

ROZDZIAŁ XXIX.

Powstawanie i znikanie prądów: ciągłe i oscylacyjne. ¹⁾

1. Obwód z oporem omowym. Gdy zamkniemy obwód pozbawiony samoindukcji i pojemności (rys. 291), to prąd osiągnie o d r a z u maksymalną wartość, zależną od wielkości siły elektromotorycznej ogniwa E i oporności omowej obwodu R .

Prąd w każdej chwili będzie:

$$I = \frac{E}{R}.$$

Wielkość jego, jak to widzimy ze wzoru, nie zależy od czasu.



Rys. 291.

2. Obwód z oporem omowym i samoindukcją. Przypadek omówiony w § 1 jest idealny; w praktyce obwód zawsze ma pewną pojemność i samoindukcję (rys. 292). Pojemność wprowadzić jest częstokroć mała, można ją więc pominąć, konieczne jednak trzeba uwzględnić samoindukcję.

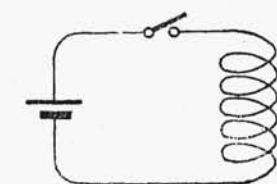
Oznaczmy siłę elektromotoryczną samoindukcji przez E_s , a indukcyjność — przez L ; wtedy:

$$i_t = \frac{E + E_{st}}{R},$$

$$E_{st} = -L \cdot \frac{di_t}{dt},$$

a więc:

$$i_t = \frac{E - L \cdot \frac{di_t}{dt}}{R}$$



Rys. 292.

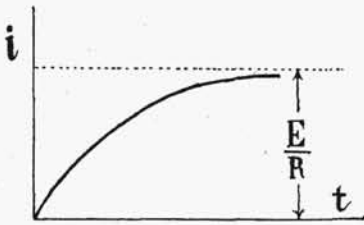
¹⁾ Szczegóły patrz w książce F. Badella i A. C. Crehore'a: „Theorie der Wechselströme”. (Oryginał tej książki jest pisany po angielsku), a także Fraenckel „Theorie der Wechselströme”.

Z tych wzorów wypada, że przy powstawaniu prądu w obwodzie po zamknięciu wyłącznika, prąd nie może osiągnąć od razu wielkości:

$$\frac{E}{R},$$

ponieważ przy wzmaganiu się prądu powstaje siła elektromotoryczna samoindukcji, skierowana przeciwko prądowi.

Doświadczenie stwierdza, że zależność prądu od czasu wyraża się krzywą która ma kształt wskazany na rys. 293; jest to krzywa tak zwana logarytmiczna, zbliżająca się asymptotycznie do prostej, poprowadzonej na odległości $\frac{E}{R}$ od osi odciętych. Prąd osiąga dokładnie wartość $\frac{E}{R}$ dopiero po upływie nieskończonego czasu.



Rys. 293.

Jednak w obwodach, najczęściej spotykanych w praktyce, już po upływie bardzo drobnej części sekundy wielkość prądu

różni się tylko nieznacznie od $\frac{E}{R}$.

Analitycznie zależność natężenia prądu od czasu da się znaleźć w obwodach z samoindukcją w sposób następujący:

Z powyższych równań mamy:

$$i_t \cdot R = E - L \cdot \frac{d i_t}{d t}.$$

$$L \cdot \frac{d i_t}{d t} = E - i_t \cdot R,$$

$$R \cdot \frac{d i_t}{E - i_t \cdot R} = R \cdot \frac{d t}{L}.$$

Całkując to równanie, otrzymamy:

$$-\log_n (E - i_t \cdot R) = \frac{R \cdot t}{L} + k,$$

gdzie k — dowolna wielkość stała.

Jeżeli przez ε (epsilon) oznaczymy podstawę naturalnych logarytmów, to:

$$E - i_t R = \varepsilon \left(-\frac{R t}{L} - k \right)$$

stąd:

$$i_t = \frac{1}{R} \cdot \left[E - \varepsilon \left(-\frac{R t}{L} - k \right) \right] \dots \dots \dots (a)$$

Jest to równanie ogólne wyrażające zależność prądu od czasu.

Jeżeli wyrażamy prąd powstający, to przy $t = 0$; $i_0 = 0$, więc:

$$0 = \frac{1}{R} \cdot [E - \varepsilon^{-k}]$$

Stąd:

$$\varepsilon^{-k} = E.$$

Więc:

$$i_t = \frac{1}{R} \left[E - E \cdot \varepsilon^{-\frac{Rt}{L}} \right]$$

albo:

$$i_t = \frac{E}{R} \left(1 - \varepsilon^{-\frac{Rt}{L}} \right)$$

Przy $t = 0$, $\varepsilon^{-\frac{Rt}{L}} = 1$; wraz z czasem wielkość ta stopniowo zmniejsza się i przy $t = \infty$, $\varepsilon^{-\frac{Rt}{L}} = 0$, wtedy:

$$i_t = \frac{E}{R}.$$

Prędkość, z jaką prąd wzrasta, zależy od współczynnika:

$$\frac{R}{L}.$$

Im większe jest R , a L mniejsze, tem prędzej wartość $\varepsilon^{-\frac{Rt}{L}}$ zbliża się do zera, i tym prędzej zwiększa się prąd.

Współczynnik $\frac{R}{L}$ nazywa się stałą czasu; zależy on, jak to widać ze wzoru, od własności obwodu elektrycznego; dlatego też mówimy zwykle o stałej czasu dla danego obwodu elektrycznego.

Przykład. $E = 1,5 \text{ V}$, $R = 1 \Omega$, $L = 0,1 \text{ H}$. Obliczymy czas, po upływie którego prąd będzie miał natężenie równające się połowie największego natężenia, jakie ustaliłoby się po upływie czasu nieskończenie długiego.

Stosownie do danych zadania prąd ma być:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,5}{1} = 0,75 \text{ A},$$

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{0,1} = 10.$$

$$0,75 = 1,5 (1 - \varepsilon^{-10t}),$$

stąd:

$$t = 0,0694 \text{ sekundy.}^1)$$

Obliczmy jeszcze przy tych samych danych, jaką część ustalonego prądu (1,5 A) wyniesie natężenie prądu po upływie 0,5 sekundy. Otóż:

$$i_t = \frac{E}{R} (1 - e^{-10,0,5}) = \frac{E}{R} \cdot 0,99327.$$

Tym sposobem wyznaczyliśmy, że, po upływie pół sekundy od chwili zamknięcia obwodu, natężenie prądu będzie się różniło od tego, jakie ustaliłoby się po upływie czasu nieskończenie długiego, o 0,673 procentu.

