

ROZDZIAŁ XV.

Prawa Kirchhoffa dla prądów zmiennych.

W rozdziale XII były podane wzory ogólne praw Kirchhoffa, dotyczące wszelkich prądów, mających stałą wartość na całej długości nierozgałęzionych przewodników.

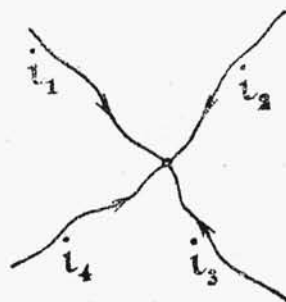
Wzory rzeczone stosują się do wartości chwilowych prądów i sił elektromotorycznych, zmiennych w czasie, w praktyce jednak mamy zwykle do czynienia z wartościami skutecznymi. Należy więc dla prądów zmiennych wyrazić prawa Kirchhoffa z uwzględnieniem wartości skuteczych prądów i sił elektromotorycznych.

1. Prawo pierwsze. Dla wielkości chwilowych prądów, schodzących się w jednym punkcie, pierwsze prawo Kirchhoffa wyraża się w sposób następujący: suma algebraiczna prądów, w danej chwili schodzących się w jednym punkcie, równa się zeru, o ile przyływające prądy wprowadzamy do sumy z jednym znakiem, a odpływające ze znakiem przeciwnym.

Rozważmy prądy, dopływające do jednego punktu (rys. 127) i zmieniające się według prawa sinusoidy. Przy wykreślaniu sinusoid za dodatnie przyjmijmy kierunki, wskazane strzałkami na rys. 127. Wszystkie te kierunki zwrócone są do punktu rozgałęzienia. Sinusoidy, wyrażające zmienność omawianych prądów, widzimy na rys. 128.

Na zasadzie przytoczonego powyżej prawa suma algebraiczna rzędnych tych sinusoid w każdej chwili jest równa zeru. Możemy więc powiedzieć, że suma tych sinusoid stanowi sinusoidę, której rzędne równają się zeru.

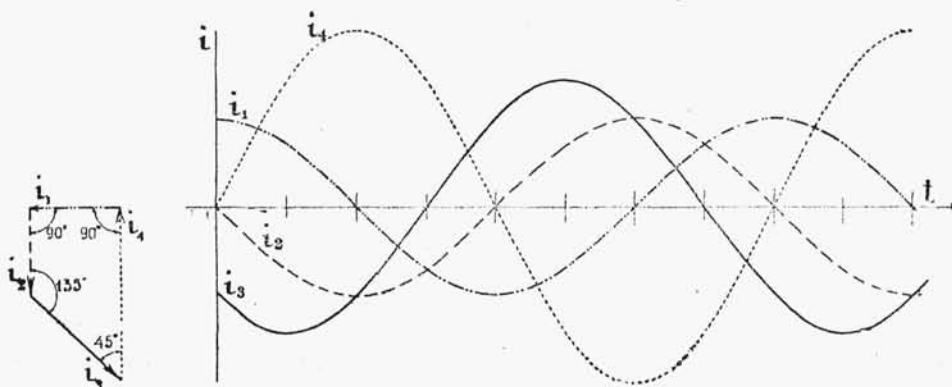
Według rozdziału XXXII, chcąc dodać sinusoidy, możemy posługiwać się wektorami, nakreślonymi pod odpowiednimi kątami. Wektor wypadkowy, który otrzymamy, dodając wektory składowe, odpowiada sinusoidzie wypadkowej.



Rys. 127.

Rzędne sinusoidy wypadkowej, jak to zaznaczyliśmy powyżej, równają się zeru, przeto i wektor wypadkowy będzie równy zeru. Na rys. 128 z lewej strony widzimy układ wektorów składowych, tworzących wielobok zamknięty.

Za pomocą tych wektorów możemy wyrazić wielkości maksymalne prądów, lub też proporcjonalne do maksymalnych wartości skutecznych prądów. Pierwsze więc prawo Kirchhoffa dla wielkości skutecznych wyrażamy w sposób następujący: Suma geometryczna wartości skutecznych



Rys. 128.

prądów, schodzących się w jednym punkcie, równa się zeru, jeżeli przy wykreślanu sinusoid kierunek dodatni został obrany dla wszystkich sinusoid jednakowy: do punktu lub od punktu krzyżowania się prądów.

