

# UZUPEŁNIENIE.

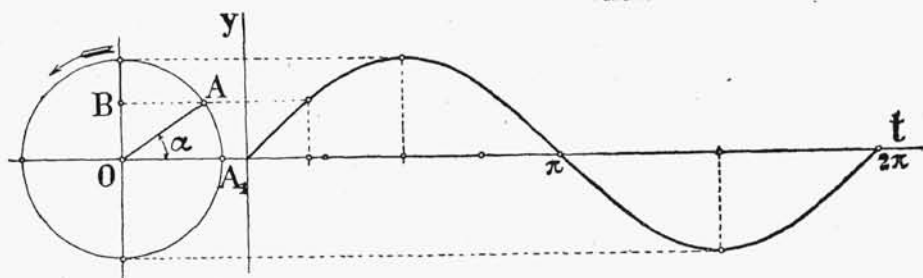
## ROZDZIAŁ XXXII.

### Zasady rachunku wektorowego, w zastosowaniu do rozważania prądów zmiennych.

**1. Określenia zasadnicze.** Zależność od czasu pewnej wielkości zmiennej w czasie można wyrazić analitycznie i wykreślić. Jeżeli wielkość ta zmienia się sinusoidalnie, to wyrażenie matematyczne jest następujące:

$$y_t = Y_m \cdot \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) \dots \dots \dots (a)$$

- $y_t$  — wartość wielkości  $y$  w chwili  $t$ ,
- $Y_m$  — wartość maksymalna tej wielkości,
- $T$  — okres zmienności,
- $\varphi$  — kąt stały.
- $t$  — czas zmienny.



Rys. 315.

Linję krzywą, wyrażającą taką funkcję we współrzędnych prostokątnych  $y$  i  $t$ , nazywamy sinusoidą.

Sinusoida może być wykreślona za pomocą wyznaczania poszczególnych punktów w sposób następujący. Rozważmy przypadek, gdy  $\varphi = 0$ :

Bierzemy odcinek  $OA$  (rys. 315), którego długość wyrażać będzie w pewnej skali wartość maksymalną wielkości  $y$ , a więc  $Y_m$  i zakładamy, że ten odcinek znajduje się w położeniu, wskazanem na rysunku, t. j. pod kątem  $\alpha$  względem linii poziomej. Rzutem tego odcinka na kierunek pionowy będzie odcinek  $\overline{OB}$ , zależność którego od długości odcinka  $\overline{OA}$  wyraża wzór:

$$\overline{OB} = \overline{OA} \cdot \sin \alpha.$$

Załóżmy następnie, że odcinek  $\overline{OA}$  obraca się jednostajnie z prędkością kątową  $\frac{2\pi}{T}$  około punktu  $O$  i że w chwili zero znajdzie się on w położeniu  $\overline{OA}_1$ ; w takim razie:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t,$$

a więc:

$$\overline{OB} = \overline{OA} \sin \frac{2\pi t}{T} \dots \dots \dots (b)$$

Z równania (a) na str. 363 przy  $\varphi = 0$ , wypada:

$$y_t = Y_m \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Porównywając to równanie z poprzednim równaniem (b) i mając na uwadze, że  $\overline{OA}$  wyraża  $Y_m$ , wnioskujemy, że  $\overline{OB}$  wyraża  $y_t$ .

Korzystając zaś z tego, że rzut odcinka  $OA$  na kierunek pionowy wyraża wartość wielkości  $y$  w danej chwili, z łatwością znaleźć można szereg punktów sinusoidy, wyznaczając dla różnych wartości czasu  $t$  rzuty odcinka  $OA$  na kierunek pionowy i odkładając  $t$  jako rzędne, a  $OB = y_t$  jako odcięte.