Przy przerywaniu prądu zmiana prądu w czasie zależy przedewszystkim od tego, w jaki sposób odbywa się przerywanie połączenia w wyłączniku, t. j. w jaki sposób zmienia się opór kontaktu²⁾ przez rozłączenie którego przerywa się obwód.

Gdyby kontakt można było rozłączyć raptownie, tak, że opór jego od małej części oma powiększyłby się odrazu, do nieskończoności, to prąd byłby przerywany w jednej chwili, raptownie. W rzeczywistości jednak ścisłość styku osłabia się zawsze stopniowo, a nadto powstaje tu jeszcze iskra albo tak zwany łuk pomiędzy rozsuwającymi się powierzchniami. Iskra i łuk stanowią strumień rozżarzonych gazów i pary, jaka tworzy się z rozsuwających się powierzchni przewodników. W tych warunkach opór w miejscu przerwy zwiększa się stopniowo i odpowiednio do tego słabnie natężenie prądu.

Przy zmniejszaniu się prądu w obwodzie powstaje siła elektromotoryczna samoindukcji zgodna z prądem, która dodaje się do siły elektromotorycznej źródła prądu i może wywołać bardzo znaczne napięcie pomiędzy rozsuwającymi się w kontakcie powierzchniami.

Oznaczmy przez E siłę elektromotoryczną źródła prądu, przez E_{st} — siłę elektromotoryczną samoindukcji, przez i_t — natężenie prądu, przez r — oporność obwodu, a przez R — opór w kontakcie, który zaczynamy przerywać. Na zasadzie prawa Ohma możemy napisać:

$$i_t = \frac{E + E_{st}}{r + R},$$

$$i_t \cdot r + i_t \cdot R = E + E_{st}.$$

Przy przerywaniu prądu jest taka chwila, gdy R staje się znacznie większe od r , wtedy w przybliżeniu:

$$i_t R = E + E_{st}.$$

¹⁾ $\varepsilon = 2,718 \dots$

²⁾ Kontakt znaczy styk, zetknięcie.

Iloczyn iR jest napięciem między rozsuwanymi powierzchniami kontaktu. Wypada więc, że to napięcie równa się sumie sił elektromotorycznych źródła prądu i samoindukcji. Przy znacznej samoindukcji suma ta może być wiele razy większą od siły elektromotorycznej źródła prądu. Jest to, tak zwana, wyżka napięcia przy przerywaniu prądu w obwodzie z samoindukcją. Za pomocą wzorów można wyjaśnić przebieg zjawiska przerywania prądu w sposób następujący:

Założmy, że oporność obwodu r , w którym płynie narażenie prąd stały I została zwiększona o R ; wtedy cała oporność obwodu będzie $r + R$.

Po wprowadzeniu oporu dodatkowego R prąd stopniowo będzie się zmniejszał. Stosując do tego przypadku równanie (a) str. 307, otrzymamy:

$$i_t = \frac{1}{r + R} \left[E - \varepsilon \left(-\frac{(r+R)t}{L} - k \right) \right]$$

Ponieważ przy $t = 0$, $i_0 = I$, przeto:

$$I = \frac{1}{r + R} \left[E - \varepsilon^{-k} \right],$$

i stąd:

$$\varepsilon^{-k} = E - I(r + R).$$

Na zasadzie prawa Ohma:

$$E = I \cdot r,$$

więc:

$$\varepsilon^{-k} = -I \cdot R.$$

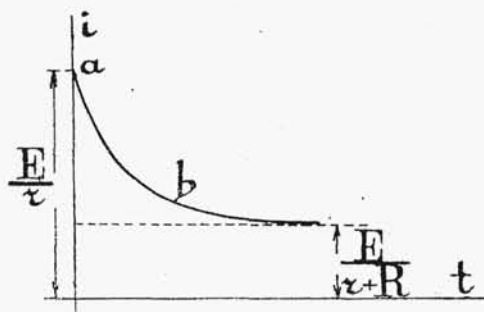
Wprowadzając tę wartość dla ε^{-k} w równanie prądu, otrzymamy:

$$i_t = \frac{1}{r + R} \left[E + IR \cdot \varepsilon^{-\frac{(r+R)t}{L}} \right]$$

albo, uwzględniając, że $E = I r$:

$$i_t = \frac{E}{r + R} \left(1 + \frac{R}{r} \cdot \varepsilon^{-\frac{(r+R)t}{L}} \right).$$

Jest to oczywiście wzór krzywej ab (rys. 294), która jest asymptotyczna do prostej równoległej do osi odciętych, przeprowadzonej na odległości $\frac{E}{r+R}$.



Rys. 294.

Wzór ten ma szczególną wartość ze względu na to, że daje możliwość obliczenia siły elektromotorycznej samoindukcji, powstającej w tym przypadku.

Siła elektromotoryczna samoindukcji będzie.

$$E_{st} = -L \cdot \frac{di}{dt}.$$

Różniczkując wzór dla i , otrzymamy:

$$E_{st} = L \cdot \frac{E \cdot R}{(r+R)r} \cdot \frac{r+R}{L} \cdot \varepsilon^{-\frac{(r+R)t}{L}}.$$

a więc:

$$E_{st} = E \cdot \frac{R}{r} \cdot \varepsilon^{-\frac{(r+R)t}{L}}.$$

Na początku zmiennego okresu prądu przy $t=0$, E_{st} będzie oczywiście największe; podstawiając w powyższe równanie zero zamiast t , otrzymamy:

$$E_{s0} = E \cdot \frac{R}{r}.$$

Tym sposobem siła elektromotoryczna samoindukcji w pierwszej chwili będzie tyle razy większa od siły elektromotorycznej źródła prądu, ile razy opór dodatkowy jest większy od pierwotnej oporności obwodu.

Podobna siła elektromotoryczna powstaje też oczywiście przy zupełnym przerywaniu obwodu, i wtedy może ona stać się bardzo znaczna. Wielka siła elektromotoryczna samoindukcji będzie trwać tym dłużej, im większy jest współczynnik samoindukcji obwodu. Wynika to z równania dla E_{st} .

Można obliczyć czas t_1 , po upływie którego wielkość siły elektromotorycznej samoindukcji będzie wynosiła połowę jej największej wartości.

