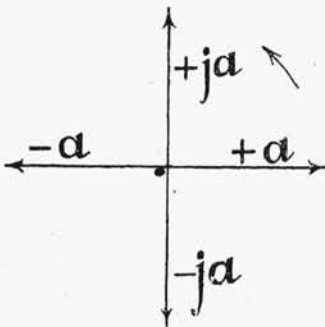


ROZDZIAŁ XVI.

Sposób symboliczny rozważania prądów zmiennych.

1. Wstęp. Znaczne uproszczenie wzorów matematycznych osiągamy przy rozważaniu prądów zmiennych, stosując symbolikę wprowadzoną przez Steinmetza.

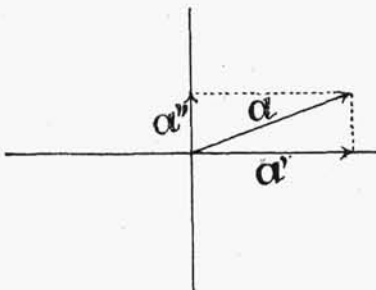


Rys. 145.

Założmy, że litera a wyraża pewien wektor rys. 145 skierowany np. w kierunku poziomym w prawo, ja oznacza wektor tej samej wielkości skierowany pionowo do góry, $-a$ wektor skierowany poziomo w lewo, $-ja$ wektor skierowany pionowo w dół.

Jeżeli przyjmiemy że $j = \sqrt{-1}$, to przy powyższych założeniach łatwo spostrzedz, że mnożenie każdego wektora przez j obraca go o 90° naprzód, to znaczy w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara. Na rys. 145 oś poziomą nazywać będziemy osią rzeczywistą, a pionową — osią urojoną.

W ten sposób wektory skierowane wzdłuż osi rzeczywistej oznaczymy



Rys. 146.

symbolicznie przez $+a$ lub $-a$ zależnie od zwrotu w prawą czy w lewą stronę, a wektory skierowane wzdłuż osi urojonej oznaczymy symbolicznie przez $+ja$ lub $-ja$ zależnie o zwrotu do góry lub na dół.

Wektor a jednak może mieć kierunek dowolny n. p. jak wskazano na rys. 146. Wtedy rozkładamy go na dwie składowe: w kierunku osi urojonej a'' i w kierunku osi rzeczywistej a' . Symboliczny wzór dla

wektora a stanowi liczba zespolona: $a' + ja''$.

Mając wyraz zespolony wektora znajdziemy jego wartość algebraiczną ze wzoru:

$$a = \sqrt{a'^2 + a''^2}$$

Nachylenie zaś wektora do osi rzeczywistej określi $\angle \varphi$, obliczony ze wzoru:

$$\tan \varphi = \frac{a''}{a'}$$

Jeżeli chcemy znaleźć wyraz symboliczny wektora, którego wartość algebraiczna (długość) jest m razy większa, to mnożymy liczbę zespoloną wyrażającą powyższy wektor przez m :

$$(a' + ja'') m = a' m + ja'' m.$$

Aby znaleźć wyraz symboliczny wektora, który ma tą samą wartość algebraiczną a , ale jest obrócony względem pierwszego wektora o kąt 90° w kierunku odwrotnym do kierunku ruchu wskazówek zegarka, mnożymy wyraz symboliczny pierwszego wektora przez $(+j)$:

$$(a' + ja'') j = ja' + j^2 a'' = -a'' + ja'.$$

$-a'' + ja'$ stanowi wyraz symboliczny obróconego wektora.

W podobny sposób znajdziemy wyraz symboliczny wektora obróconego o 90° w kierunku ruchu wskazówek zegarka mnożąc wyraz symboliczny pierwszego wektora przez $(-j)$:

$$(a' + ja'') (-j) = -ja' - j^2 a'' = a'' - ja'.$$

Wyraz zespolony $a'' - ja'$ stanowi symboliczny wzór obróconego wektora w nowym położeniu.