Jeżeli oznaczymy wektory, wyrażające prądy składowe, przez $\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3, \hat{I}_4$ to według powyżej podanego prawa:

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 + \hat{I}_4 = 0,$$

Daszki wskazują na dodawanie geometryczne.

2. Prawo drugie. Dla chwilowych wartości prądów i sił elektromotorycznych drugie prawo Kirchhoffa wyraża się jak następuje: dla każdego obwodu zamkniętego, w sieci krzyżujących się przewodników, suma algebraiczna iloczynów z chwilowych natężeń prądów, w poszczególnych częściach obwodu; i oporności omowych tych części równa się sumie algebraicznej wszystkich sił elektromotorycznych, działających w danej chwili w tymże obwodzie zamkniętym. Prądy i siły elektromotoryczne, zwrócone w pewnym kierunku, przyjętym przy obiegu wokoło obwodu zamkniętego, otrzymują w równaniu znak dodatni, zwrócone zaś w stronę odwrotną — znak ujemny.

Wyrażając prądy i siły elektromotoryczne zmienne za pomocą sinusoid i dodając te ostatnie zgodnie z treścią przytoczonego powyżej prawa, można znowu wykonać dodawanie wektorów, wyrażając długością tych wektorów wartości skuteczne.

Zatem dla wartości skutecznych prądów zmiennych prawo powyższe wyrażone być może w sposób następujący: dla każdego obwodu zamkniętego, w sieci krzyżujących się przewodników, suma geometryczna iloczynów z wartości skutecznych natężeń prądów, w poszczególnych częściach obwodu przez oporności omowe tych części równa się sumie geometrycznej wartości skutecznych wszystkich sił elektromotorycznych działających w tymże obwodzie zamkniętym. Przy wykreślaniu sinusoid dla wszystkich prądów i sił elektromotorycznych powinien być przyjęty jednakowy kierunek dodatni wokoło obwodu.

Jeżeli w pewnym obwodzie mamy szereg oporności omowych, indukcyjności, pojemności i sił elektromotorycznych wywołanych np. obcemi polami magnetycznymi, to na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa znajdziemy:

$$\Sigma E_t + \Sigma E_{Lt} + \Sigma E_{Ct} = \Sigma i_t \cdot R.$$

$$\text{tu } E_{Lt} = - I_m \omega L \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) \quad \text{a } E_{Ct} = I_m \frac{1}{\omega C} \cdot \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right)$$

więc:

$$\Sigma E_t = \Sigma i_t R + \Sigma I_m \omega L \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) - \Sigma I_m \frac{1}{\omega C} \cdot \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right)$$

Z tego wzoru widzimy, że suma wartości chwilowych obcych sił elektromotorycznych równa się sumie wartości chwilowych wszystkich spadków napięcia: skutkiem oporności omowej, indukcyjności i pojemności.

Przechodząc do wartości skutecznych, powiemy, że suma geometryczna sił elektromotorycznych równa się sumie geometrycznej wszystkich spadków napięcia omowych, indukcyjnych i pojemnościowych.

Wzorem wyrażamy to w ten sposób:

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \dots = \hat{V}_{R'} + \hat{V}_{R''} + \dots \hat{V}_{L'} + \hat{V}_{L''} + \dots \hat{V}_{C'} + \hat{V}_{C''} + \dots$$

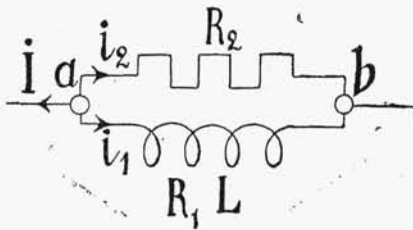
$$\text{tu: } V_R = I \cdot R; \quad V_L = I \cdot \omega L; \quad V_C = I \cdot \frac{1}{\omega C}.$$

W dalszym ciągu rozważymy kilka przykładów zastosowania praw Ohma i Kirchhoffa do prądów zmiennych.

3. Przewodnik z samoindukcją połączony równolegle z oporem omowym. Rozgałęzienie (rys. 129) ma zwojnicę połączoną równolegle z oporem bezindukcyjnym.

Oporność omowa zwojnicy R_1 , indukcyjność — L , oporność omowa oporu bez samoindukcji — R_2 . W punktach a i b mamy napięcie zmienne,

którego wartość skuteczna wynosi — V . Zagadnienie polega na wyznaczeniu



Rys. 129.

