

ROZDZIAŁ XVII.

Prądy niesinusoidalne.

1. Szereg Fourier'a. Każdą wielkość okresowo zmienną można, według Fourier'a, wyrazić za pomocą sumy szeregu sinusoid o stopniowo malejącym okresie.

$$Y_t = \sum_{k=0}^{k=\infty} Y_k \cdot \sin(k \omega t + \varphi_k) \dots \dots \dots (1)$$

tu $\omega = \frac{2\pi}{T}$, gdzie T — okres zmian wielkości Y , φ_k — kąt określający fazę w chwili $t=0$, k — przybiera wartość szeregu liczb całkowitych 0, 1, 2, 3 i t. d. do nieskończoności.

Powyższy wzór można napisać inaczej:

$$Y_t = Y_0 \cdot \sin \varphi_0 + Y_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + Y_2 \cdot \sin(2 \omega t + \varphi_2) + Y_3 \cdot \sin(3 \omega t + \varphi_3) + \dots$$

Składnik $Y_0 \sin \varphi_0$ — stanowi tu wielkość stałą niezależną od czasu, $Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ — wyraża sinusoidę główną, której okres równa się okresowi zmienności wielkości rozważanej Y_t , następnie $Y_2 \sin(2 \omega t + \varphi_2)$ wyraża sinusoidę o okresie dwa razy krótszym, $Y_3 \sin(3 \omega t + \varphi_3)$ — sinusoidę o okresie trzy razy krótszym i t. d. Są to tak zwane wyższe harmoniczne druga, trzecia i t. d.

Wzór (1) może być napisany jeszcze w innej postaci jeżeli każdą sinusoidę rozłożymy na sinusoidę i kosinusoidę:

$\overline{Y_k} \cdot \sin(k \omega t + \varphi_k) = \overline{Y_k} \cos \varphi_k \cdot \sin k \omega t + \overline{Y_k} \sin \varphi_k \cdot \cos k \omega t$,
albo zakładając:

$$\overline{Y_k} \cdot \cos \varphi_k = \overline{a_k} \quad \text{i} \quad \overline{Y_k} \cdot \sin \varphi_k = \overline{b_k}$$

wypadnie:

$$Y_t = \sum \overline{a_k} \cdot \sin k \omega t + \sum \overline{b_k} \cdot \cos k \omega t.$$

przy $k=0$, $Y_0 = b_0$, więc:

$$Y_t = \overline{b_0} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \overline{a_k} \sin k \omega t + \sum_{k=1}^{k=\infty} \overline{b_k} \cdot \cos k \omega t.$$

Ten wzór wskazuje, że każda wielkość okresowo zmienna może być wyrażona sumą: stałego składnika \bar{b}_0 — wyrażającego średnią wartość za jeden okres, oraz szeregu sinusoid, których rzędne przy $t=0$ stanowią zero i szeregu kosinusoid, których rzędne przy $t=0$ osiągają maximum.

2. Wyznaczenie amplitud. Amplitudy $\bar{b}_0, \bar{a}_k, \bar{b}_k$ mogą być wyznaczone na podstawie wykresu funkcji Y . Ponieważ \bar{b}_0 jest składnikiem stałym więc:

$$\bar{b}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T Y_t dt.$$

Dla wyznaczenia jednej z amplitud \bar{a}_k np. \bar{a}_p pomnożymy Y_t przez $\sin p \omega t$ i obliczymy średnią wartość tego iloczynu za okres T . Wtedy otrzymamy szereg, który można napisać jak następuje:

$$\frac{1}{T} \int_0^T Y_t \cdot \sin p \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{b}_0 \cdot \sin p \omega t dt + \sum \frac{1}{T} \int_0^T \bar{a}_k \cdot \sin k \omega t \cdot \sin p \omega t dt +$$

$$\sum \frac{1}{T} \int_0^T \bar{b}_k \cos k \omega t \sin p \omega t dt.$$

Uwzględniając, że:

$$\sin k \omega t \cdot \sin p \omega t = -\frac{1}{2} [\cos (k \omega t + p \omega t) - \cos (k \omega t - p \omega t)],$$

