2

PRZEWIDYWANIE JAKO GRA

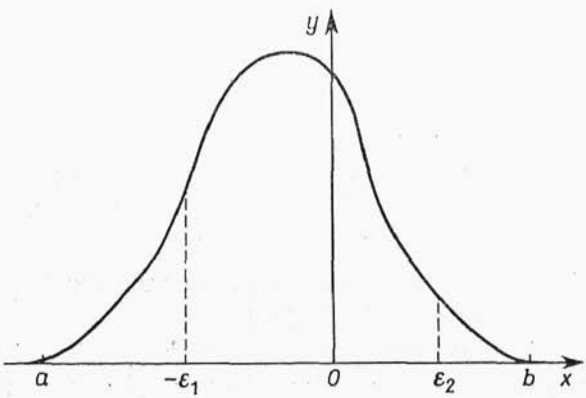
Powszechnie uważa się, że teoria gier znajduje wtedy zastosowanie, gdy dana gałąź wiedzy znajduje się w początkowej fazie rozwoju i ilość posiadanych informacji jest niewystarczająca do zbudowania modelu deterministycznego. W miarę gromadzenia dalszych informacji rola teorii gier staje się coraz mniejsza, aż wreszcie potrafimy zbudować model deterministyczny, eliminując tym samym teorię gier [51].

Swego rodzaju wyjątkiem są procesy zarządzania, dowodzenia i sterowania, w których nawet przy najlepszej znajomości obiektu i otoczenia przyszłość może być przewidziana tylko z niepełną pewnością.

Spróbujemy z kolei skonstruować prosty model przewidywania, operując aparatem pojęciowym teorii gier, dokładniej mówiąc — teorii gier sekwencyjnych (zwanych również grami wielochodowymi, z niepełną informacją, patrz [2]).

Niech będą dane cztery funkcje o wartościach rzeczywistych od jednego argumentu całkowitoliczbowego i: $\varepsilon_1(i)$, $\varepsilon_2(i)$, $z(i)$, $s_1(i)$, jedna funkcja od dwóch argumentów rzeczywistych i jednego całkowitego $h(s_1, s_2, i)$ oraz niech będzie dana pewna funkcja rzeczywista gęstości prawdopodobieństwa np. typu β (porównaj rys. 7).

W grze bierze udział dwu graczy: gracz 1 i gracz 2. Gracz 1 w kolejnych chwilach i stosuje strategie $s_1(i)$, o graczu 2 zaś nie musimy zakładać, że postępuje rozumnie. Celem gracza 1 w kolejnych krokach gry jest osiągnięcie celu $z(i)$ z dokładnością $-\varepsilon_1(i)$, $+\varepsilon_2(i)$. Będziemy zakładali, że gracz 1 ma przygotowany cały ciąg celów $z(i)$, $z(i+1)$, ... (zwanych również dalej planem operatywnym). Gracz 1 nie zna strategii użytych przez gracza 2 w aktualnym kroku i oraz krokach poprzednich, zna on jedynie wartości, jakie przyjęła funkcja wypłaty, począwszy od kroku zerowego $h(s_1, s_2, 0)$, a skończywszy na kroku $i-1$, tj. $h(s_1, s_2, i-1)$. Gracz 2 ma pewnego rodzaju przewagę nad graczem 1, ponieważ wybierając w kolejnych krokach swoją strategię zna on strategię użytą w danym kroku przez gracza 1. Natomiast gracz 1 dla wyboru strategii, jaką ma zastosować w kroku $i+1$, opracowuje hipotezę dotyczącą wartości, jaką przyjmuje funkcja wypła-



Rys. 7. Wykres funkcji $y = (b-a)^{2-p-q}(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}$ dla przypadku, gdy $p, q > 2$, $a < 0, b > 0$