Nieraz jednak wypada obracać wektor o kąt dowolny Θ . Jeżeli chcemy obrócić wektor o kąt Θ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegarka, to wyraz symboliczny tego wektora w nowym położeniu znajdziemy, mnożąc wyraz symboliczny rozważanego wektora w pierwszym położeniu przez liczbę zespoloną:

$$\cos \Theta + j \sin \Theta.$$

Wtedy otrzymamy:

$$\begin{aligned} & (a' + ja'') \cdot (\cos \Theta + j \sin \Theta) = \\ & = a' \cos \Theta - a'' \sin \Theta + j (a'' \cos \Theta + a' \sin \Theta). \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że znaleziony tu wyraz symboliczny jest właśnie wyrazem takiego wektora.

W tym celu obliczymy jego wartość algebraiczną:

$$\sqrt{(a' \cos \Theta - a'' \sin \Theta)^2 + (a'' \cos \Theta + a' \sin \Theta)^2} = \sqrt{a'^2 + a''^2}$$

widzimy, że została ta sama.

Następnie obliczymy jeszcze kąt nachylenia tego nowego wektora względem osi rzeczywistej. Według poprzednio podanych wzorów tangens tego kąta znajdziemy z wyrażenia:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a'' \cos \Theta + a' \sin \Theta}{a' \cos \Theta - a'' \sin \Theta}.$$

Jeżeli kąt nachylenia pierwszego wektora względem osi rzeczywistej oznaczmy przez φ to:

$$a' = a \cos \varphi; \text{ i } a'' = a \sin \varphi.$$

Więc:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi \cdot \cos \Theta + \cos \varphi \cdot \sin \Theta}{\cos \varphi \cdot \cos \Theta - \sin \varphi \cdot \sin \Theta} = \frac{\sin (\varphi + \Theta)}{\cos (\varphi + \Theta)} = \operatorname{tg} (\varphi + \Theta),$$

przeto:

$$\psi = \varphi + \Theta.$$

W podobny sposób łatwo się przekonać, że mnożąc symboliczny wyraz pewnego wektora przez $\cos \Theta - j \sin \Theta$ znajdujemy wyraz symboliczny nowego wektora, który jest obrócony względem pierwszego o kąt Θ w kierunku ruchu wskazówek zegarka.

Z powyższego wynika, że przy mnożeniu jednej liczby zespolonej przez drugą liczbę zespoloną wektor liczby pierwszej obracamy o pewien kąt i powiększamy lub zmniejszamy pewną ilość razy. Naprzykład jeżeli pomnożymy liczbę zespoloną $a' + j a''$ przez $b' + j b''$, to wzór możemy przekształcić w sposób następujący:

$$\begin{aligned} (a' + j a'') \cdot (b' + j b'') &= (a' + j a'') (m \cos \varphi + j m \sin \varphi) = \\ &= (a' + j a'') \cdot m \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi). \end{aligned}$$

Łatwo przekonać się, że tu

$$m = \sqrt{b'^2 + b''^2} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b''}{b'}.$$

Mnożąc $a' + j a''$ przez $b' + j b''$, zwiększamy długość wektora liczby $a' + j a''$ razy m i obracamy go o kąt φ .

2. Dodawanie i odejmowanie wektorów. Mamy znaleźć rachunkiem symbolicznym geometryczną sumę lub różnicę wektorów. Dla uskutecznienia takich działań wyrażamy wszystkie wektory symbolicznie względem tych samych osi (urojonej i rzeczywistej) i na tych wzorach symbolicznych wykonywamy zwykłe działania algebraiczne.