Jeżeli mamy dwie wielkości sinusoidalnie zmienne  $y$  i  $y'$  o jednakowym okresie zmienności, osiągające wartość maksymalną nie jednocześnie, to wyrażenia matematyczne dla takich wielkości będą:

$$y_t = Y_m \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

$$y'_t = Y'_m \cdot \sin \frac{2\pi \cdot (t \pm \tau)}{T}$$

Drugi z tych wzorów można napisać inaczej, mianowicie:

$$y'_t = Y'_m \cdot \sin \left( \frac{2\pi t}{T} \pm \frac{2\pi \tau}{T} \right)$$

albo, oznaczając  $\frac{2\pi\tau}{T}$  przez  $\varphi$ , mamy:

$$y' = Y'_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} \pm \varphi\right).$$

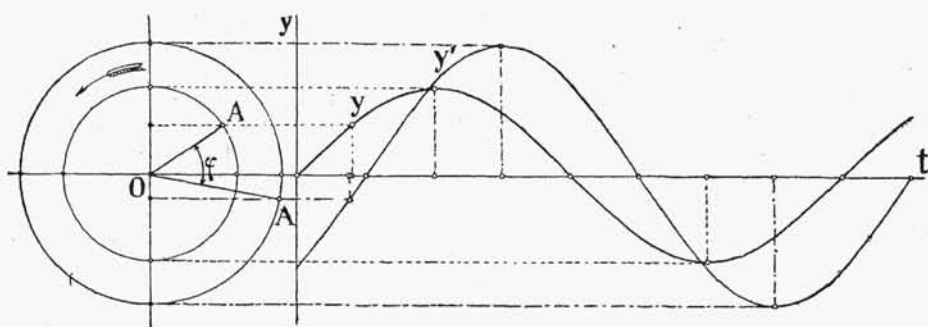
Na rys. 316 wykreślone są dwie sinusoidy za pomocą wyznaczania rzutów odcinków  $OA'$  i  $OA$ , obracających się z prędkością jednakową. Odcinki te tworzą kąt  $\varphi$ , który nie zmienia się przy ich obrocie.

W ten sposób otrzymane sinusoidy wyrażają zależność od czasu dwóch wielkości  $y$  i  $y'$  zmiennych sinusoidalnie, które można wyrazić wzorami:

$$y_t = Y_m \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

$$y' = Y'_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right).$$

Ponieważ wielkość  $y$  już przeszła przez wartość zero, gdy  $y'$  staje się zerem, mówimy, że wielkość  $y$  wyprzedza  $y'$  w czasie. Odpowiednio



Rys. 316.

do tego widzimy na rysunku, że odcinek  $OA$  wyprzedza w ruchu odcinek  $OA'$ . Sinusoidea zaś, wyrażająca zmienność wielkości wyprzedzającej, jest przesunięta wstecz wzdłuż osi czasu, przy takim bowiem położeniu wzajemnym, rzędne tej sinusoidy wcześniej niż sinusoidy drugiej przechodzą przez odpowiednie fazy, np. wartości zerowe, maksymalne i t. p.

Można również mówić, że wielkość  $y'$  spóźnia się względem wielkości  $y$ ; wyraża to oczywiście to samo, co orzeczenie, że,  $y$  wyprzedza wielkość  $y'$ . Odpowiednio do tego sposobu wyrażenia, widzimy z rysunku, że odcinek  $OA'$  spóźnia się w ruchu obrotowym względem odcinka  $OA$ .

Kąt  $\varphi$  nazywa się różnicą faz wielkości  $y$  i  $y'$ .

Można jednak różnicę faz wyrażać także w częściach okresu. Kąt  $2\pi$  odpowiada całemu okresowi  $T$ , więc kąt  $\varphi$  będzie odpowiadał pewnej części okresu, która wyraża się ułamkiem:

$$\frac{\varphi}{2\pi}.$$

Tym sposobem jeżeli np.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , to różnica faz wynosi  $\frac{1}{4}$  część okresu, przy  $\varphi = \pi$  pół okresu i t. d.