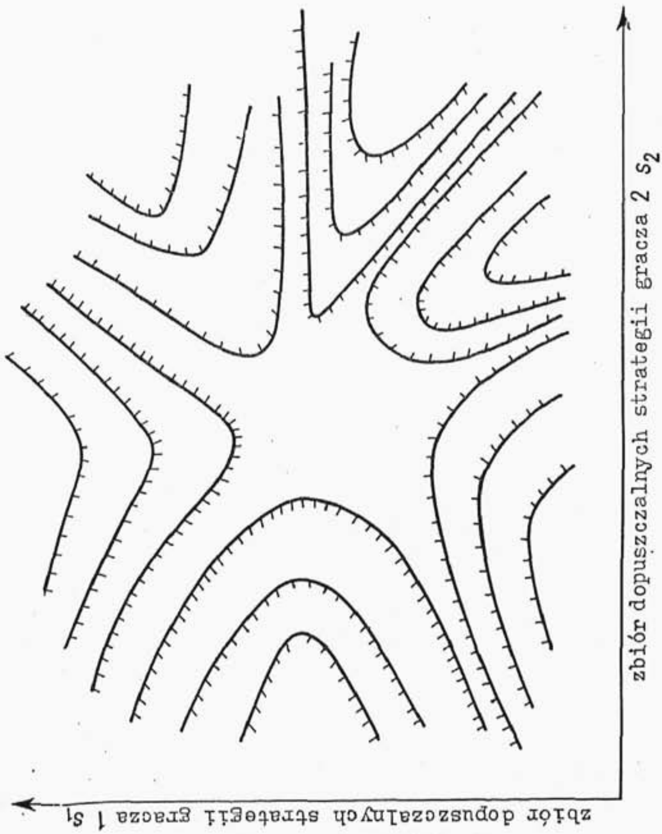
Uwaga: w praktyce można mieć do czynienia również z przypadkiem $1 < p, q < 2$.

ty w wyniku zastosowania przez graczy 1 i 2 odpowiednich strategii w kroku i, z tym że znana mu jest jedynie własna strategia zastosowana w kroku i.

Tego rodzaju hipoteza może polegać na ekstrapolowaniu wyników poprzednich kroków gry. Z formalnego punktu widzenia hipoteza ta jest obliczeniem prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia (porównaj rys. 7):

$$P\left(z(i)-\varepsilon_1(i) < h(s_1, s_2, i) < z(i)+\varepsilon_2(i)\right),$$

czyli prawdopodobieństwa, że funkcja $h(s_1, s_2, i)$ wypłaty w kroku i przyj-



Rys. 8. Warstwicowy wykres funkcji wypłaty $h(s_1, s_2, i)$ gracza 1 w i-tym kroku

mie wartość różniącą się od celu $z(i)$, który przed sobą stawiał gracz 1 w kroku i, nie więcej niż $-\varepsilon_1(i)$, $+\varepsilon_2(i)$.

Jeśli prawdopodobieństwo zajścia powyższego zdarzenia będzie zbyt małe, gracz 1 uznaje, że w kroku i-tym nie udało mu się osiągnąć uprzednio przewidzianego celu, może więc postawić przed sobą odpowiednio zmienione zadania na następne kroki $i+1$, $i+2$, ...

Na rysunku 8 pokazany jest przykład funkcji wypłaty. Funkcja ta ma punkt siodłowy, a więc tym samym pozwala na stosowanie w strategiach czystych strategii minimaksowych.

Należy podkreślić, że przy tego rodzaju grach sekwencyjnych należałoby jeszcze wprowadzić pojęcie funkcji korzyści, tak jak to zrobili J. G. Kemeny i G. L. Thompson [24], oraz wprowadzić pewne zmiany terminologiczne, a mianowicie zastąpić nazwę strategii dopuszczalnych taktykami dopuszczalnymi, a funkcję korzyści nazwać funkcją strategii.

Wreszcie należałoby rozpatrzyć grę z wektor-funkcją wypłat, która daleko bardziej odpowiada rzeczywistości. Wydaje się, że nie nastręczy to żadnych większych trudności, ponieważ wiele własności gier przenosi się na przypadek gier z wektor-funkcją wypłat [5].

Jeśli w szczególności zajmujemy się procesami dowodzenia, to nie możemy utożsamiać gracza 2 z przeciwnikiem. Działalność gracza 2 to wypadkowa działalność przeciwnika i przyrody. Dlatego też w tym szczególnym przypadku możemy również nie zakładać, że gracz 2 postępuje rozumnie.