Załóżmy, że $E_{st} = \frac{1}{2} E \cdot \frac{R}{r}$, wtedy:

$$\frac{1}{2} = \varepsilon^{-\frac{(r+R)t_1}{L}},$$

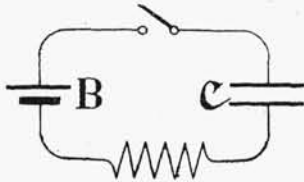
a logarytmując to równanie, otrzymamy:

$$t_1 = -\frac{\log \frac{1}{2}}{\log \varepsilon} \cdot \frac{L}{r+R} = 0,69 \cdot \frac{L}{r+R}.$$

Wzór ten wskazuje, że t_1 jest proporcjonalne do L .

Wielkość napięcia w miejscu przerwy obwodu zależy jeszcze w znacznym stopniu od pojemności różnych części obwodu, skutkiem tego, że w tym obwodzie zachodzą zjawiska rozważone w paragrafach następnych.

3. Obwód z pojemnością i oporem omowym. Rozważmy prąd w obwodzie (rys. 295), składającym się z ogniwa galwanicznego B , kondensatora C , przewodników, łączących źródło prądu z kondensatorem i wyłącznika.



Rys. 295.

Po zamknięciu wyłącznika prąd będzie ładował kondensator aż do chwili, kiedy kondensator naładuje się do napięcia, równającego się siłę elektromotorycznej ogniwa B .

Wzór wyrażający zależność natężenia prądu od czasu, znajdziemy przez rozumowanie następujące:

Oznaczmy oporność omową całego obwodu przez R , pojemność kondensatora przez C , siłę elektromotoryczną ogniwa przez E , siłę elektromotoryczną kondensatora przez E_c , napięcie na kondensatorze przez v_c , prąd w obwodzie przez i_t , a ilość elektryczności zebranej na każdej z okładek kondensatora przez q_t .

Wtedy:

$$i_t = \frac{dq_t}{dt},$$

$$v_{ct} = \frac{q_t}{C},$$

$$E_{ct} = -v_{ct} = -\frac{q_t}{C},$$

$$i_t \cdot R = E + E_{ct},$$

a więc:

$$\frac{dq_t}{dt} \cdot R = E - \frac{q_t}{C},$$

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{dq_t}{E - \frac{q_t}{C}} = \frac{dt}{R \cdot C}$$

Całkując to równanie, otrzymamy:

$$-\log \left(E - \frac{q_t}{C} \right) = \frac{t}{R \cdot C} + k;$$

stąd:

$$E - \frac{q_t}{C} = e \left(-\frac{t}{R \cdot C} - k \right)$$

i:

$$q_t = C \left[E - e \left(-\frac{t}{R \cdot C} - k \right) \right] \dots \dots \dots (b)$$

W chwili $t = 0$, $q_0 = 0$, zatem:

$$0 = C \left[E - \varepsilon^{-k} \right],$$

$$\varepsilon^{-k} = E,$$

a więc:

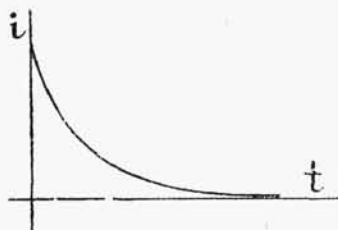
$$q_t = E \cdot C \left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{R \cdot C}} \right),$$

a prąd:

$$i_t = \frac{dq_t}{dt} = \frac{E}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{R \cdot C}}.$$

Wykres, wyrażający zależność prądu ładującego od czasu ma postać przedstawioną na rys. 296; linia logarytmiczna zbliża się asymptotycznie do osi t ,

a przy $t = 0$, $i_0 = \frac{E}{R}$.



Rys. 296.

Łącząc okładki naładowanego kondensatora przez opór R , wyładowujemy go (rys. 297).

Zmienność prądu wyładowującego wyrazi się wzorem, który łatwo otrzymamy ze wzoru (b), zakładając $E = 0^1$. Z tego wzoru wynika, że:

$$q_t = -C \varepsilon \left(-\frac{t}{R \cdot C} - k \right).$$



Rys. 297.

Przy rozważaniu wyładowania, w chwili $t = 0$ mamy kondensator naładowany ilością elektryczności wynoszącą np. Q na każdej okładce.

Wtedy:

$$q_0 = Q,$$

więc:

$$Q = -C \cdot \varepsilon^{-k}$$

i:

$$\varepsilon^{-k} = -\frac{Q}{C}.$$

¹⁾ Jeżeli porównamy rys. 295 i 297, łatwo spostrzeżemy, że gdy siła elektromotoryczna ogniwa równa się zeru, obwód rysunku 295 przekształca się w obwód rys. 297.

Wtedy:

$$q_t = Q \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}},$$

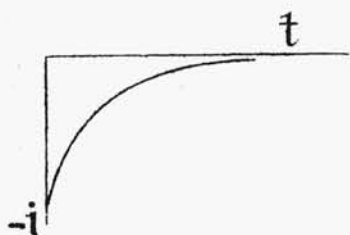
$$i_t = \frac{dq_t}{dt} = -Q \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}},$$

a ponieważ:

$$Q = V_c \cdot C,$$

przeto:

$$i_t = -\frac{V_c}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}.$$



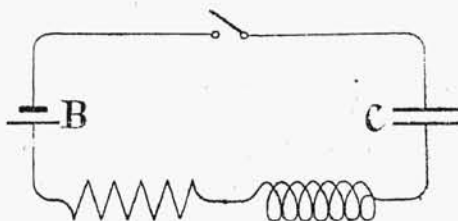
Rys. 298.

Prąd wyładowujący wyrazi się linją, wskazaną na rys. 298 z którego widać, że jest to linja, zupełnie symetryczna do wskazanej na rys. 296. W pierwszej chwili natężenie prądu będzie:

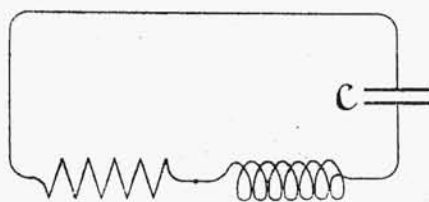
$$i_0 = -\frac{V_c}{R}.$$

4. Obwód z pojemnością, oporem omowym i samoindukcją.

Jeżeli w takim obwodzie (rys. 299) mamy źródło prądu stałego w postaci ogniwa galwanicznego, to tak samo jak poprzednio (§ 3) prąd będzie przebiegał tylko dotąd, dopóki nie naładuje kondensatora.