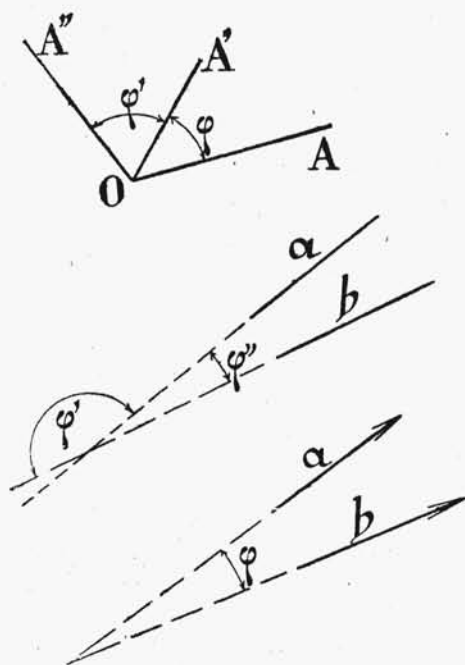
Z powyższych rozumowań widzimy, że dla wykreślenia sinusoid, wyrażających wielkości sinusoidalnie zmienne, musimy znać: długości odcinków, wyrażających wartości maksymalne, kąty, wskazujące różnicę faz pomiędzy poszczególnymi wielkościami, i długość okresu; te dane wystarczają wtedy, gdy nie chodzi o to, od kiedy ma być liczony czas przy wykreślaniu sinusoid. Opierając się na nich, można wyrażać wielkości sinusoidalnie zmienne o jednakowym okresie za pomocą odcinków, wykreślonych pod pewnemi kątami, jeden względem drugiego, np.  $OA, OA', OA''$  (rys. 317); długość tych odcinków wyraża wartości maksymalne odpowiednich wielkości, a kąty  $\varphi$  i  $\varphi'$  wyrażają różnicę faz.

Taki sposób wyobrażania wykreślnego ma jednak tę złą stronę, że kąt pomiędzy dwoma odcinkami nie jest wielkością jednoznaczną.

Dwa odcinki  $a$  i  $b$  (rys. 318) tworzą pomiędzy sobą dwa różne kąty  $\varphi'$  i  $\varphi''$ , których suma  $= 180^\circ$ . Otóż, jeżeli mowa o różnicy faz, to niewiadomo, który z tych kątów ma tę różnicę wyrażać.

Dla uniknięcia tej dwuznaczności oznaczamy kierunek odcinków, mianowicie zaopatrujemy je na rysunku w strzałki (rys. 319). Takim odcinkom o kierunku oznaczonym nadano nazwę wektorów. Różnicą faz będzie tu kąt  $\varphi$  pomiędzy wektorami, wybrany w taki sposób, ażeby oba kierunki wychodziły z wierzchołka kąta najczęściej mniejszy od  $180^\circ$ .

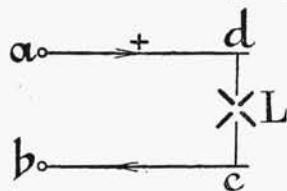
Właściwie i tutaj mogłaby być mowa jeszcze o kącie  $360^\circ - \varphi$  i t. p., ale tego rodzaju



Rys. 317, 318 i 319.

kąty na wykresie sinusoid odpowiadają temu samemu ich położeniu, natomiast dwie sinusoidy, przesunięte o  $180^\circ$ , będą zupełnie różne.

Dla nadania wektorom zupełnie określonego znaczenia fizycznego, za-  
chodzi jeszcze konieczność założenia jaki kierunek wielkości zmiennej bę-  
dzie przyjęty za dodatni, a więc np. przy natężeniu prądu elektrycznego, płynącego przez lampkę (rys. 320), który z kierunków prądu,  $a d c b$ , czy też  $b c d a$ , będzie uważany za dodatni? Jeżeli zaś chodzi np. o napięcie na lampce  $V_{dc}$ , to jaki kierunek napięcia przyjęty będzie za dodatni, od  $d$  do  $c$ , czy też od  $c$  do  $d$ ?



Rys. 320.

Nadto należy jeszcze zwrócić uwagę na tę okoliczność, że w praktyce mamy bardzo rzadko do czynienia z wartościami maksymalnymi rozważanych tu wielkości, przeważnie zaś z wielkościami skutecznymi t. j. z pierwiastkami kwadratowymi z przeciętnej kwadratów.