Przykład: Znaleźć wektor wypadkowy \hat{A} z trzech wektorów \hat{a} , \hat{b} i \hat{c} , t. j. wykonać symbolicznie sumowanie geometryczne:

$$\hat{A} = \hat{a} + \hat{b} - \hat{c}.$$

Założmy że symboliczne wyrażenia wektorów składowych są następujące: $a' + j a''$; $b' + j b''$; $c' + j c''$, liczbę zespoloną, wyrażającą wektor wypadkowy, oznaczmy literą A^1 , wtedy:

$$A = a' + j a'' + b' + j b'' - (c' + j c'') = (a' + b' - c') + j (a'' + b'' - c'').$$

Wartość rzeczywista tego wektora będzie:

$$A = \sqrt{(a' + b' - c')^2 + (a'' + b'' - c'')^2}$$

Nachylenie wypadkowego wektora względem osi rzeczywistej wyraża się wzorem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a'' + b'' - c''}{a' + b' - c'}.$$

3. Wyrażenie symboliczne oporności pozornej obwodu. Z rozważań poprzednich wiemy, że wektor napięcia jest geometryczną sumą dwóch prostopadłych do siebie wektorów IR i IX rys. 147, tu IX wyprzedza w fazie IR o 90° o ile X jest liczbą dodatnią. Jeżeli przez I oznaczamy w skrócie liczbę zespoloną wyrażającą symbolicznie wektor prądu, to IR będzie wyrazem symbolicznym spadku napięcia rzeczywistego, a jIX wyrazem symbolicznym spadku napięcia urojonego.

Całe napięcie na końcach rozważanego obwodu jest sumą tych dwóch spadków. Napięcie to w rachunku symbolicznym wyrażać się będzie pewną liczbą zespoloną, którą krótko oznaczamy literą V wtedy:

$$V = IR + jIX$$

albo:

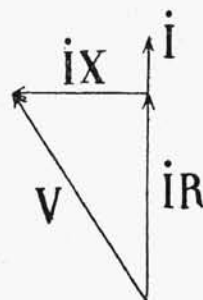
$$V = I(R + jX)$$

Stąd oporność pozorna:

$$Z = \frac{V}{I} = R + jX$$

Wypada więc, że liczba zespolona $R + jX$ wyraża symbolicznie oporność pozorną obwodu.

Gdy obwód zawierać będzie kilka oporów połączonych w szereg, to napięcia na poszczególnych oporach dodadzą się. Jeżeli przez Z_1 , Z_2 , Z_k i t. d. oznaczmy liczby zespolone, wyrażające poszczególne oporności pozorne,



Rys. 147.

¹⁾ Skrócone oznaczenia liczb zespolonych będziemy odróżniali innym drukiem.

a przez Z liczbę zespoloną, wyrażającą ogólną oporność pozorną całego układu, przez I prąd, przez $V_1 V_2 \dots V_k \dots$ i t. d. poszczególnych napięć, a przez V — wypadkowego napięcia, to:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_k + \text{i t. d.}$$

albo:

$$V = IZ_1 + IZ_2 + \dots + IZ_k + \dots \text{i t. d.}$$

Stąd:

$$Z = \frac{V}{I} = Z_1 + Z_2 \dots + Z_k + \dots \text{i t. d.}$$

Wzory na liczby zespolone dla poszczególnych oporów są następujące:

$$Z_1 = R_1 + jX_1; \quad Z_2 = R_2 + jX_2; \quad \text{i t. d.}$$

Więc:

$$Z = \Sigma R_k + j \Sigma X_k.$$

Stąd wzór algebraiczny na wypadkową oporność pozorną będzie:

$$Z = \sqrt{(\Sigma R_k)^2 + (\Sigma X_k)^2}$$

4. Wyraz symboliczny przewodności pozornej. W paragrafie 6-y rozdziału poprzedniego widzieliśmy, że prąd w każdym obwodzie może być wyrażony sumą geometryczną dwóch prądów składowych: jednego VG , który jest zgodny w fazie z napięciem i drugiego VB opóźniającego się w fazie względem napięcia o 90° przy B dodatniem.

Jeżeli przez V oznaczmy liczbę zespoloną wyrażającą symbolicznie wektor napięcia, to VG będzie wyrazem symbolicznym prądu wiatowego, a $-jVB$ wyrazem symbolicznym prądu bezwiatowego.