Rys. 299.



Rys. 300.

Podobnie przy wyładowywaniu kondensatora, przez obwód wskazany na rys. 300, będzie płynął chwilowy prąd wyładowujący. Charakter zmienności prądu wyładowującego będzie taki sam jak prądu ładującego. W pierwszym przypadku (rys. 299) w obwodzie będą czynne trzy siły elektromotoryczne E — siła elektromotoryczna źródła prądu, E_s — samoindukcji, E_c — pojemności. Wzór prawa Ohma będzie wtedy następujący:

$$i_t \cdot R_t = E + E_{st} + E_{ct}.$$

Wielkości E_{ct} i E_{st} można wyrazić jak następuje:

$$E_{ct} = -v_{ct} = -\frac{q_t}{C} = -\frac{\int i_t \cdot dt}{C},$$

$$E_{st} = -L \cdot \frac{di_t}{dt},$$

a więc:

$$i_t \cdot R = E - \frac{\int i_t \cdot dt}{C} - L \cdot \frac{di_t}{dt}.$$

Różniczkując to równanie względem t , otrzymamy równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$L \cdot \frac{d^2 i_t}{dt^2} + R \cdot \frac{di_t}{dt} + \frac{i_t}{C} = 0.$$

W drugim przypadku, gdy kondensator wyładowuje się (rys. 300), mamy tylko dwie siły elektromotoryczne: E_{st} i E_{ct} . Siła elektromotoryczna samoindukcji wyraża się tym samym wzorem jak poprzednio. Siła zaś elektromotoryczna kondensatora zależy od ładunku, który pozostał w chwili t na okładkach kondensatora, kierunek jej jest zgodny z prądem. Oznaczmy ilość elektryczności na każdej z okładek kondensatora przed wyładowaniem przez Q , to po upływie pewnego czasu na okładkach kondensatora będziemy mieli ładunek:

$$Q - \int i_t \cdot dt,$$

a przeto:

$$E_{ct} = \frac{Q - \int i_t \cdot dt}{C}.$$

Równanie, wyrażające zmienność prądu na zasadzie prawa Ohma, będzie:

$$i_t \cdot R = \frac{Q - \int i_t \cdot dt}{C} - L \cdot \frac{di_t}{dt}.$$

Różniczkując je względem t , otrzymamy równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$L \cdot \frac{d^2 i_t}{dt^2} + R \cdot \frac{di_t}{dt} + \frac{i_t}{C} = 0,$$

zupełnie takie samo jak dla prądu ładującego kondensator.

Temu równaniu różniczkowemu czyni zadość rozwiązanie:

$$i_t = A \cdot e^{kt},$$

A i k — czynniki stałe.



Podstawiając wyraz dla i_t w równanie różniczkowe, otrzymamy: ¹⁾

$$k^2 + \frac{R}{L} \cdot k + \frac{1}{LC} = 0.$$

Rozwiązujemy to równanie względem k .

$$k = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Jeżeli poszczególne wartości dla k oznaczymy przez k_1 i k_2 , to:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \\ k_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (a)$$

Równaniu różniczkowemu będą czynić zadość dwie funkcje:

$$\begin{aligned} i_t' &= A_1 \varepsilon^{k_1 t} \\ i_t'' &= A_2 \varepsilon^{k_2 t} \end{aligned}$$

Rozwiązanie ogólne otrzymujemy, biorąc sumę dwóch powyższych funkcji.

$$i_t = A_1 \varepsilon^{k_1 t} + A_2 \varepsilon^{k_2 t} \dots \dots \dots (b)$$

Stałe współczynniki A_1 i A_2 znajdziemy przechodząc od wzoru natężenia prądu do wzoru ładunku elektrycznego. Przez q_t oznaczmy ilość elektryczności wyładowanej z kondensatora w ciągu czasu t .

$$q_t = \int_0^t i_t dt.$$

$$q_t = \left(\frac{A_1}{k_1} \cdot \varepsilon^{k_1 t} + \frac{A_2}{k_2} \cdot \varepsilon^{k_2 t} \right) - \left(\frac{A_1}{k_1} + \frac{A_2}{k_2} \right) \dots \dots \dots (c)$$

Po upływie nieskończonego czasu ładunek kondensatora całkowicie wyładowuje się, więc przy $t = \infty$, $q_\infty = Q$; gdzie Q początkowy ładunek kondensatora.

Podstawiając w równaniu dla q_t , $t = \infty$, i uwzględniając że k_1 i k_2 są mniejsze od 0, co wynika z wyrażenia tych czynników, otrzymamy:

$$-Q = \frac{A_1}{k_1} + \frac{A_2}{k_2} \dots \dots \dots (d)$$

Pozatem przy $t = 0$; $i = 0$, więc podstawiając $t = 0$ w równanie dla prądu wypada:

$$0 = A_1 + A_2 \dots \dots \dots (e)$$

¹⁾ $\frac{di_t}{dt} = A \cdot k \cdot \varepsilon^{kt}$, $\frac{d^2 i_t}{dt^2} = A \cdot k^2 \cdot \varepsilon^{kt}$.

Z równań (d) i (e) otrzymujemy:

$$A_1 = -A_2 = \frac{Q}{\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}} = \frac{k_1 k_2 \cdot Q}{k_1 - k_2}.$$

Uwzględniając powyższe wywody otrzymamy dla prądu równanie następujące:

$$i_t = \frac{k_1 k_2 \cdot Q}{k_1 - k_2} \cdot \left(\varepsilon^{k_1 t} - \varepsilon^{k_2 t} \right) \dots \dots \dots (f)$$

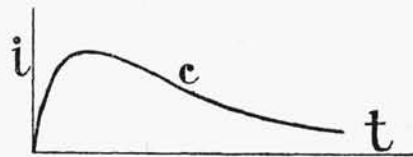
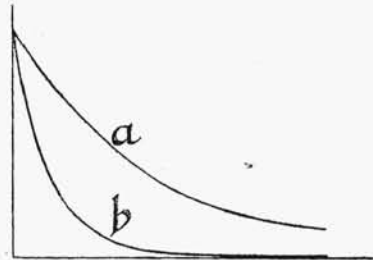
Przy różnych wartościach R , L i C , $i_t = f(t)$ ma różne własności.

