

ROZDZIAŁ XIV.

Prawo Ohma dla prądów zmiennych.

Mówiąc o prądach zmiennych będę miał na myśli prądy zmienne okresowo, według prawa sinusoidy,¹⁾ o natężeniu jednakowym na całej nierozgałęzionej części obwodu.

Dla tego rodzaju prądów prawa Ohma, podane dla wartości prądów i napięć w pewnej chwili, stosują się we wszystkich swoich postaciach bez zastrzeżeń.

W praktyce jednak, przyrządy pomiarowe wskazują wartości skuteczne prądów i napięć; konieczną więc jest rzeczą znaleźć wzory, wyrażające związki pomiędzy wartościami skutecznymi.

Chcąc ułatwić czytelnikowi zapoznanie się z temi związkami i dać mu możliwość głębszego ujęcia samego przedmiotu, będę posługiwał się równoległe dwoma metodami, stosowanymi przy prądach zmiennych: wykreślną i analityczną. Aby zaś nie przerywać biegu rozumowań, przesunąłem szereg zasadniczych wyjaśnień, dotyczących metody wykreślniej do rozdziału ostatniego.²⁾

Przy prądach zmiennych należy rozważyć szczegółowo wpływ dwu nowych czynników, o których nie było mowy przy prądach stałych, a mianowicie samoindukcji i pojemności.

Przy prądach stałych oba te czynniki nie mają żadnego znaczenia, gdyż pole magnetyczne jest również stałe, a pojemność przewodników nie odgrywa tu żadnej roli, — prąd stały przez idealny izolator nie przepływa.

¹⁾ W rzeczywistości prądy zmienne mniej lub więcej odbiegają od prawa zmienności sinusoidalnej, zwykle jednak odchylenia są niewielkie, wobec czego można posilkować się wynikami rozumowań, opartych na założeniu ścisłej zgodności zmiany prądu z prawem sinusoidy. W przypadkach wyjątkowych należy uciec się do rozkładu prądów niesinusoidalnie zmiennych na kilka prądów sinusoidalnie zmiennych o różnych okresach i różnej wartości maksymalnej.

²⁾ Czytelnicy, nieobeznani ze sposobem wykreślnego przedstawiania zjawisk sinusoidalnie zmiennych, powinni zapoznać się z nim przed przystąpieniem do czytania tego rozdziału.

Dla uwydatnienia wpływu poszczególnych czynników na przebieg prądu zmiennego, rozważymy przedewszystkiem kolejno kilka prostych przypadków.

1. Przewodnik posiada tylko oporność omową. Założmy przede-
wszystkiem, że przewodnik nie posiada ani samoindukcji, ani pojemności,
lecz tylko oporność omową (rys. 107); wtedy wzór dla prądu w pewnej
chwili według prawa Ohma będzie:

$$i_t = \frac{v_t}{R}$$

a więc:

$$v_t = i_t \cdot R$$

Założmy następnie, że prąd zmienia się według prawa sinusoidy, a więc
natężenie jego w danej chwili wyrazi się wzorem:

$$i_t = I_m \cdot \sin \frac{2 \pi t}{T},$$



gdzie I_m oznacza maksymalną wartość natężenia
prądu, T — okres zmienności:

Rys. 107.

Podstawiając wyrażenie powyższe we wzór na v_t , otrzymamy:

$$v_t = I_m \cdot R \sin \frac{2 \pi t}{T}.$$

Ponieważ $I_m \cdot R$ jest wielkością stałą, z tego więc wzoru wynika, że
i napięcie będzie się zmieniało według prawa sinusoidy, a wielkość ma-
ksymalną osiągnie przy $t = \frac{T}{4}$, gdyż wówczas:

$$\frac{2 \pi t}{T} = \frac{\pi}{2} \text{ i } \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Maximum napięcia wynosi:

$$V_m = I_m \cdot R$$

Wprowadzając zamiast maksymalnych wartości skuteczne¹⁾ prądu i na-
pięcia V i I , otrzymamy:

$$\sqrt{2} V = \sqrt{2} I \cdot R,$$

a więc:

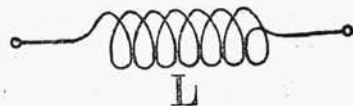
$$V = I \cdot R,$$

czyli:

$$I = \frac{V}{R}$$

W tym przypadku prawo Ohma dla wielkości skutecznych prądu
zmiennego pozostaje takie samo, jak przy prądzie stałym.