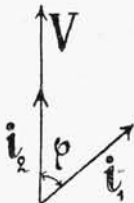
prądu I przed rozgałęzieniem. Oznaczamy przez i_1 prąd w oporze indukcyjnym, a przez i_2 w bezindukcyjnym. Wartość skuteczną tych prądów znajdziemy na zasadzie wzorów wyprowadzonych poprzednio:

$$i_1 = \frac{V}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}}, \quad i_2 = \frac{V}{R_2},$$

Prąd i_2 jest zgodny, co do fazy, z napięciem V , a prąd i_1 spóźnia się względem V o kąt φ , którego wielkość obliczymy ze wzoru:

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R_1}.$$

Układ wektorów V , i_1 , i_2 wskazuje rys. 130. Kierunki dodatnie prądów przy wykreślaniu sinusoid przyjęto takie jak wskazano na rys. 129;



Rys. 130.



Rys. 131.

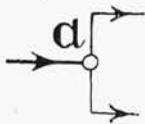
na zasadzie więc pierwszego prawa Kirchhoffa duży bok trójkąta, wykreślonego na rys. 131, wyraża wielkość prądu I . Z tego trójkąta:

$$I = \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + 2 i_1 i_2 \cos \varphi}.$$

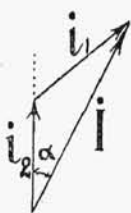
Gdybyśmy przyjęli dla prądu I kierunek odwrotny za dodatni (rys. 132), to wektor I w trójkącie miałby kierunek inny, wskazany na rys. 133. Układ wektorów w tym trójkącie oznacza, że prąd I jest sumą geometryczną prądów i_1 i i_2 .

Na rys. 134 wektory i_1 , i_2 , I poprowadzone są z jednego punktu. Kąt α , określający fazę prądu I , może być obliczony z powyższego trójkąta na zasadzie wzoru:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{i_1}{I}.$$



Rys. 132.



Rys. 133.



Rys. 134.

a w oporze bezindukcyjnym przez i_1 .

¹⁾ Oporu przewodników, łączących punkty a i b z kondensatorem, nie bierzemy pod uwagę.

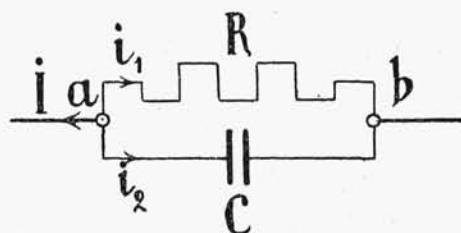
4. Kondensator, połączony równolegle z oporem omowym (rys. 135)¹⁾. Pojemność kondensatora C , oporność oporu bezindukcyjnego — R , napięcie skuteczne w punktach ab — V . Zagadnienie polega na wyznaczeniu natężenia prądu przed rozgałęzieniem.

Oznaczamy prąd w kondensatorze przez i_2 ,

Na zasadzie wzorów, wyprowadzonych poprzednio, mamy:

$$i_1 = \frac{V}{R},$$

$$i_2 = \frac{V}{\frac{1}{\omega C}}.$$



Rys. 135.

Wektory napięcia V i prądów i_1 i i_2 wskazuje rys. 136, wiadomo bowiem, że prąd w oporze bezindukcyjnym zgodny jest, co do fazy, z napięciem, a w kondensatorze wyprzedza napięcie o 90° .

Za kierunki dodatnie prądów przyjmujemy wskazane na rys. 135; wtedy duży bok trójkąta, przedstawionego na rys. 137, wyraża wielkość skuteczną prądu I :

$$I = \sqrt{i_1^2 + i_2^2},$$

a więc:

$$I = V \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}$$

Odwracając kierunek dodatni prądu I , otrzymamy wektory i_1 , I , i_2 , wskazane na rys. 138. Fazę prądu I określa kąt α , który łatwo obliczyć z trójkąta wskazanego na rys. 137:

$$\tan \alpha = \frac{i_2}{i_1},$$

albo:

$$\tan \alpha = R \cdot \omega C.$$

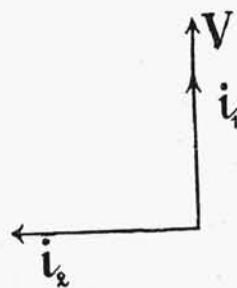
5. Kilka obwodów połączonych równolegle.