Dotychczasowe rozważania ograniczaliśmy jedynie do omawiania poszczególnych kroków gry. Obecnie poświęcimy jeszcze trochę miejsca na rozważania, w których potraktujemy sekwencję rozgrywek całościowo.

Weźmy pod uwagę dwa zbiory liniowe:

a) dyskretną oś czasu,

b) zbiór wartości, jaki może przyjmować funkcja wypłaty gracza 1.

Iloczyn kartezjański tych dwu zbiorów, oznaczony przez θ, dzieli się na trzy podzbiory dwuwymiarowe:

a) podzbiór θ_1 zawarty między dwoma zbiorami liniowymi odwzorowań punktów $z(i)-\varepsilon_1(i)$, $z(i)+\varepsilon_2(i)$;

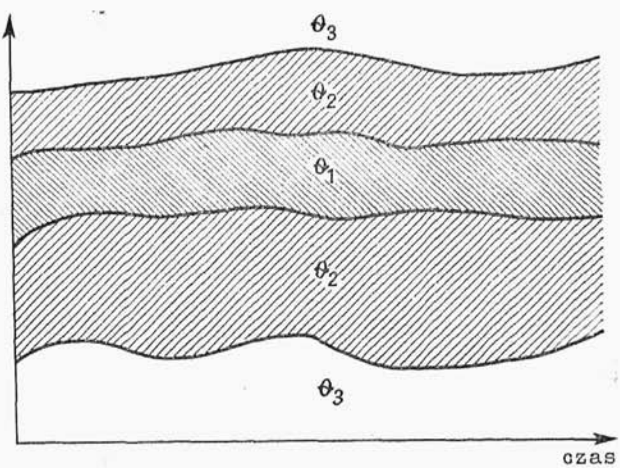
b) podzbiór θ_2 leżący na zewnątrz podzbioru θ_1, a ograniczony zbiorami liniowymi odwzorowań punktów $z(i)-\eta_1(i)$, $z(i)+\eta_2(i)$, gdzie $\eta_1(i)$,

$\eta_2(i)$ jest to para funkcji o wartościach rzeczywistych od jednego argumentu całkowitoliczbowego, przy czym $\eta_1(i) \geqslant \varepsilon_1(i)$ oraz $\eta_2(i) \geqslant \varepsilon_2(i)$;

c) podzbiór θ_3 będący uzupełnieniem sumy podzbiorów θ_1, θ_2 w zbiorze θ.

Podzbiór θ_1 jest podzbiorem wartości, jakie może przyjmować funkcja wpłaty w kolejnych krokach gry, oznaczającym się tą własnością, że jeśli w kolejnych krokach funkcja wypłaty przyjmuje wartości należące do θ_1, to plan operatywny jest wykonywany i nie wymaga korekcji.

Podzbiór θ_2 jest podzbiorem wartości, jakie może przyjmować funkcja wypłaty w kolejnych krokach gry, mającym tę własność, że przyjęcie wartości przez funkcję wypłaty należące do θ_2 pociąga za sobą niewykonanie planu operatywnego, ale istnieje możliwość takiego skorygowania planu



Rys. 9. Schematyczne przedstawienie zbioru θ wartości, które może przyjmować funkcja s_1 w rozbiciu na podzbiory θ_1, θ_2, θ_3

operatywnego w dalszych krokach poprzez użycie posiadanych rezerw, że zadania planowe zostaną wykonane.

Wreszcie podzbiór θ_3 jest podzbiorem wartości, jakie może przyjmować funkcja wypłaty, którym towarzyszy niemożliwość wykonania zadań planowych i w przypadku których zachodzi konieczność zmiany zadań planowych.

Na rysunku 9 przedstawiony jest schematycznie zbiór θ w rozbiciu na podzbiory θ_1, θ_2, θ_3.

W ogólnym przypadku, gdy zamiast funkcji wypłaty rozważamy n-wymiarową wektor-funkcję wypłaty, wówczas zbiór θ jest zbiorem $n+1$ wymiarowym, podobnie podzbiory θ_1, θ_2, θ_3 są $n+1$ wymiarowymi częściami zbioru θ.