2. Przewodnik ma tylko indukcyjność. Założmy, że mamy prze-
wodnik, który nie posiada ani oporności
omowej ani pojemności, lecz tylko (rys. 108)
indukcyjność L .



Rys. 108.

W tym przypadku zastosujemy prawo
Ohma w postaci, uwzględniającej siły elek-

1) Patrz rozdział I.

tromotoryczne w obwodzie, a mianowicie mamy tu siłę elektromotoryczną samoindukcji, którą oznaczymy przez E_s .

Prawo Ohma dla natężenia prądu w danej chwili jest następujące:

$$i_t = \frac{v_t + E_{Lt}}{R},$$

albo:

$$v_t + E_{Lt} = i_t \cdot R,$$

ponieważ jednak założyliśmy, że $R=0$, więc:

$$v_t + E_{Lt} = 0 \quad \dots \quad (a)$$

Z rozdziału zaś VIII wiemy, że:

$$E_{Lt} = -L \cdot \frac{d i_t}{d t}.$$

Założmy, że prąd zmienia się według prawa sinusoidy:

$$i_t = I_m \cdot \sin \frac{2 \pi t}{T}.$$

Otrzymamy wtedy:

$$\frac{d i_t}{d t} = I_m \cdot \frac{2 \pi}{T} \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T},$$

$$E_{Lt} = -L \cdot I_m \cdot \frac{2 \pi}{T} \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T}$$

Ponieważ:

$$-\cos \frac{2 \pi t}{T} = \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

więc:

$$E_{Lt} = L \cdot I_m \cdot \frac{2 \pi}{T} \cdot \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Jeżeli $\frac{2 \pi}{T}$ oznaczymy przez ω , to:¹⁾

$$E_{Lt} = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Podstawiając wyraz powyższy we wzór (a), otrzymamy dla napięcia na końcach przewodnika, wyrażenie następujące:

$$v_t = -I_m \cdot \omega \cdot L \cdot \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right)$$

¹⁾ T-okres zmienności prądu, $\frac{1}{T} = f$ — liczba okresów prądu na sekundę, czyli tak zwana częstotliwość prądu. $\frac{2}{T} = z$ — wyraża liczbę zmian kierunku prądu na sekundę, $\frac{2 \pi}{T} = \omega$ — szybkość kątowa wektora wyrażającego wielkość sinusoidalnie zmienną. ω — nazywamy krótko pulsacją. Mając na względzie powyższe symbole zamiast wyrazu $\frac{2 \pi}{T}$ można napisać: $2 \pi f$, albo $z \pi$ czy też krótko — ω . Ponieważ ostatnie oznaczenie jest najkrótsze, więc będziemy go w dalszym ciągu wszędzie stosowali.

albo, mając na względzie, że:

$$-\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right),$$

otrzymamy:

$$v_t = I_m \cdot \omega \cdot L \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right).$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie zmienia się sinusoidalnie, ale jest przesunięte w fazie względem prądu o ćwierć okresu naprzód, cały bowiem okres odpowiada 2π . Przy $t=0$:

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

przeto napięcie będzie wtedy maksymalne i z powyższego wynika, że:

$$V_m = I_m \cdot \omega L,$$

skąd:

$$I_m = \frac{V_m}{\omega L}.$$

Wprowadzając, zamiast maksymalnych, wartości skuteczne prądu i napięcia, otrzymamy:

$$I \cdot \sqrt{2} = \frac{V \cdot \sqrt{2}}{\omega L},$$

albo:

$$I = \frac{V}{\omega L}.$$

Wyraz ωL nazywamy opornością indukcyjną¹⁾ przewodnika. Oporność ta zależy od własności indukcyjnych przewodnika, wyrażonych przez współczynnik L , i od własności prądu zmiennego. Oporność indukcyjna jest wprost proporcjonalna do liczby zmian prądu na sekundę. Nadto wielkość tego oporu zależy od postaci krzywej prądu, albowiem podany tu wzór stosuje się ściśle tylko do prądu sinusoidalnie zmiennego.