Cały prąd płynący w rozważanym obwodzie jest sumą tych dwóch prądów. Prąd ten w rachunku symbolicznym wyrażać się będzie pewną liczbą zespoloną, którą w skrócie oznaczmy przez I , wtedy symbolicznie:

$$I = VG - jVB,$$

albo:

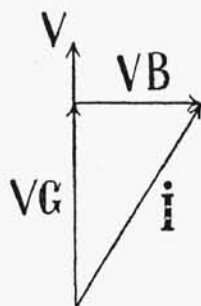
$$I = V(G - jB)$$

Stąd wyraz symboliczny na przewodność pozorną obwodu znajdziemy, wyznaczając iloraz symbolicznych wyrazów I i V :

$$Y = \frac{I}{V} = G - jB.$$

Liczba zespolona $G - jB$ wyraża symbolicznie przewodność pozorną obwodu.

Gdy mamy obwód z kilku równolegle połączonych oporów, to według pierwszego prawa Kirchhoffa prądy w poszczególnych oporach dodadzą się geometrycznie. Oznaczmy liczby zespolone, wyrażające symbo-



Rys. 148.

licznie te prądy, przez $I_1, I_2 \dots Y_k$ i t. d., prąd wypadkowy — przez Y , napięcie wspólne — przez Y . Liczby zespolone wyrażające przewodności poszczególnych gałęzi oznaczymy przez $Y_1, Y_2, \dots Y_k$, i t. d., oraz ogólną przewodność całego zespołu przez Y . Wtedy symbolicznie:

$$I = I_1 + I_2 + \dots I_k + \text{i t. d.}$$

albo:

$$I = V Y_1 + V Y_2 + \dots V Y_k + \dots \text{i t. d.}$$

Więc:

$$Y = \frac{I}{V} = Y_1 + Y_2 + \dots Y_k + \dots \text{i t. d.}$$

Wzory na liczby zespolone wyrażające przewodności pozorne poszczególnych oporów są następujące:

$$Y_1 = G_1 - j B_1, \quad Y_2 = G_2 - j B_2 \text{ i t. d.}$$

Podstawiając te wyrazy w powyższe równanie, otrzymamy wyraz symboliczny:

$$Y = \Sigma G_k - j \Sigma B_k$$

Stąd wzór algebraiczny dla ogólnej przewodności pozornej będzie:

$$Y = \sqrt{(\Sigma G_k)^2 + (\Sigma B_k)^2}$$

5. Wyznaczenie rzeczywistej i urojonej oporności zespołu dwóch równolegle połączonych oporów o przewodnościach: g_1, b_1 i g_2, b_2 . Oznaczmy liczbę zespoloną wyrażającą przewodność pozorną takiego układu przez Y , wtedy na podstawie poprzedniego paragrafu otrzymamy:

$$Y = g_1 + g_2 - j (b_1 + b_2) = G - j B.$$

Przez Z oznaczmy liczbę zespoloną wyrażającą ogólną oporność pozorną układu, przez V oznaczmy liczbę zespoloną wyrażającą napięcie, a przez I liczbę zespoloną wyrażającą prąd przed rozgałęzieniem, wtedy:

$$V = I \cdot Z, \quad \text{a} \quad I = V \cdot Y$$

więc:

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G - j B},$$

ale:

$$\frac{1}{G - j B} = \frac{G + j B}{(G - j B)(G + j B)} = \frac{G + j B}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{B}{G^2 + B^2}.$$

Przeto:

$$Z = R + j X = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{B}{G^2 + B^2},$$

więc:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}; \quad \text{a} \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}.$$

6. Wyznaczenie rzeczywistej i urojonej oporności zespołu dwóch równolegle połączonych oporów o opornościach r_1, x_1, r_2, x_2 . Przez Z_1 i Z_2 oznaczymy liczby zespolone wyrażające oporności pozorne poszczególnych gałęzi wtedy:

$$Z_1 = r_1 + j x_1 \text{ i } Z_2 = r_2 + j x_2.$$

Według wywodów poprzedniego paragrafu przewodność pozorna wyrażona symbolicznie liczbą zespoloną dla poszczególnych gałęzi będzie:

$$\frac{1}{Z_1} \text{ i } \frac{1}{Z_2}.$$

Jeżeli liczbę zespoloną, wyrażającą ogólną przewodność zespołu, oznaczmy przez Y , to według §. 4.

