = 1,2,3, \text{ a stąd } \quad [g_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Korzystając ze wzorów podanych w twierdzeniu 3.7 kolejno otrzymamy:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b} &= a^i b^j g_{ij} = a^1b^1g_{11} + a^1b^2g_{12} + a^1b^3g_{13} + a^2b^1g_{21} + \\ &+ a^2b^2g_{22} + a^2b^3g_{23} + a^3b^1g_{31} + a^3b^2g_{32} + a^3b^3g_{33} = \\ &= 1\cdot2\cdot2 + 1\cdot3\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 + (-1)\cdot2\cdot1 + (-1)\cdot3\cdot2 + \\ &+ (-1)\cdot1\cdot1 + 2\cdot2\cdot1 + 2\cdot3\cdot1 + 2\cdot1\cdot2 = 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a} &= a^i a^j g_{ij} = a^1a^1g_{11} + a^1a^2g_{12} + a^1a^3g_{13} + a^2a^1g_{21} + \\ &+ a^2a^2g_{22} + a^2a^3g_{23} + a^3a^1g_{31} + a^3a^2g_{32} + a^3a^3g_{33} = \\ &= 1\cdot1\cdot2 + 1\cdot(-1)\cdot1 + 1\cdot2\cdot1 + (-1)\cdot1\cdot1 + (-1)\cdot(-1)\cdot2 + \\ &+ (-1)\cdot2\cdot1 + 2\cdot1\cdot1 + 2\cdot(-1)\cdot1 + 2\cdot2\cdot2 = 10 \end{aligned}$$

$$\underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{b} = b^i b^j g_{ij} = [b^i]^T [g_{ij}][b^j] = [2,3,1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 50$$

Stąd

$$\cos \sphericalangle(\underset{\sim}{a}, \underset{\sim}{b}) = \frac{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{b}}{\sqrt{\underset{\sim}{a} \circ \underset{\sim}{a}}\,\sqrt{\underset{\sim}{b} \circ \underset{\sim}{b}}} = \frac{13}{\sqrt{10}\,\sqrt{50}} = \frac{13}{10\sqrt{5}}$$

3.3. Zadania

Zadanie 3.1. Zbadać, czy w przestrzeni liniowej ciągów 2-wyrazowych R^2 nad ciałem liczb rzeczywistych formy $f : R^2 \times R^2 \longrightarrow R$ określone następująco:

a) $f([\alpha_1, \alpha_2], [\beta_1, \beta_2]) := 3\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2$

b) $f([\alpha_1, \alpha_2], [\beta_1, \beta_2]) := 2\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + 6\alpha_2\beta_2$

określają iloczyn skalarny w przestrzeni R^2.

Zadanie 3.2. W przestrzeni liniowej wielomianów $R_n[x]$ stopnia co najwyżej n-tego nad ciałem liczb rzeczywistych określono formy $f : R_n[x] \times R_n[x] \longrightarrow R$ następująco

a) $f(u,v) := \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx$

b) $f(u,v) = f(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2, \beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2) := \alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$

Wykazać, że przestrzeń $R_n[x]$ z każdą z tych form jest przestrzenią euklidesową.

Zadanie 3.3. W przestrzeni euklidesowej $R_2[x]$ z iloczynem skalarnym określonym w zadaniu 3.2a znaleźć wielomiany ortogonalne do wielomianów $w_1(x) = 1$, $w_2(x) = x$.

Zadanie 3.4. W przestrzeni euklidesowej $R_2[x]$ z iloczynem skalarnym określonym w zadaniu 3.2b znaleźć dopełnienie ortogonalne do:

a) podprzestrzeni wielomianów dla których $w(1) = 0$,

b) podprzestrzeni wielomianów stopni parzystych.

Zadanie 3.5. Niech $\{\underset{\sim}{e}_i\}$ i $\{\underset{\sim}{d}^\alpha\}$ będą bazami przestrzeni kartezjańskiej R^3 takimi, że $\underset{\sim}{e}_1 = [-2,1,0]$, $\underset{\sim}{e}_2 = [1,0,-1]$, $\underset{\sim}{e}_3 = [1,1,0]$ i $\underset{\sim}{d}^1 = [1,2,1]$, $\underset{\sim}{d}^2 = [0,1,1]$, $\underset{\sim}{d}^3 = [1,-1,1]$.