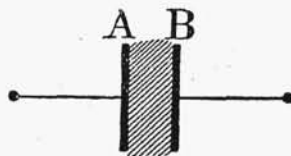
3. Przewodnik posiada tylko pojemność. Rozważmy prąd zmienny, przepływający przez warstwę izolatora idealnego pomiędzy płytkami A i B (rys. 109). Pojemność utworzonego w ten sposób kondensatora niech będzie C . Przewodniki, doprowadzające prąd, nie mają ani samoindukcji, ani oporności omowej.

Z rozdziału IX wiadomo, że prąd, płynący w danej chwili przez kondensator, wyraża się wzorem:

$$i_t = C \cdot \frac{dv_t}{dt}.$$

Załóżmy, jak poprzednio, że prąd ten będzie sinusoidalnie zmienny, że więc:

$$i_t = I_m \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}.$$



Rys. 109.

¹⁾ Stosując wyrazy, przyjęte w wielu obcych językach można go nazwać induktancją, albo reaktancją indukcyjną.

Podstawiając ten wzór w równanie poprzednie, otrzymamy:

$$I_m \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \frac{1}{C} = \frac{d v_t}{d t},$$

skąd:

$$d v_t = \frac{1}{C} \cdot I_m \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} d t.$$

Po zcałkowaniu zaś będziemy mieli: ¹⁾

$$v_t = -\frac{1}{C} \cdot I_m \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Oznaczając $\frac{2\pi}{T}$ przez ω i uwzględniając na względzie, że:

$$-\cos \frac{2\pi t}{T} = \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right).$$

otrzymamy:

$$v_t = I_m \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie zmienia się również sinusoidalnie, ale jest ono przesunięte w fazie względem prądu o ćwierć okresu wstecz.

Przy $t = 0$:

$$\sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -1,$$

przeto w tej chwili napięcie będzie maksymalne. Bezwzględna jego wartość niezależnie od znaku wyrazi się wzorem:

$$V_m = \frac{I_m}{\omega \cdot C}.$$

Wprowadzając zaś wartości skuteczne zamiast maksymalnych, znajdziemy:

$$V = \frac{I}{\omega \cdot C}.$$

Lub też, sprowadzając ten wzór do zwykłej postaci prawa Ohma, otrzymamy:

$$I = \frac{V}{\frac{1}{\omega \cdot C}}$$

albo:

$$I = V \cdot \omega \cdot C$$

Wyraz $\frac{1}{\omega C}$ nazywamy opornością kondensatora, albo opornością pojemnościową.²⁾

¹⁾ Stałą całkowania zakładamy = 0, ponieważ w ten sposób otrzymane wzory opowiadają przypadkom najczęściej spotykanym w praktyce.

²⁾ Stosując wyraz, przyjęty w wielu obcych językach, możnaby nazwać go pojemnością lub reaktancją pojemnościową.

Oporność ta zależy od związanych z pojemnością własności drogi prądu, która w tym razie częściowo przechodzi przez izolator, a nadto od rodzaju samego prądu: od liczby zmian na sekundę i od postaci krzywej prądu.

Oporność pojemnościowa jest tem mniejszą im większa jest liczba zmian prądu na sekundę, odwrotnie jak przy oporności indukcyjnej, rozważanej poprzednio.