$$Y = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}.$$

A ogólna oporność Z również wyrażona pewną liczbą zespoloną wypadnie symbolicznie:

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Podstawiając liczby zespolone, które wyrażają litery Z_1 i Z_2 , otrzymamy:

$$Z = \frac{(r_1 + j x_1)(r_2 + j x_2)}{r_1 + r_2 + j(x_1 + x_2)}.$$

Pomnóżmy licznik i mianownik przez $r_1 + r_2 - j(x_1 + x_2)$, wtedy:

$$Z = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2) + x_1^2 r_2 + x_2^2 r_1 + j [x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_1 r_2^2 + x_2 r_1^2]}{(r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2}$$

Wyróżniając część rzeczywistą liczby zespolonej i część urojoną oddzielnie znajdziemy ogólną zastępczą oporność rzeczywistą i ogólną zastępczą oporność urojoną w postaci następujących wzorów algebraicznych

$$R = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2) + x_1^2 r_2 + x_2^2 r_1}{(r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2}.$$

$$X = \frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_1 r_2^2 + x_2 r_1^2}{(r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2}$$

7. Określić warunki przy których prąd w gałęzi drugiej rys. 144 jest przesunięty w fazie o 90° względem napięcia V_{ac} . Oznaczmy liczby zespolone wyrażające poszczególne opory pozorne przez Z_1, Z_2 i Z_3 .

Liczby zespolone wyrażające symbolicznie poszczególne prądy oznaczmy przez I_1 — prąd przed rozgałęzieniem I_2 — oraz I_3 prądy za rozgałęzieniem.

Wtedy symbolicznie:

$$I_1 = I_2 + I_3; \quad I_3 Z_3 = I_2 Z_2.$$

Z tych dwóch równań wypływa:

$$I_2 = I_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Jeżeli przez Z oznaczmy liczbę zespoloną, wyrażającą oporność pozorną całego układu wszystkich trzech oporów, a przez V_{ac} oznaczmy liczbę zespoloną wyrażającą symbolicznie napięcie na końcówkach a, c , to:

$$I_1 = \frac{V_{ac}}{Z}.$$

więc:

$$I_2 = \frac{V_{ac}}{Z} \cdot \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Stąd:

$$V_{ac} = I_2 \cdot \frac{Z \cdot (Z_2 + Z_3)}{Z_3}.$$

Oporność pozorną Z wyraża się symbolicznie, jak to łatwo spostrzedz na podstawie wywodów § 3 i 6, wzorem:

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Przeto:

$$V_{ac} = I_2 \cdot \frac{Z_1 (Z_2 + Z_3) Z_3 + Z_3^2}{Z_3}.$$

Założmy, że oporność urojona w gałęzi oznaczonej znaczkiem „3” równa się zero, wtedy zespolone wzory na poszczególne oporności będą następujące:

$$Z_1 = r_1 + j x_1; \quad Z_2 = r_2 + j x_2; \quad Z_3 = r_3 + j \cdot 0 = r_3.$$

Podstawiając te wyrazy do równania na V_{ac} i grupując wyrazy rzeczywiste i urojone, otrzymamy:

$$V_{ac} = I_2 \cdot \frac{r_1 (r_2 + r_3) + r_2 r_3 - x_1 x_2 + j [(r_2 + r_3) x_1 + r_1 x_2 + r_3 x_2]}{r_3}.$$