I. Gdy $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ czyli $R^2 > 4 \frac{L}{C}$, wtedy k_1 i k_2 stanowią dwie

liczby rzeczywiste, absolutnie $k_2 > k_1$. W tych warunkach $i_t = f(t)$ może być przedstawiona wykreślnie tak jak wskazuje rys. 301. Tu rzędne linii c są różnicą rzędnych dwóch linii logarytmicznych a i b , wyrażających funkcje:

$$i_t' = \frac{k_1 k_2 Q}{k_1 - k_2} \cdot \varepsilon^{k_1 t}$$

$$i_t'' = \frac{k_1 k_2 Q}{k_1 - k_2} \cdot \varepsilon^{k_2 t}$$



Rys. 301.

Wyładowanie jest ciągłe, przy którym prąd stopniowo wzrasta do maximum a następnie stopniowo zbliża się do zera.

II. Gdy: $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ czyli $R^2 = 4 \frac{L}{C}$, to $k_1 = k_2 = -\frac{R}{2L}$

We wzorze dla i_t ;

$$\varepsilon^{k_1 t} - \varepsilon^{k_2 t} = 0 \text{ i } k_1 - k_2 = 0$$

więc:

$$i_t = \frac{0}{0}$$

Powyższą nieoznaczoność możemy rozwikłać w sposób następujący.

Oznaczmy $\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$ przez s , wtedy:

$$k_1 = -\frac{R}{2L} + s; \quad k_2 = -\frac{R}{2L} - s.$$

$$\varepsilon^{k_1} - \varepsilon^{k_2} = \varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}} \left(\varepsilon^{st} - \varepsilon^{-st} \right)$$

$$k_1 - k_2 = 2s,$$

więc:

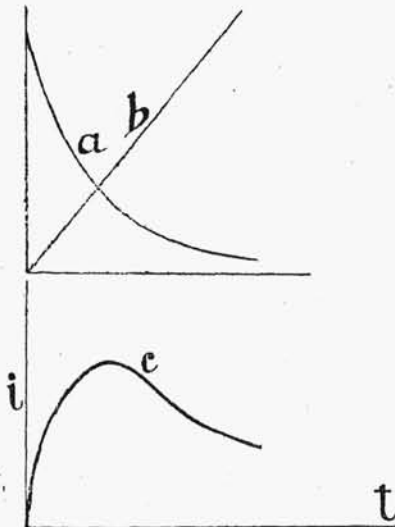
$$i_t = Q \cdot k_1 k_2 \cdot e^{-\frac{Rt}{2L}} \cdot \frac{e^{st} - e^{-st}}{2s}.$$

W granicy:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{e^{st} - e^{-st}}{2s} \right)_{s=0} = \left[\frac{d(e^{st} - e^{-st})}{ds} : \frac{d2s}{ds} \right]_{s=0}^{1)} \\ = \left\{ \frac{t \cdot e^{st} + t \cdot e^{-st}}{2} \right\}_{s=0} = t$$

więc uwzględniając jeszcze, że $k_1 \cdot k_2 = \frac{R^2}{4L^2}$, otrzymamy:

$$i_t = Q \cdot \frac{R^2}{4L^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t}$$



Rys. 302.

Wykres c rys. 302 tego prądu wyznaczymy, mnożąc rzędne linii logarytmicznej a przez rzędne prostej b .

Tu ogólny kształt funkcji $i_t = f(t)$ pozostaje ten sam jaki był poprzednio, wyładowanie mamy także ciągłe. W rozważanych warunkach wyładowanie odbywa się najszybciej.

III. Gdy $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ czyli $R^2 < 4 \frac{L}{C}$,

to wyrazy dla k_1 i k_2 są urojone. Jednak za pomocą przekształceń matematycznych można i w tym przypadku znaleźć wyrażenie rzeczywiste dla funkcji prądu elektrycznego $i_t = f(t)$.

Przedewszystkiem przekształcamy wzór dla k .

$$k = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}};$$

wprowadzając skróty α , β i j , możemy napisać:

$$k_1 = -\alpha + j\beta; \quad k_2 = -\alpha - j\beta.$$

¹⁾ Wzór znany w matematyce.

Wtedy we wzorze (f) (str. 317) dla prądu.

$$\frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 - k_2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2j \cdot \beta},$$

$$\varepsilon^{(-\alpha + j\beta)t} - \varepsilon^{(-\alpha - j\beta)t} = \varepsilon^{-\alpha t} (\varepsilon^{j\beta t} - \varepsilon^{-j\beta t}).$$

Na podstawie własności szeregów, łatwo przekonać się że:

$$\varepsilon^{j\beta t} = \cos \beta t + j \sin \beta t$$

$$\varepsilon^{-j\beta t} = \cos \beta t - j \sin \beta t$$

więc:

$$\varepsilon^{-\alpha t} (\varepsilon^{j\beta t} - \varepsilon^{-j\beta t}) = \varepsilon^{-\alpha t} 2j \sin \beta t.$$

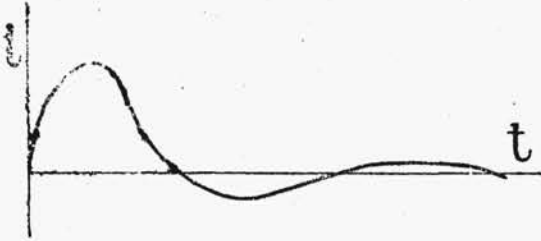
Wprowadzając wyniki powyższych przekształceń we wzór dla prądu otrzymamy:

$$i_t = Q \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2j\beta} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \cdot 2j \sin \beta t$$

albo, skracając przez $2j$, otrzymamy:

$$i_t = Q \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

Wzór ten wskazuje że prąd będzie okresowo zmienny, z amplitudą stopniowo malejącą. Otrzymamy tu tak zwane wyładowanie wahadłowe albo oscylacyjne tłumione.



Wykres takiego wyładowania widzimy na rys. 303.

Wprowadzając znaczenie liter α i β znajdziemy:

Rys. 303

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} = \frac{\frac{R^2}{4L^2} + \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} =$$

$$= \frac{1}{LC \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = \frac{2}{\sqrt{4LC - R^2 C^2}}.$$

Więc

$$i_t = \frac{2Q}{\sqrt{4LC - R^2 C^2}} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

Tu $\alpha = \frac{R}{2L}$ — stanowi współczynnik tłumienia.