4. Zestawienie powyższych trzech przypadków. We wszystkich trzech przypadkach, rozważanych powyżej, przyjmowaliśmy dla prądu prawo zmienności sinusoidalnej, wyrażonej wzorem:

$$i_t = I_m \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}$$

Przy takim prądzie otrzymywaliśmy wzory dla napięć różne:
W pierwszym przypadku, gdy przewodnik posiadał tylko oporność omową.

$$v_t = I_m R \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}$$

Gdy miał tylko samoindukcję:

$$v_t = I_m \omega L \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} \right).$$

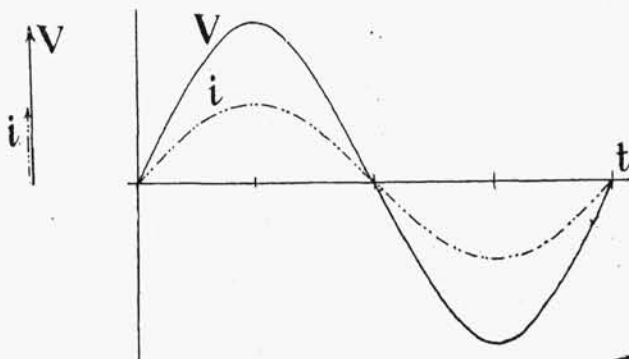
Przy samej zaś tylko pojemności:

$$v_t = I_m \frac{1}{\omega C} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right).$$

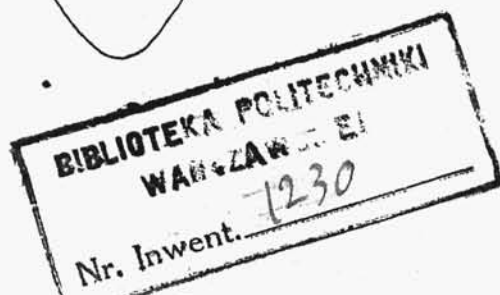
Wzory prądów i napięć możemy wyrazić za pomocą wykresów odkładając czas na odciętych, a na rzędnych napięcie i natężenie.

Gdybyśmy przy powyższych rozważaniach chcieli mieć wspólny wzór dla napięcia to musielibyśmy zakładać prądy rozmaicie przesunięte w fazie. Łatwo sprawdzić, że gdy dla wszystkich powyższych przykładów weźmiemy:

$$v_t = I_m \sin \frac{2\pi t}{T},$$



Rys. 110



to w przewodniku z opornością omową otrzymamy prąd:

$$i_t = I_m \sin \frac{2\pi t}{T},$$

w przewodniku z samoindukcją:

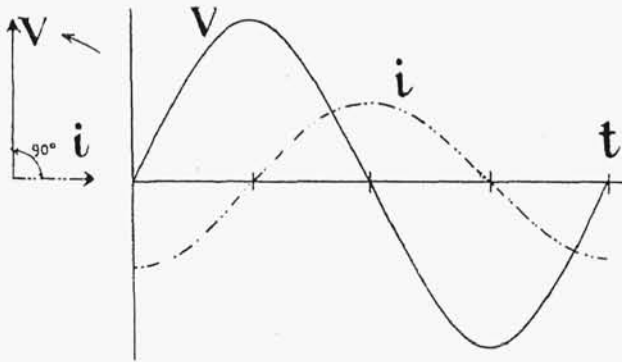
$$i_t = I_m \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

a w pojemności:

$$i_t = I_m \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2} \right).$$

Rysunek 110 stosuje się do pierwszego przypadku, gdy mamy do czynienia tylko z opornością omową, wtedy fazy są zgodne.

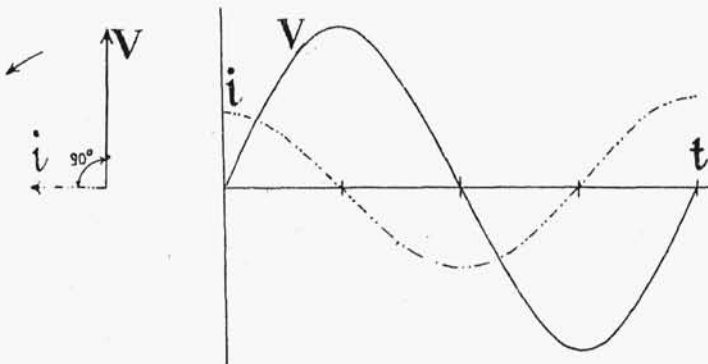
Rysunek 111 dotyczy przewodnika z samoindukcją. Sinusoidy prądu i napięcia są tu przesunięte jedna względem drugiej o ćwierć okresu i napięcie wyprzedza prąd.