Jeżeli różnica faz pomiędzy V_{ac} i I_2 ma wynosić 90° to wektor \hat{V}_{ac} ma być obrócony względem wektora \hat{I}_2 o 90° , symbolicznie to znaczy, że liczbę zespoloną wyrażającą wektor \hat{V}_{ac} otrzymamy z liczby zespolonej wyrażającej wektor \hat{I}_2 mnożąc ją przez pewną liczbę urojoną np. $j M$, więc

cała część rzeczywista liczby zespolonej przez którą mnożymy I_2 w powyższym równaniu, powinna równać się zeru. Wobec tego warunkiem prostopadłości wektorów \vec{V}_{ac} i I_2 jest równanie:

$$\frac{r_1 (r_2 + r_3) + r_2 r_3 - x_1 x_2}{r_3} = 0$$

stąd:

$$r_1 (r_2 + r_3) + r_2 r_3 - x_1 x_2 = 0$$

a więc:

$$r_3 = \frac{x_1 x_2 - r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

8. Wykreślne wyznaczanie oporności zastępczych. W poprzednich rozważaniach widzieliśmy, że oporności pozorne wyrażają się liczbami zespolonymi. Każda zaś liczba zespolona według określenia podanego na początku niniejszego rozdziału wyraża pewien wektor. Więc wszystkie równania symboliczne, gdzie mamy szereg działań nad liczbami zespolonymi mogą być rozwiązywane zapomocą konstrukcji wektorowej.

A) Wyznaczenie zastępczej oporności pozornej przy połączeniu szeregowym.

Według poprzednich rozważań pozorna oporność zastępcza Z kilku oporności pozornych Z_1, Z_2 ; i t. d. połączonych w szereg, symbolicznie wyraża się wzorem:

$$Z = \Sigma R + j \Sigma X$$

Wartość takiej oporności łatwo znaleźć wykreślając trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne będą ΣR i ΣX . Przeciwprostokątna takiego trójkąta będzie wartością pozornej oporności Z .

Można postępować i inaczej: wykreślić wektory wyrażające poszczególne oporności pozorne, opierając się na wzorach symbolicznych:

$$Z_1 = R_1 + j X_1 \text{ i t. d.,}$$

a następnie wszystkie te wektory geometrycznie dodać.

B) Wyznaczenie zastępczej oporności pozornej dwóch równolegle połączonych oporów.

Z poprzednich wywodów wiemy, że pozorna oporność zastępcza Z dla dwóch równolegle połączonych oporności pozornych Z_1 i Z_2 wyraża się wzorem symbolicznym:

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Z tego wzoru wypada, że:

$$\frac{Z}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = A.$$

tu A jest liczbą zespoloną wyrażającą stosunek liczb zespolonych Z do Z_2 lub, Z do $Z_1 + Z_2$.

Z powyższego równania wynika, że:

$$\begin{aligned} Z_1 &= (Z_1 + Z_2) \cdot A \\ Z &= Z_2 \cdot A \end{aligned}$$

Mnożenie przez liczbę zespoloną wyraża powiększenie wektora mnożnej pewną ilość razy i obrócenie jego o pewien kąt, otóż równania powyższe wskazują, że wektor przedstawiony przez liczbę zespoloną Z tak się tworzy z wektora przedstawionego liczbą zespoloną Z_2 jak wektor przedstawiony liczbą zespoloną Z_1 powstaje z wektora przedstawionego liczbą zespoloną $Z_1 + Z_2$.

Stąd wypływa następujący sposób wykreślonego wyznaczenia zastępczej pozornej oporności Z :

Przez dodawanie wektorów znajdujemy wektor wyrażający sumę $Z_1 + Z_2$, wiedząc, że:

$$Z_1 + Z_2 = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2).$$

Wektor zaś dla Z znajdujemy jako niewiadomy wyraz w proporcji:

$$\frac{Z}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

pamiętając o tem że kierunek wektora dla Z ma być odchylony o taki sam kąt i w tą samą stronę od wektora dla Z_2 jak wektor dla Z_1 jest odchylony od wektora dla $Z_1 + Z_2$.

Odpowiednia konstrukcja jest podana na rys. 148a.

Według trójkąta $O B A$ budujemy trójkąt podobny $A B C$, wykreślając $\angle A B C = \angle O B A$, a $\angle B A C = \angle B O A$. Bok $A C$ wyraża szukany wektor dla Z rzuty tego wektora na oś rzeczywistą (poziomą) i na oś urojoną (pionową) wyrażają składowe rzeczywistą i urojoną zastępczej oporności pozornego rozważanego układu.