$$\cos k \omega t \cdot \sin p \omega t = \frac{1}{2} [\sin (k \omega t + p \omega t) - \sin (k \omega t - p \omega t)],$$

otrzymamy:

$$\frac{1}{T} \int_0^T Y \sin p \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{b}_0 \sin p \omega t dt - \sum \frac{1}{2T} \int_0^T \bar{a}_k \cdot \cos (k+p) \omega t dt +$$

$$+ \sum \frac{1}{2T} \int_0^T \bar{a}_k \cos (k-p) \omega t dt + \sum \frac{1}{2T} \int_0^T \bar{b}_k \cdot \sin (k+p) \omega t dt$$

$$- \sum \frac{1}{2T} \int_0^T \bar{b}_k \cdot \sin (k-p) \omega t dt.$$

Wszystkie składniki powyższego szeregu równe są zeru jako średnie wartości rzędnych sinusoid i kosinusoid za cały okres, za wyjątkiem:

$$\frac{1}{2T} \int_0^T \bar{a}_p \cdot \cos(p - p) \omega t dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \bar{a}_p \cdot dt = \frac{\bar{a}_p}{2}.$$

Wypada więc że:

$$\frac{1}{T} \int_0^T Y_t \cdot \sin p \omega t \cdot dt = \frac{\bar{a}_p}{2}.$$

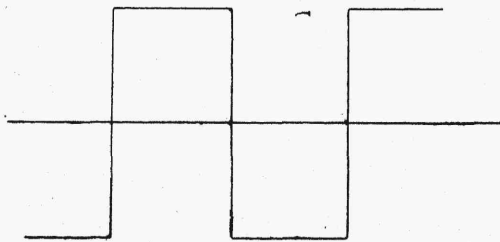
a przeto:

$$\bar{a}_p = \frac{2}{T} \int_0^T Y_t \sin p \omega t \cdot dt.$$

Chcąc wyznaczyć jakąkolwiek amplitudę \bar{b}_p wypadnie pomnożyć Y_t przez $\cos p \omega t \cdot dt$. Rozumując w podobny sposób jak poprzednio otrzymamy:

$$\bar{b}_p = \frac{2}{T} \int_0^T Y_t \cdot \cos p \omega t \cdot dt.$$

Przykład. Zmienność wielkości y wyraża się za pomocą szeregu prostokątów rys. 149 więc dla jednej połowy okresu rzędna jest stała i wynosi $+\bar{y}$, a dla drugiej również stała i wynosi $-\bar{y}$.



Rys. 149

Wykres jest symetryczny względem osi czasu, więc stałego składnika nie ma, $b_0 = 0$.

Amplitudy składowych sinusoid znajdujemy ze wzoru:

$$\bar{a}_p = \frac{2}{T} \int_0^T y_t \sin p \omega t \cdot dt =$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \bar{y} \sin p \omega t \cdot dt - \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \bar{y} \sin p \omega t \cdot dt &= \frac{2}{T} \left\{ \left(-\frac{\bar{y}}{p\omega} \cdot \cos p \omega t \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{\bar{y}}{p\omega} \cdot \cos p \omega t \right) \right\}_0^{T/2} = \frac{2}{T} \frac{\bar{y}}{p\omega} (2 - 2 \cos p \pi). \end{aligned}$$

Uwzględniając, że $\omega = \frac{2\pi}{T}$ otrzymamy: $a_p = \frac{2\bar{y}}{p \cdot \pi} (1 - \cos p\pi)$.

Dla $p = 1, 2, 3$ i t. d:

$$\bar{a}_1 = \frac{4\bar{y}}{\pi}; \quad \bar{a}_2 = 0; \quad \bar{a}_3 = \frac{4\bar{y}}{3\pi}; \quad \bar{a}_4 = 0 \text{ i t. d.}$$