β — czynnik charakteryzujący okres drgań — T .

$$\beta = \frac{2\pi}{T},$$

więc:

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}},$$

albo:

$$T = 4\pi \frac{LC}{\sqrt{4LC - R^2C^2}}.$$

Długość okresu jest wielkością stałą.

Taki prąd zmienny można wyrazić wzorem:

$$i_t = i_m \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

zastrzegając że i_m jest zmienne w czasie i zależność i_m od czasu wyraża się wzorem:

$$i_m = \frac{2Q}{\sqrt{4LC - R^2C^2}} \cdot e^{-\frac{Rt}{2L}}.$$

Amplituda zanika według funkcji logarytmicznej. Można więc taki prąd nazwać sinusoidalnym z malejącą amplitudą.

Z punktu widzenia energetycznego mamy zjawisko następujące. Kondensator naładowany (rys. 300) zawiera zasób energii w polu elektrycznym, a wokoło całego obwodu, szczególnie zaś wewnątrz zwojnicy, znajduje się energia pola magnetycznego. Gdy na okładkach kondensatora napięcie się wzmacnia, zasób energii pola elektrycznego wzrasta, gdy zaś rośnie natężenie prądu, przybywa energii w polu magnetycznym. Ze wzoru dla prądu ładującego lub wyładowującego kondensator:

$$i_t = C \cdot \frac{d v_t}{d t}$$

łatwo spostrzedz, że przy sinusoidalnej zmienności prądu napięcie na kondensatorze zmienia się cosinusoidalnie, więc gdy mamy maximum napięcia na kondensatorze, natężenie prądu równa się zeru i odwrotnie.

Z uwag tych wynika, że energia przenosi się tu z pola magnetycznego do elektrycznego i z powrotem z elektrycznego do magnetycznego, jednocześnie jednak pod wpływem oporu omowego pewna część jej zamienia się na ciepło, wywołując stałe zmniejszanie się energii elektromagnetycznej. Po upływie nieskończonego czasu cała energia elektromagnetyczna obwodu zamieni się na ciepło. Skutkiem tego właśnie drgania elektryczne mają wprawdzie stały okres, ale zanikające rzędne.

Okres drgań zależy tylko od indukcyjności, pojemności i oporności omowej obwodu, dla tego nazywa się okresem własnym drgań elektry-

cznych tego obwodu. Ładunki elektryczne, znajdujące się w obwodzie, wprawione w ruch przez jakiś, chwilowy bodziec, poruszają się, wytwarzając prąd o powyższym okresie, zupełnie podobnie jak sprężyna, umocowana w jednym końcu, odgięta i pozostawiona samej sobie waha się z określoną częstotliwością drgań, jej właściwą.

Wszystkie wywody teoretyczne, podane powyżej, są zupełnie zgodne z wynikami doświadczeń. Jako przykład podaję na rys. 304 (a) (b) (c) wykresy, otrzymane za pomocą oscylografu¹⁾, wyrażające zależność prądu

od czasu w przypadku wyładowania wahadłowego (oscylacyjnego) kondensatora.

Rys. 304 (a) odpowiada przypadkowi, gdy w obwodzie mamy duży opór omowy, skutkiem czego drgania zanikają bardzo szybko. Na rys. 304 (b) widzimy drgania elektryczne przy małym oporze omowym, małej indukcyjności i małej pojemności, a na rys. 304 (c) również przy małym oporze omowym, lecz przy dużej indukcyjności i pojemności.

Gdy oporność omowa obwodu jest bardzo mała, własności prądu i obwodu będą wyrażone w przybliżeniu poprzednimi wzorami przy założeniu, że $R=0$ wtedy:

$$i_t = \frac{Q}{\sqrt{L C}} \cdot \sin \frac{2 \pi t}{T}$$

$$T = 2 \pi \sqrt{L \cdot C} \dots (i)$$

Rys. 304

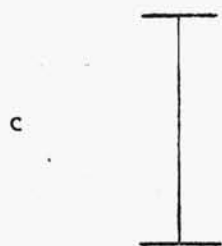
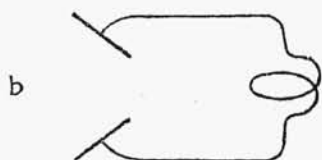
W tym przypadku mamy prąd zmienny sinusoidalnie o stałej amplitudzie, prąd ten będzie płynął wiecznie, tak jak sprężyna, raz odgięta wahałaby się wiecznie, gdyby nie było oporu powietrza i tarcia pomiędzy cząsteczkami.

Okres własny drgań elektrycznych jest tu mniejszy niż w obwodzie z oporem omowym. Drgania takie nazywamy swobodnymi.

5. Fale elektryczne w drutach. Obwód, w którym odbywają się wyładowania wahadłowe, przybrać może postać zupełnie inną, która jednak w istocie rzeczy jest tylko odmianą obwodu poprzedniego. Na rys. 305 (a) widzimy obwód taki sam, jaki rozważaliśmy w paragrafach poprzednich; obwód na rys. 305 (b) różni się od poprzedniego tylko tym, że

¹⁾ Rysunek przedstawia wierną kopję wykonanych przezemnie zdjęć fotograficznych.

okładki kondensatora są nieco rozsunięte, a liczba zwojów zwojnicy zmniejszona. Na rys. 305 (c) mamy obwód, który utworzył się przez



Rys. 305.

dalsze rozsuwanie okładek kondensatora i wyprostowanie drutu. Wreszcie na rys. 305 (d) widzimy dwa druty zaopatrzone w środku w kulki, pomiędzy którymi może przeskakiwać iskra i uzupełniać przerwany przewodnik; ten obwód otrzymamy z poprzedniego, zmniejszając odpowiednio wymiary płytek kondensatora.

Układ dwóch drutów, wskazany na rys. 305 (d) jest oscylatorem Hertza. Gdy kulki oscylatora połączymy z biegunami jakiegokolwiek prądu, wytwarzającego wysokie napięcie elektryczne, pomiędzy kulkami przeskoczy iskra i nastąpi wyładowanie; będzie ono wahadłowe i cały przebieg zjawiska odbędzie się w sposób podobny do wskazanego w paragrafie poprzednim.