Rozważmy układ obwodów, wskazany na rys. 139. Opór bezindukcyjny jest tu połączony równolegle ze zwojnicą, mającą oporność omową i indukcyjność, oraz z kondensatorem.

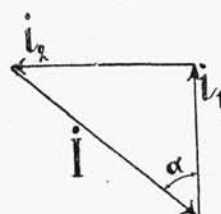
W takim układzie dla każdej z równoległych gałęzi obwodu mamy napięcie na końcach te same, lecz prądy będą różne.

Na zasadzie wywodów, podanych w rozdziale XIV, wskazany jest na rys. 140 układ wektorów poszczególnych prądów i napięcia.

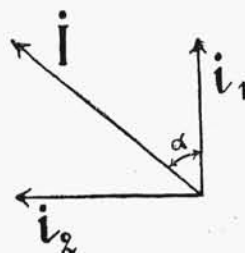
Według pierwszego prawa Kirchhoffa, prąd I w nierozgałęzionej części obwodu równa się sumie geometrycznej prądów składowych i_1 , i_2 , i_3 . Na rys. 141 dodane są trzy wektory składowe i_1 , i_2 i i_3 , wektor zaś I jest wypadkowy.



Rys. 136.

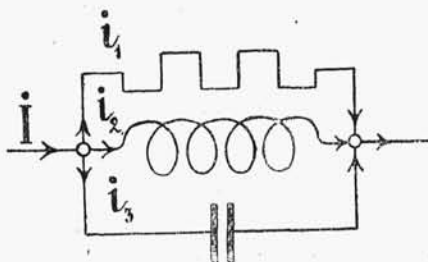


Rys. 137.



Rys. 138.

Poszczególne prądy składowe znajdujemy według poprzednio podanych wzorów, wprowadzając następujące oznaczenia: napięcie pomiędzy punktami rozgałęzienia — V , oporność obwodu bezindukcyjnego — R_1 , oporność omowa obwodu indukcyjnego R_2 , indukcyjność L , pojemność kondensatora — C , wtedy:



Rys. 139.

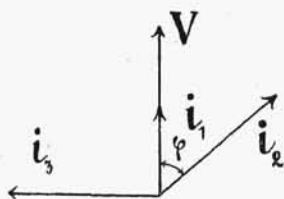
$$i_1 = \frac{V}{R_1};$$

$$i_2 = \frac{V}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}};$$

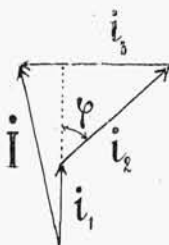
$$i_3 = \frac{V}{\frac{1}{\omega C}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R_2}$$

Wielkość prądu wypadkowego I obliczymy algebraicznie, biorąc rzuty prądów składowych na kierunek napięcia i na kierunek prostopadły do kierunku napięcia.



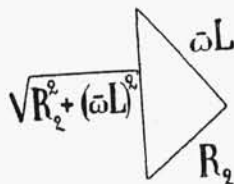
Rys. 140.



Rys. 141.



Rys. 142.



Rys. 143.

Rzuty te, wskazane na rys. 142, wynosić będą:

$$i' = i_1 + i_2 \cdot \cos \varphi$$

$$i'' = i_2 \sin \varphi - i_3$$

Gdzie $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$ znajdziemy z trójkąta na rys. 143, według wzorów:

$$\cos \varphi = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}};$$

$$\sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}}.$$

Prąd wypadkowy będzie:

$$I = \sqrt{i'^2 + i''^2}$$

Różnicę faz pomiędzy prądem wypadkowym i napięciem obliczymy ze wzoru:

$$\tan \alpha = \frac{i''}{i'}.$$

i' — jest zawsze dodatnie. i'' — może być dodatnie lub ujemne, zależnie od przewagi indukcyjności, czy pojemności, odpowiednio do tego prąd opóźnia się w fazie względem napięcia lub go wyprzedza.

6. Przewodność obwodów przy prądzie zmiennym. Każdy obwód elektryczny może być rozważany za pomocą oporności lub za pomocą przewodności.