Z rozdziału I wiemy, że wartość skuteczna wyraża się wzorem:

$$y = \frac{Y_m}{\sqrt{2}},$$

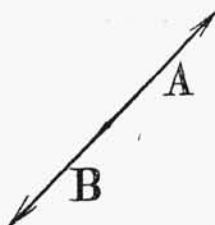
można więc przyjąć, że ten sam wektor wyraża również, aczkolwiek w pewnej odmiennej skali, wartość skuteczną.

Z powyższego rozumowania wynika, że zakładając pewien dodatni kierunek dla natężenia prądu, napięcia lub siły elektromotorycznej i t. p., możemy w przypadku zmienności okresowej tych wielkości, wyrazić je za pomocą wektorów, poprowadzonych względem siebie pod pewnymi kątami. Długości tych wektorów wyrażają w pewnej przyjętej skali wartości skuteczne odpowiednich wielkości, kąty zaś pomiędzy wektorami wyrażają różnicę faz. <sup>1)</sup> Skala dla wektorów wielkości jednorodnych na danym wykresie musi być oczywiście dla wszystkich wektorów jednakowa.

Przy stosowaniu wektorów do wyobrażania wielkości sinusoidalnie zmiennych, kierunek w przestrzeni pierwszego wektora jest dowolny; następne zaś wektory powinny być poprowadzone względem pierwszego pod pewnymi kątami, stosownie do różnicy faz.

Jeżeli dla jakichkolwiek powodów wypadnie zmienić kierunek dodatni, przyjęty w obwodzie prądu dla wykreślenia wektorów, pamiętać należy o tym, że odpowiedni wektor zmieni się wtedy również na odwrotny, albowiem wartości dodatnie staną się wtedy ujemnymi i odwrotnie.

<sup>1)</sup> Jeżeli wielkość  $y_1$  wyprzedza  $y_2$ , to wektor  $y_1$  kreśli się dalej o kąt różnicy faz w kierunku odwrotnym względem ruchu wskazówek zegarka, ponieważ ten kierunek przyjmujemy jako kierunek dodatni obrotu wektorów.



Rys. 321

Jeżeli więc np. wektor  $A$  (rys. 321) wyraża prąd płynący w obwodzie lampy (rys. 319), przy dodatnim kierunku prądu  $adcb$ , to w razie zmiany kierunku dodatniego na  $bcda$ , wypadnie wyrazić ten sam prąd za pomocą wektora  $B$  (rys. 321).

Sposób przedstawiania za pomocą wektorów wielkości sinusoidalnie zmiennych ma nader ważne znaczenie ze względu na ułatwienie w dodawaniu i odejmowaniu tych wielkości w tym przypadku, gdy okresy tych wielkości są jednakowe.

**2. Dodawanie wektorów.** Dajmy na to że mamy dowolną liczbę wektorów (rys. 322), np.  $y^I, y^{II}, y^{III}, y^{IV}$ , które wyrażają wielkości zmienne sinusoidalnie, kąty pomiędzy temi wektorami przedstawiają różnicę faz pomiędzy poszczególnymi wielkościami.

Sumę geometryczną takich wektorów stanowić będzie wektor, którego długość równa się długości zamykającego boku wielokąta, utworzonego z wektorów składowych w ten sposób, że strzałki wszystkich wektorów składowych są zwrócone w jedną stronę, np. w kierunku ruchu wskazówek zegarka. Wektor wyrażający sumę, ma strzałkę zwróconą w stronę odwrotną względem strzałek innych wektorów.

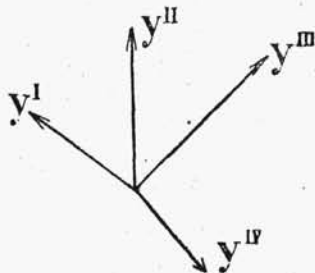
Na rys. 323 wektor  $y$  jest sumą wektorów  $y^I, y^{II}, y^{III}, y^{IV}$ . Ma on tę własność, że suma algebraiczna rzutów wektorów składowych na pewien dowolny kierunek równa się rzutowi wektora, wyrażającego sumę, czyli wektora wypadkowego.