Pojemność i indukcyjność drutów są małe, więc okres zmian prądu będzie bardzo mały; wynika to ze wzoru (i) na str. 321. W tych warunkach droga, przebyta w ciągu jednego okresu wzdłuż drutów, przez zmiany elektromagnetyczne w eterze otaczającym drut, jest tego samego rzędu co długość drutu. Napięcie i natężenie prądu elektrycznego nie są w danej chwili wzdłuż górnego lub dolnego drutu wszędzie jednakowe. Zjawisko zazwyczaj odbywa się w ten sposób, że w drutach tworzą się fale elektryczne stojące. Fala prądu ma strzałkę w tym miejscu, gdzie przeskakuje iskra (rys. 306), strzałki zaś fali napięcia, czyli ściślej, potencjału elektrycznego względem ziemi będą się znajdowały

na końcach drutów. Zanim się te fale stojące utworzą w obie strony od iskry, będziemy mieli fale bieżące.

Z teorii fal wiemy, że długość fali λ można wyrazić wzorem w zależności od szybkości ruchu odkształceń tworzących fale — v i długości okresu drgań wywołujących fale T , a mianowicie:

$$\lambda = v \cdot T.$$

Odształcenia elektromagnetyczne przenoszą się w eterze z prędkością $3 \cdot 10^{10} \frac{cm}{sek.}$, więc jeżeli np. $T = 10^{-8} sek.$, to:

$$\lambda = 3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-8} = 300 cm,$$

a przeto:

$$\frac{\lambda}{4} = 75 \text{ cm.}$$

Ćwierć fali odpowiada długości jednego drutu na rys. 306. Jeżeli więc ten drut będzie miał długość 75 cm, to w nim mogą powstać fale stojące, odpowiadające okresowi drgań 10^{-8} sekundy, t. j. stu miljonom drgań w ciągu jednej sekundy.

Rozważając bieg fali w drutach, trzeba mieć na względzie, że ruch fali elektrycznej wzdłuż drutu nie jest ruchem elektryczności w przewodniku, lecz ruchem odkształceń elektromagnetycznych w eterze otaczającym przewodnik. Przedewszystkiem więc wzdłuż przewodników biegają fale w eterze i następnie wywołują przesunięcia ładunków elektrycznych w tych przewodnikach.

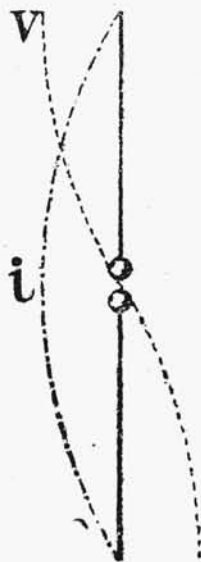
Fale tego rodzaju powstać mogą i w drutach całych, bez przerwy iskrowej, jeżeli w nich wywołamy prądy zmienne odpowiedniej częstotliwości w jakikolwiek sposób, więc naprz. przez indukcję elektromagnetyczną. Szczególnie technika prądów szybkozmiennych znalazła obecnie wiele sposobów wywoływania fal różnej długości w drutach całych przez wzbudzenie w nich ruchu elektryczności bez iskry.

Fale w drutach obwodów elektrycznych mamy zawsze, gdy są dość długie w porównaniu do długości fali. W praktyce są dwie dziedziny, gdzie powstawanie fal w grę wchodzi: technika prądów szybkozmiennych stosująca obwody niezbyt długie, a częstotliwości prądu wielkie, przez to fale krótkie (głównie radjotechnika) i technikę przewodów dalekonośnych, gdzie na setki kilometrów prowadzimy prąd normalnej częstotliwości; tu fale są długie, ale obwody również wielkie.

Powstawanie fal bieżących i stojących w takich obwodach ma znaczenie głównie ze względu na przetężenia (nadmierny prąd) i przepięcia (nadmierne napięcie) powstające w niektórych miejscach obwodu.

Szczególną rolę odgrywają zmiany raptowne we własnościach obwodu względem prądu a więc oporności, indukcyjności, pojemności i upływości (przewodnictwa izolacji przewodów). Zmiany te powodują odbicia fal i interferencje^{1) 2)}.

6. Fale elektromagnetyczne swobodne. Gdy mamy układ wskazany na rys. 305 (d), to, przy wyładowaniach pomiędzy kulkami, w prze-

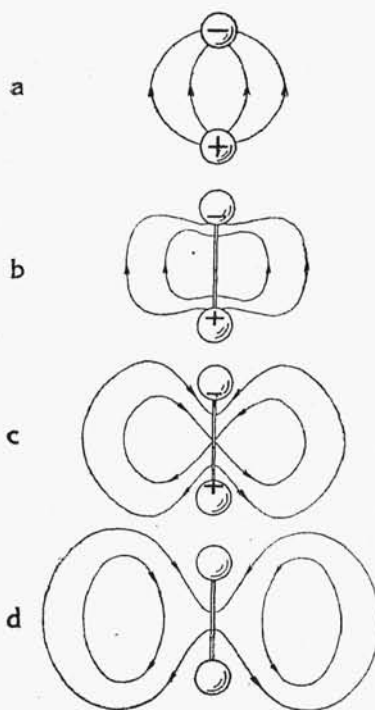


Rys. 306.

¹⁾ Niektóre szczegóły o falach powstających w drutach czytelnik znajdzie u Fraenckela „*Teorie der Wechselströme*“.

²⁾ Breitfeld „*Berechnung von Wechselstromfernleitungen*“.

strzeni otaczającej oscylator powstają zmienne pola: elektryczne i magnetyczne. Odształcenia elektryczne i magnetyczne w eterze przenoszą się w kierunku od drutów w przestrzeń z prędkością $3 \cdot 10^{10} \frac{cm}{sek.}$ i skut-

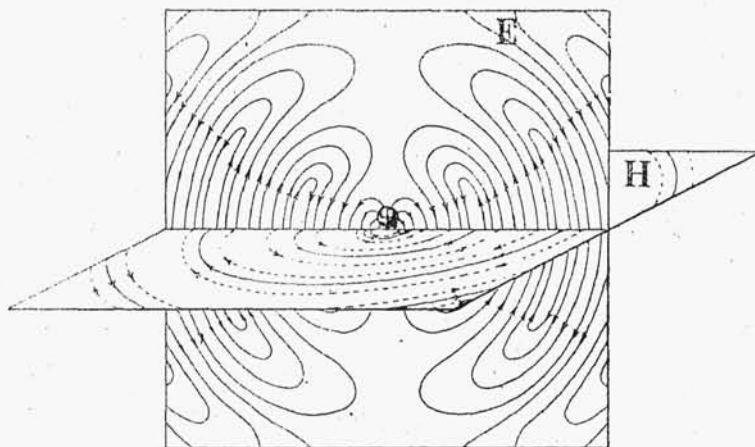


Rys. 307.

kiem zmienności prądu w drutach tworzą fale. Wzdłuż tych fal mamy zmienne co do kierunku i co do wielkości natężenia pola elektrycznego i magnetycznego. Długość fal zależy, jak to widać ze wzoru podanego w poprzednim paragrafie, od częstotliwości drgań prądu w drutach. Aby zdać sobie sprawę z zespołu tych pól: elektrycznego i magnetycznego, tworzących fale elektromagnetyczne, zwróćmy uwagę na kształt odpowiednich linii sił.