Gdy mamy przykład ogólny obwodu rys. 120, posiadającego oporność, indukcyjność i pojemność, to ogólną przewodność — Y znajdziemy ze wzoru:

$$I = V \cdot Y.$$

stąd:

$$Y = \frac{I}{V}.$$

Ponieważ:

$$I = \frac{V}{Z},$$

więc:

$$Y = \frac{1}{Z}.$$

Z wywodów na str. 137 wiemy, że:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

przeto:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

albo krócej:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}},$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $\sqrt{R^2 + X^2}$ otrzymamy:

$$Y = \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + X^2}\right)^2 + \left(\frac{X}{R^2 + X^2}\right)^2}$$

$\frac{R}{R^2 + X^2}$ oznaczymy przez G i będziemy nazywali przewodnością rzeczywistą, a $\frac{X}{R^2 + X^2}$ oznaczymy przez B i będziemy nazywali przewodnością urojoną.

Według powyższych oznaczeń otrzymamy:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

Jeżeli wprowadzimy ten wyraz do wzoru na prąd, to znajdziemy:

$$I = V \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{(VG)^2 + (VB)^2}$$

Obok tego, że wzorów na str. 138 wypada, że rzut wektora prądu na kierunek napięcia wynosi:

$$I' = I \cos \varphi = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}} = V \cdot \frac{R}{R^2 + X^2},$$

a więc:

$$I' = V G.$$

W podobny sposób rzut wektora prądu na kierunek prostopadły do kierunku napięcia wynosi:

$$I'' = I \sin \varphi = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} = V \cdot \frac{X}{R^2 + X^2}.$$

a więc:

$$I'' = V \cdot B.$$

$$I = \sqrt{I'^2 + I''^2} \quad 1)$$

Różnica faz pomiędzy napięciem V a prądem I określa się wzorem:

$$\tan \varphi = \frac{I''}{I'} = \frac{B}{G}.$$

Jeżeli B jest dodatnie, to przeważa indukcyjność i napięcie wyprzedza w fazie prąd.

7. Wzory ogólne dla równoległego połączenia kilku oporów.

Założmy, że z jednego punktu rozgałęzia się obwód na kilka oporów, które w końcu znowu łączą się razem podobnie jak to wskazano na rys. 139, ale wszystkie opory mają oporność rzeczywistą, indukcyjność i pojemność. Stosując oznaczenia podobne jak w poprzednim paragrafie i używając znaczków 1, 2 . . . n dla odróżnienia poszczególnych równoległych gałęzi, a oznaczając przez I prąd przed rozgałęzieniem oraz przez V wspólne napięcie, możemy napisać według poprzednich wywodów, że rzuty poszczególnych prądów na kierunek napięcia wypadną:

$$I_1' = Vg_1, I_2' = Vg_2 \text{ i t. d. } \dots I_n' = Vg_n.$$

Rzuty prądów na kierunek prostopadły do napięcia będą:

$$I_1'' = Vb_1, I_2'' = Vb_2 \text{ i t. d. } \dots I_n'' = Vb_n.$$

Dodając naprzód rzuty poszczególne pomiędzy sobą algebraicznie, a potem te sumy jako dwa wektory prostopadłe do siebie dodając geometrycznie, otrzymamy:

$$I = \sqrt{(Vg_1 + Vg_2 + \dots + Vg_n)^2 + (Vb_1 + Vb_2 + \dots + Vb_n)^2}$$

czyli:

$$I = V \sqrt{(g_1 + g_2 + \dots + g_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2}$$

albo krócej:

$$I = V \sqrt{(\Sigma g)^2 + (\Sigma b)^2}$$

1) I' — jest to prąd mocny czyli watowy I'' — prąd bezmocny czyli bezwatowy patrz dalej rozdział XXVIII.

Różnicę faz pomiędzy ogólnym prądem i napięciem obliczymy ze wzoru:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\Sigma b}{\Sigma g}.$$

Σg — jest zawsze liczbą dodatnią. Σb może być dodatnie lub ujemne zależnie od tego, co będzie przeważało indukcyjność czy pojemność.

8. Rezonans prądów w obwodach rozgałęzionych. Rozważmy dwa przewody połączone równolegle pomiędzy dwoma punktami rozgałęzienia. Oba przewody mają wszystkie własności oporność rzeczywistą, indukcyjność i pojemność.

Jeżeli przewodność rzeczywista tych przewodów jest g_1 i g_2 , a urojona b_1 i b_2 , to według wzorów poprzedniego paragrafu, prąd przed rozgałęzieniem wynosi:

$$I = V \sqrt{(g_1 + g_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$$

Jeżeli $b_1 + b_2 = 0$, to

$$I = V (g_1 + g_2)$$

mamy wtedy prąd I zgodny w fazie z napięciem.