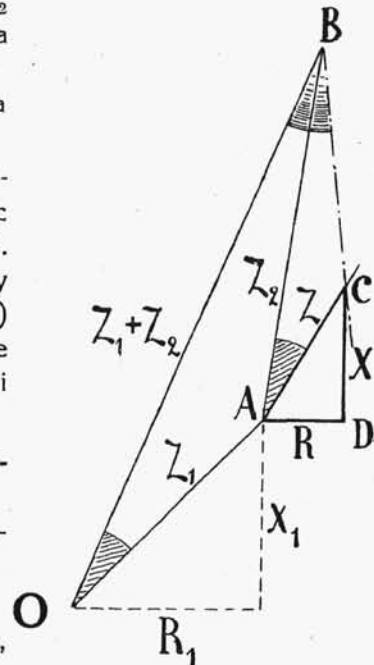
9. Wzory symboliczne przekształcone według twierdzenia Euler'a.

Pewien wektor wyraża się symbolicznie liczbą zespoloną:

$$a = m + j n.$$

Załóżmy, że $m = p \cos \varphi$, a $n = p \sin \varphi$, wtedy:

$$a = p (\cos \varphi + j \sin \varphi).$$



Rys. 148a

Według Euler'a:

$$\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j \varphi}$$

$$\cos \varphi - j \sin \varphi = e^{-j \varphi}$$

gdzie e — podstawa naturalnych logarytmów. Wobec tego:

$$a = p e^{j \varphi}$$

Jest to inny sposób symbolicznego wyrażenia wektorów. Wzór $p e^{j \varphi}$ wyraża wektor, którego wartość algebraiczna wynosi:

$$p = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

a

$$\tan \varphi = \frac{n}{m}$$

określa kąt φ , o który wektor ten jest obrócony względem osi rzeczywistej w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegarka.

10. Wyrażenie zależności napięcia od prądu za pomocą wzorów symbolicznych z użyciem potęgami.

Powyżej podany odmienny sposób wyrażania liczb zespolonych możemy zastosować także do wzorów symbolicznych oporności i przewodności.

Gdy mamy symboliczny wyraz oporności:

$$Z = R + j X,$$

to według poprzedniego paragrafu:

$$Z = Z \cdot e^{j \varphi},$$

gdzie:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \text{ a } \tan \varphi = \frac{X}{R}.$$

Przy zastosowaniu takiej symbolistyki, napięcie na końcówkach obwodu o pozornej oporności, Z wyrażone symbolicznie wypadnie:

$$V = I \cdot Z \cdot e^{j \varphi}.$$

Symboliczny wyraz przewodności pozornej:

$$Y = G - j B,$$

może być zastąpiony według nowej symbolistyki wzorem:

$$Y = Y \cdot e^{-j \varphi}$$

gdzie:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \text{ a } \tan \varphi = \frac{B}{G}.$$

Prąd w takim obwodzie przedstawimy wzorem symbolicznym:

$$I = V \cdot Y \cdot e^{-j\varphi}$$

W obu wyrazach przechodząc od I do V czy od V do I stwierdzamy, że prąd I opóźnia się w fazie o $\angle \varphi$ względem V o ile V lub X jest dodatnie ¹⁾, gdyż mnożenie przez $e^{j\varphi}$ jest równoznaczne z mnożeniem przez liczbę zespoloną $\cos \varphi + j \sin \varphi$, a więc według wywodów § 1. niniejszego rozdziału obraca wektor, stanowiący mnożną, o $\angle \varphi$ w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegarka.

Mnożenie zaś przez $e^{-j\varphi}$ obraca wektor, stanowiący mnożną, o $\angle \varphi$ w kierunku ruchu wskazówek zegarka jak łatwo stwierdzić, uwzględniając, że $e^{-j\varphi} = \cos \varphi - j \sin \varphi$.

1) Przeważa wpływ indukcyjności.