Jako przykład weźmiemy oscylator najprostszy: dwie kulki pomiędzy którymi przeskakuje iskra. Zanim iskra przeskoczy, układ linii pola elektrycznego jest taki, jak wskazano na rys. 307 (a). Gdy powstaje iskra — ruch elektryczności — linie stopniowo zmieniają kształt tak, jak to wskazano na rys. 307 (b), (c) i (d), następnie kulki naładowują się odwrotnie: dolna ujemnie, a górna dodatnio, skutkiem czego powstają linie sił kierunku odwrotnego i t. d. Przy ruchu elektryczności

wytwarzają się także i linie sił magnetycznych, które mają kształt kół; płaszczyzny tych kół są prostopadłe do osi iskry, a środki leżą na tej osi. Układ linii szeregu fal magnetycznych



Rys. 308.

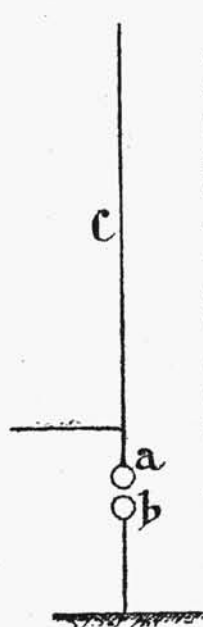
i elektrycznych wytworzonych przez ruch elektryczności pomiędzy kulkami w pobliżu oscylatora pokazany jest w dwóch prostopadłych do siebie płaszczyznach na rys. 308.

Fale te biegną we wszystkie strony. Zjawisko takie nazywamy promieniowaniem oscylatora. W falach tych przenosi się pewien zasób energii, mówimy więc, że oscylator wypromieniowuje energję. Na tem właśnie polega zasadnicza różnica pomiędzy obwodami rys. 305 (a) i 305 (d).

Gdy w obwodzie rys. 305 (a) przy drganiach elektrycznych energia przenosi się głównie z pola elektrycznego kondensatora do pola magnetycznego zwojnicy i z powrotem, oscylator rys. 305 (d), wywołuje wprawdzie także przemianę energii pola elektrycznego w energję pola magnetycznego i odwrotnie, ale przytem znaczną część energii wypromieniowuje w przestrzeń. Drgania elektryczne w obwodzie rys. 305 (a) trwają dość długo, gdy oporność omowa obwodu jest mała, drgania zaś elektryczne w oscylatorze rys. 305 (d) znikają prędko, o ile niema dopływu energii.

Gdy fale elektromagnetyczne, biegnące w przestrzeń napotykają, przewodnik, to wywołują w nim ruch elektryczności t. j. prąd elektryczny. Za pomocą tego prądu można wykryć obecność fal elektromagnetycznych.

Fale elektromagnetyczne znajdują zastosowanie w urządzeniach telegrafu bez drutu, czyli radjotelegrafu.



Rys. 309.

Stacja wysyłająca (według pierwszego pomysłu Marconiego), zaopatrzona jest w oscylator (rys. 309), składający się z dwóch kulek *a* i *b*, z których jedna *b* jest połączona z ziemią, a druga z wysokim drutem *ac* (anteną) i z jednym biegunem źródła prądu, którego drugi biegun jest połączony z ziemią. Gdy kulka *a* z drutem *ac* naładowuje się do odpowiedniego potencjału, następuje wyładowanie wahadłowe i z przewodnika *ac* wybiegają fale elektromagnetyczne, które jednak bardzo szybko znikają z powodu wyczerpania się energii. Pierwsza fala zawierać będzie energii najwięcej, więc w przybliżeniu można przyjąć, że cała energia, zawarta w naładowanym przewodniku *ac*, znajduje się w pierwszej fali.

Założmy, że przewodnik *ac* został naładowany do potencjału wynoszącego $3 \cdot 10^4$ V.; pojemność tego przewodnika jest 0,01 mikrofarada ¹⁾, czyli 10^{-8} faradów; na zasadzie wzoru, przytoczonego w rozdziale XXIV dla obliczenia energii kondensatora naładowanego, otrzymujemy:

$$A = \frac{V^2 \cdot C}{2} = \frac{(3 \cdot 10^4)^2 \cdot 10^{-8}}{2} = 4,5 \text{ dżulów,}$$

¹⁾ Jest to właściwie pojemność kondensatora, utworzonego z przewodnika *ac* i ziemi

co wynosi mniej więcej $0,46 \text{ kgm}$ lub też $4,5 \cdot 10^7$ ergów. Jeżeli przypuścimy, że ilość energii ciepła i światła, wydzielająca się przy tem zjawisku, jest znikomo mała, to cała energia ładunku przechodzi do fali elektromagnetycznej, wybiegającej z przewodnika.

Fala elektromagnetyczna od przewodnika ac rozchodzi się w postaci półkuli, której środek znajduje się u podstawy drutu ac ; długość fali wynosi w tym razie poczwórną wziętą długość drutu ac , czyli długość tego drutu stanowi czwartą część długości fali. Przyjmując długość drutu ac za 30 m , otrzymamy całkowitą długość fali:

$$30 \cdot 4 = 120 \text{ m}.$$

Kiedy odległość przodu fali do wysyłającego drutu będzie wynosiła 10 km , to objętość przestrzeni zajętej przez falę oblicza się w przybliżeniu według wzoru:

$$2\pi \cdot (10^6)^2 \cdot 12 \cdot 10^3 = 7,54 \cdot 10^{16} \text{ cm}^3.$$

Przeciętna ilość energii, przypadająca na 1 cm^3 objętości fali wynosi:¹⁾

$$\frac{4,5 \cdot 10^7}{7,54 \cdot 10^{16}} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ ergów}.$$

¹⁾ Nie uwzględniając strat energii po drodze w powietrzu i ziemi.