Taki przypadek nazywamy rezonansem prądów, gdyż wtedy $b_1 = -b_2$ i $Vb_1 = -Vb_2$; a Vb_1 i $-Vb_2$ są to prądy bezwątowe przesunięte względem napięcia o ćwierć okresu w przeciwnie strony, w tym przypadku one są równe i znoszą się. Zostają tylko składowe, zgodne w fazie z napięciem.

Na szczególną uwagę zasługuje rezonans prądów przy małych bardzo opornościach (omowych) rzeczywistych, gdy jeden przewód stanowi cewkę indukcyjną a drugi kondensator z tą cewką równolegle połączony.

Wtedy w przybliżeniu:

$$g_1 = g_2 = 0; \quad b_1 = \frac{1}{\omega L}; \quad b_2 = -\omega C.$$

Przy rezonansie, liczbowo:

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C$$

stąd

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

a prąd:

$$I = V \cdot 0 = 0$$

Prąd całkiem nie dopływa do takiego układu, a pomimo to wewnątrz krążą znaczne prądy bezwątowe, określone wzorem:

$$I_1 = I_2 = \frac{V}{\omega L} = V \omega C.$$

Takie zjawisko zachodzi jednak tylko przy pewnej częstotliwości prądu, określonej podanym wyżej wzorem na ω . Jeżeli częstotliwość oznaczmy przez f , to mając na względzie, że $\omega = 2\pi f$, przy rezonansie wypadnie:

$$2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

a więc:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Ten sam warunek co dla rezonansu napięć.

9. Wyrażenie oporności obwodu przez przewodność. Mamy pewien obwód, którego przewodność rzeczywista wynosi — G , a przewodność urojona — B . Obliczyć oporność rzeczywistą — R urojoną — X i pozorną — Z dla tego obwodu.

Ze wzorów na str 151 mamy

$$\frac{R}{R^2 + X^2} = G; \quad \frac{X}{R^2 + X^2} = B$$

Podnosząc oba wzory do kwadratu i dodając, otrzymamy:

$$\frac{1}{R^2 + X^2} = G^2 + B^2$$

Przy podstawieniu we wzory poprzednie wypadnie:

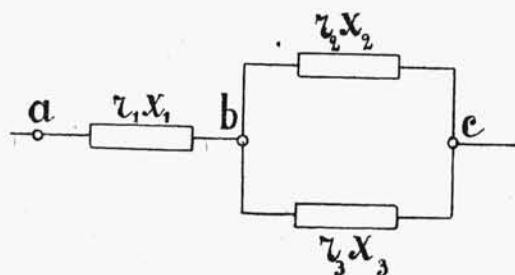
$$R(G^2 + B^2) = G; \quad X(G^2 + B^2) = B.$$

Stąd:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}; \quad a \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}.$$

$$Z = \sqrt{\frac{G^2}{(G^2 + B^2)^2} + \frac{B^2}{(G^2 + B^2)^2}}.$$

10. Wyznaczenie pozornej oporności wypadkowej dla szeregowo-równoległego połączenia. Na rys. 144 wskazany jest układ połączeń i oznaczenia oporności rzeczywistych i urojonych poszczególnych oporów. Przewodność części górnej rozgałęzienia oznaczmy przez g_1 i b_1 , a części dolnej przez g_2 i b_2 . Według poprzednich wywodów:



Rys. 144.

$$g_2 = \frac{r_2}{r_2^2 + x_2^2},$$

$$b_2 = \frac{x_2}{r_2^2 + x_2^2},$$

$$g_3 = \frac{r_3}{r_3^2 + x_3^2},$$

$$b_3 = \frac{x_3}{r_3^2 + x_3^2}.$$

Ogólne przewodności zespołu dwóch równoległych gałęzi wypadną:

$$g = g_2 + g_3 \text{ i } b = b_2 + b_3$$

a zastępcze oporności będą:

$$r' = \frac{g}{g^2 + b^2} ; x' = \frac{b}{g^2 + b^2} .$$

Po tych przekształceniach mamy teraz z opornościami r_1, x_1 połączone w szereg oporności r' i x' , więc ogólne oporności układu wypadną:

$$r = r_1 + r' \text{ i } x = x_1 + x' ,$$

a

$$Z = \sqrt{r^2 + x^2} .$$