Amplitudy kosinusoid znajdziemy ze wzoru:

$$\begin{aligned} \bar{b}_p &= \frac{2}{T} \left\{ \int_0^{T/2} \bar{y} \cos p\omega t dt - \int_0^{T/2} \bar{y} \cdot \cos p\omega t dt \right\} = \\ &= \frac{2}{T} \left\{ \left[\frac{\bar{y}}{p\omega} \sin p\omega t \right]_0^{T/2} - \frac{\bar{y}}{p\omega} \left[\sin p\omega t \right]_0^{T/2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Z powyższych wywodów wynika, że w szeregu składników, których suma wyraża funkcję y_t pozostaną tylko sinusoidy nieparzystego rzędu, a więc:

$$y_t = \frac{4\bar{y}}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right).$$

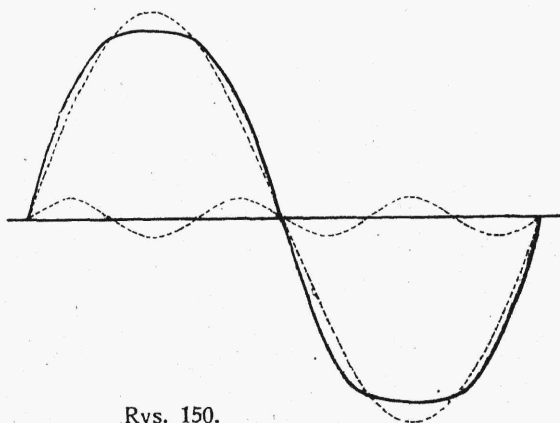
Jeżeli linia krzywa określająca funkcję Y_t nie daje się wyrazić prostym wzorem matematycznym, wtedy dla wyznaczenia amplitud składowych sinusoid stosują się różne inne sposoby oparte na własnościach funkcji sinusoidalnych¹⁾.

3. Najważniejsze kształty linii falowych. Często spotykamy fale z trzecią harmoniczną, którą odejmuje się lub dodaje się do fali głównej.

Przy dodawaniu:

$$y_t = y_1 \sin \omega t + y_3 \sin 3\omega t$$

sinusoida spłaszcza się rys. 150 maksimum pozostaje w środku półokresu, ale jest mniejszy. Gdy jednak amplituda trzeciej harmonicznej jest większa od $\frac{1}{2}$ amplitudy głównej, to tworzy się siodło rys. 151., mamy wtedy dwie równe rzędne maksymalne symetryczne względem środka półfali.



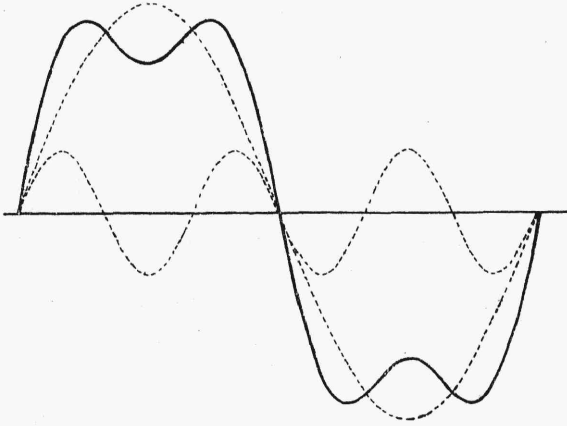
Rys. 150.

¹⁾ Patrz. Dr. Ernst Oerlich. Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven Verl. Fr. Vieweg & Sohn.

Przy odejmowaniu zaś trzeciej harmonicznej:

$$y_t = y_1 \sin \omega t - \bar{y}_3 \sin 3 \omega t,$$

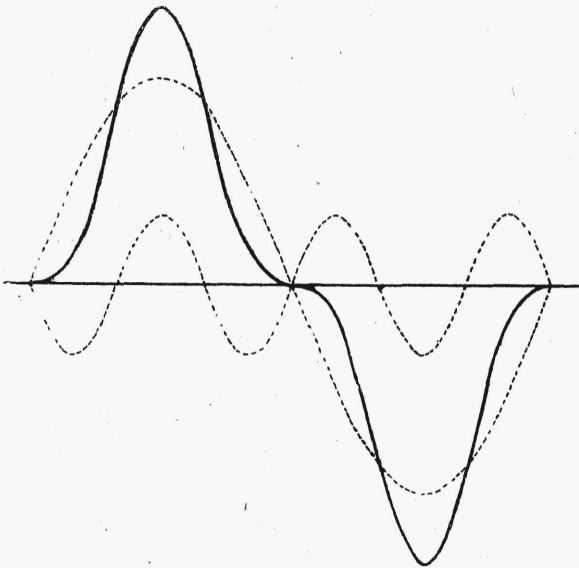
sinusoida zaostrza się rys. 152 maksimum mamy w środku, ale większym.