Z rys. 323 widzimy, że:

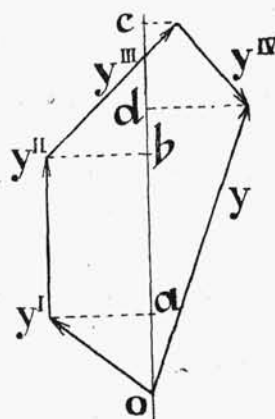
$$\overline{od} = \overline{oa} + \overline{ab} + \overline{bc} - \overline{cd}.$$

Wektory wyrażają wielkości sinusoidalnie zmienne o okresie jednakowym, przeto suma rzutów tych wektorów na kierunek pionowy będzie wyrażała sumę wartości chwilowych tych wielkości.

Ta suma rzutów równa się, jak widzieliśmy, rzutowi wektora wypadkowego, więc rzut ten w każdej chwili będzie wyrażał sumę wartości chwilowych powyższych wielkości. Z tego wynika, że suma szeregu wielkości sinusoidal-



Rys. 322.



Rys. 323.

nie zmiennych jest wielkością również sinusoidalnie zmienną i że wektor, wyrażający tę sumę, jest wektorem wypadkowym, otrzymanym przez dodawanie geometryczne wektorów składowych.

Jeżeli wektory składowe wyrażają w pewnej skali wartości skuteczne wielkości składowych, to oczywiście wektor wypadkowy będzie wyrażał w tej samej skali wartość skuteczną sumy.

Taką sumę wartości skutecznych danych wielkości, dla odróżnienia jej od zwykłej sumy algebraicznej, nazywamy sumą geometryczną. Szczególnie ważne znaczenie, przy zastosowaniu dodawania wektorów do prądów zmiennych, ma ten przypadek, kiedy suma równa się zeru; wtedy, jak widać z rys. 323,  $y$  będzie  $= 0$ , gdy wielobok wektorów składowych będzie zamknięty.

**3. Odejmowanie wektorów.** Różnicą geometryczną dwóch wektorów  $y'$  i  $y''$  [rys. 324 (a)], nazywamy wektor  $y$ , stanowiący sumę wektorów  $y'$  i  $(-y'')$ .

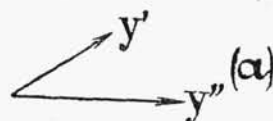
Łatwo spostrzedz że wektor otrzymany przez połączenie końców wektorów  $y'$  i  $y''$  [rys. 324 (c)], ze strzałką zgodną z odjemnikiem  $y''$ , wyraża również sumę  $y' + (-y'')$ , a więc jest różnicą wektorów  $y'$  i  $y''$  rys. 324 (a).

Na podstawie podobnego rozumowania, jak przy dodawaniu, łatwo przyjdziemy do wniosku, że różnica dwóch wielkości sinusoidalnie zmiennych jest wielkością również sinusoidalnie zmienną i wyraża się za pomocą wektora, stanowiącego różnicę geometryczną wektorów wielkości składowych.

**4. Rozwiązywanie równań.** Mając w ten sposób określone działania dodawania i odejmowania, możemy zestawiać równania geometryczne i przekształcać je tak, jak równania algebraiczne, mając oczywiście na względzie zawsze znaczenie symbolów  $(+)$ ,  $(-)$  i  $(=)$ .

Co do znaku równości, należy pamiętać, że w rachunku wektorowym równiami nazywamy takie wektory, które mają nie tylko równe długości, ale zarazem ten sam kierunek w przestrzeni.

Zaznaczyć w końcu wypada, że jeżeli chodzi tylko o powzięcie pewnego wyobrażenia o rozważanych wielkościach, albo też o niezbyt dokładne obliczenia, to w tych przypadkach można śmiało stosować wykreślne rozwiązywanie równań geometrycznych. Natomiast tam, gdzie chodzi o wyniki możliwie dokładne, wartość wielkości niewiadomych znajdujemy za pomocą trygonometrycznego rozwiązywania trójkątów otrzymanych na podstawie wykresu przybliżonego.



Rys. 324.