Rys. 151.

tylko dokładna analiza wykresu.

Przy dodawaniu czy odejmowaniu od głównej sinusoidy parzystych harmonicznych np. rys. 154.



Rys. 152.

siły elektromotorycznej z nieparzystymi wyższymi harmonicznymi sinusoidami (rys. 150).

Nieraz do głównej sinusoidy dodaje się nieparzyste wyższe harmoniczne o znacznej częstości np. 5, 7, 9 i t. d. Na rys. 153, mamy linję falową, której rzędne stanowią sumę rzędnych głównej sinusoidy i jedenaściej harmonicznej. Z rysunku widzimy, że obecność takich wyższych harmonicznych można spostrzec licząc ząbki.

Kilka wyższych harmonicznych może wykryć

$$y_t = y_1 \sin \omega t + y_2 \sin 2 \omega t$$

fale otrzymuje się niesymetryczne względem środka półfali, maksimum przesuwa się w jedną lub drugą stronę.

Dodawanie lub odejmowanie fal kosinusoidalnych nieparzystych np. rysunek 155.

$$y_t = y_1 \sin \omega t + y_3 \cos 3 \omega t$$

nie tylko przesuwa maksimum, ale i punkty zerowe fali wypadkowej.

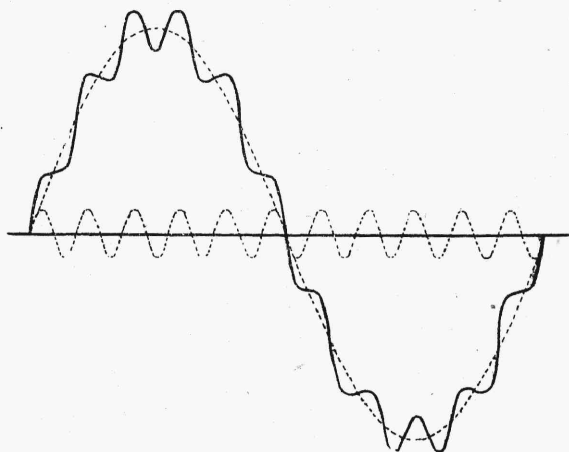
Prądnicę prądu zmiennego dają zazwyczaj fale

4. Wartość maksymalna, skuteczna i średnia. Wartość maksymalną rzędnej fali wyrażonej za pomocą wzoru matematycznego można znaleźć przez różniczkowanie, a jeżeli mamy wykres fali — to wprost przez pomiar.

Wartość skutecz. obliczymy na zasadzie następującego rozumowania: według określenia §5. rozdz. I. dla wartości skutecznej y mamy wzór następujący:

$$y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2 dt}$$

Według ogólnego wzoru okresowo-zmiennej wielkości:



Rys. 153.

$$y_t = \bar{b}_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \bar{a}_k \sin k \omega t + \sum_{k=1}^{k=\infty} \bar{b}_k \cos k \omega t.$$

W praktyce najczęściej mamy takie funkcje, w których $b_0 = 0$, wtedy

$$y_t = \sum_{k=1}^{k=\infty} \bar{a}_k \sin k \omega t + \sum_{k=1}^{k=\infty} \bar{b}_k \cos k \omega t.$$

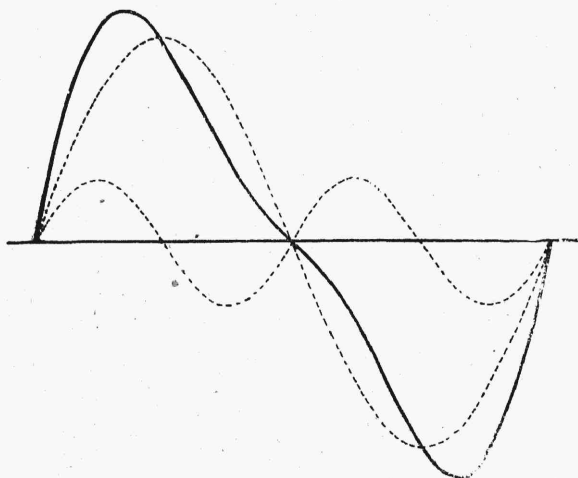
Podnosząc powyższą sumę do kwadratu będziemy mieli składniki kilku rodzajai. A więc $\bar{a}_k^2 \sin^2 k \omega t$,

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{a}_k^2 \sin^2 k \omega t dt = \frac{\bar{a}_k^2}{2};$$

następnie; $\bar{b}_k^2 \cos^2 k \omega t$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{b}_k^2 \cos^2 k \omega t dt = \frac{\bar{b}_k^2}{2};$$

dalej: $\bar{a}_k \bar{b}_k \sin k \omega t \cos k \omega t$.



Rys. 154

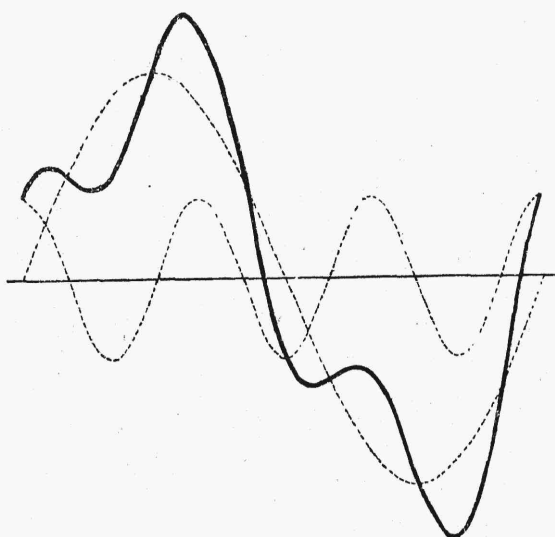
$$\int_0^T \bar{a}_k \bar{b}_k \sin k\omega t \cdot \cos kl dt = 0,$$

i wreszcie: $\bar{a}_p \bar{b}_q \sin p\omega t \cdot \cos q\omega t$.

$$\int_0^T \bar{a}_p \bar{b}_q \sin p\omega t \cdot \cos q\omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \bar{a}_p \bar{b}_q [\sin(p\omega t + q\omega t) - \sin(p\omega t - q\omega t)] dt = 0.$$

Więc:

$$y = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_k^2}{2}}.$$



Rys. 155

Jeżeli przez a_k i b_k oznaczmy wartości skuteczne rzędnych odpowiednich sinusoid, to

$$a_k^2 = \frac{\bar{a}_k^2}{2} \text{ i } b_k^2 = \frac{\bar{b}_k^2}{2}$$

więc:

$$y = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2}.$$

Gdy y zawiera dużo składników to często dokładniej jest obliczać wartość skuteczną rzędnej y wykreślnie jak to podano w § 5 rozdział I.—

Wartość średnią znajdu-

jemy zazwyczaj dla połowy okresu danej fali.

Wyznaczenia takiej średniej uskutecznia się wykreślnie, według wzoru:

$$y_{sr} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} y_t dt$$

5. Spółczynnik kształtu i ostrość fali. O kształcie fal daje pewne wyobrażenie tak zwany spółczynnik kształtu: stosunek wartości skutecznej do wartości średniej:

$$k = \frac{y}{y_{sr}}.$$

Ma on zastosowanie w tych przypadkach, gdy, znając wielkość średnią, wypada obliczyć skuteczną.

Są jednak właściwości wielkości zmiennych, które lepiej określa współczynnik inny, tak zwany współczynnik ostrości, albo krótko ostrość fali. Jest to stosunek wartości maksymalnej do skutecznej.

$$f = \frac{\bar{y}}{y}.$$

Ostrość fali napięcia, obok wartości skutecznej cechuje zdolność prądu do przebicia izolacji, gdyż najwyższe chwilowe napięcie elektryczne przebija izolator.

Ostrość fali napięcia można wyznaczyć przez pomiar wartości maksymalnej napięcia np. na wykresie otrzymanym za pomocą oscylografu i pomiar wartości skutecznej woltomierzem.

6. Prąd niesinusoidalny w różnych obwodach. Na uwagę zasługuje porównanie fal prądu i napięcia przy różnych własnościach obwodów.

Gdy obwód ma tylko opór omowy, to dla dowolnej składowej sinusoidy możemy napisać wzór prawa Ohma w postaci:

$$I_k = \frac{V_k}{R}.$$

Współczynnik proporcjonalności $\frac{1}{R}$ nie zależy od częstotliwości, a więc dla wszystkich składowych sinusoid jest stały.

W tych warunkach kształty fal prądu i napięcia są jednakowe.

Inaczej sprawa się przedstawia w obwodzie ze znaczną samoindukcją.

Założmy że indukcyjność jest tak wielka, że możemy pominąć oporność omową, wtedy:

$$I_k = \frac{V_k}{k \omega L}.$$

Z tego wzoru widzimy, że stosunek pomiędzy amplitudami prądu i napięcia nie jest stały. Im częstotliwość fali jest większa, tym mniejszy jest odpowiedni współczynnik $\frac{1}{k \omega L}$.

Skutkiem tego wyższe harmoniczne fali są znacznie mniej uwydatnione w fali prądu niż w fali napięcia.

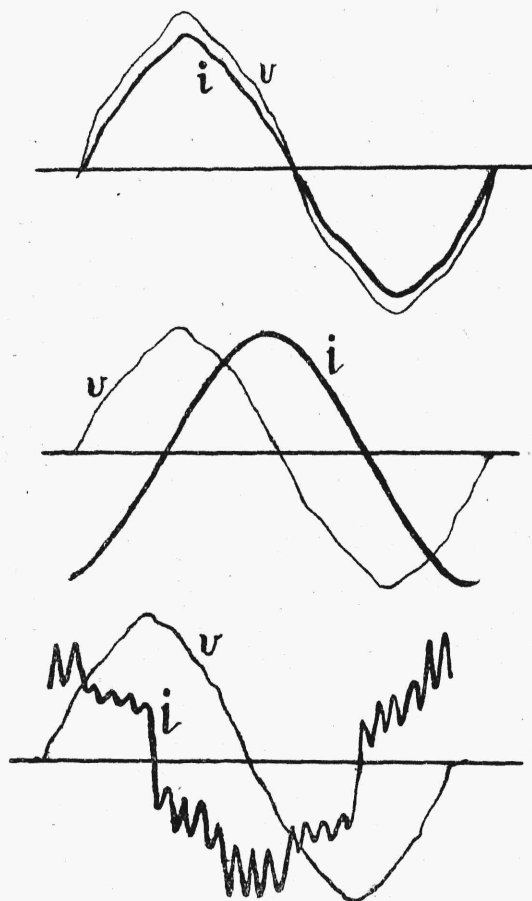
Kształt fali prądu przebiegającego przez znaczną samoindukcję jest zawsze bardzo bliski do sinusoidy.

Gdy rozważymy prąd w kondensatorze, to wypadnie:

$$I_k = k \omega C \cdot V_k.$$

Tu współczynnik proporcjonalności — $k \omega C$ wzrasta w miarę zwiększania się częstotliwości.

Skutkiem tego wyższe harmoniczne są tu znacznie więcej uwidacznione w fali prądu, niż w fali napięcia.



Rys. 156., 157 i 158.

Napięcie prawie sinusoidalne mające słabe wyższe harmoniczne wytwarza w kondensatorze prąd o fali mocno ząbkowanej.

Na rys. 156, widzimy fale prądu i napięcia w obwodzie z oporem omowym na rys. 157. w obwodzie ze znaczną samoindukcją, a na rys. 158. fale prądu i napięcia w kondensatorze¹⁾.

¹⁾ Benischke. Grundl. der Elektort., str. 462.