Rys. 111

To samo możemy wyrazić inaczej, mówiąc, że prąd spóźnia się względem napięcia o ćwierć okresu.

Rysunek 112 stosuje się do prądu w kondensatorze. Mamy tu znowu różnicę faz, wynoszącą ćwierć okresu, lecz sinusoida napięcia jest przesunięta.



• Rys. 112.

w przeciwną stronę; tu prąd wyprzedza napięcie o ćwierć okresu lub inaczej — napięcie spóźnia się względem prądu o ćwierć okresu.

We wzorach matematycznych różnica faz uwydatnia się wyraźnie przez dodawanie i odejmowanie od $\frac{2\pi t}{T}$ kąta $\frac{\pi}{2}$.

Omawiane tu własności prądów zmiennych można też przedstawić za pomocą wektorów, obracających się w ten sposób, że jeden pełny obrót każdego wektora odbywa się w ciągu jednego okresu trwania prądu¹⁾.

Stosownie do układu sinusoid na rys. 110, 111 i 112, odpowiednie wektory w pewnej chwili przedstawiają się tak, jak to wskazano obok na tych samych rysunkach.

Mając na względzie powyższy układ wektorów, mówimy nieraz, że w obwodach bez samoindukcji i pojemności wektory napięcia i prądu są zgodne; w obwodach z samoindukcją wektor prądu jest obrócony względem wektora napięcia o 90° wstecz,²⁾ a w obwodach z pojemnością wektor prądu jest obrócony względem wektora napięcia o 90° naprzód.

Zestawmy jeszcze wzory, wyrażające związek wartości skutecznych prądu i napięcia w rozmaitych przypadkach:

$$I = \frac{V}{R}, \quad I = \frac{V}{\omega L}, \quad I = \frac{V}{\frac{1}{\omega C}}.$$

Pierwszy z tych wzorów wskazuje, że oporność obwodu nie zależy od szybkości zmian prądu, a nawet przy bliższem rozważeniu sprawy łatwo się przekonać, że nie zależy także i od kształtu krzywej, słowem, że wzór zachowuje swoją postać dla wszelkich prądów zmiennych.

Dwa wzory następne dotyczą ściśle tylko prądów sinusoidalnych, a wielkość oporności zależy od szybkości zmian prądu. Wszystkie wyrazy oporów przy podstawieniu odpowiednich jednostek dają oczywiście wyniki wyrażone w omach.

Przykłady. 1. Obliczmy indukcyjną oporność przewodnika dla prądu sinusoidalnie zmiennego o częstotliwości $f = 50$. Indukcyjność wynosi $L = 0,003185$ henra.

Według wyżej podanych wzorów mamy:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314.$$

$$\omega L = 314 \cdot 0,003185 = 1 \text{ om}.$$

Widzimy więc, że, mała indukcyjność stanowi już opór 1 om.

2. Obliczmy jeszcze pojemnościową oporność kondensatora, którego pojemność $C = 3185$ mikrofaradów, dla takiego samego prądu.

¹⁾ O wektorach, w zastosowaniu do rozważania prądów zmiennych, patrz rozdział XXXII. Obrót wektorów zakładamy wszędzie odwrotny do ruchu wskazówek zegara.

²⁾ Naprzód, rozumie się, w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara.

Przedewszystkiem zauważymy, że $3185 \text{ mikrofaradów} = 3185 \cdot 10^{-6} \text{ faradów}$, więc:

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 3185 \cdot 10^{-6}} = 1 \text{ om.}$$

Widzimy więc, że opór pojemnościowy 1 om. ma bardzo duży kondensator.

5. Przewodnik z opornością omową i indukcyjnością. Gdy przewodnik posiada jednocześnie oporność omową i indukcyjność (rys. 113), to na zasadzie prawa Ohma prąd w chwili t będzie:



stąd:

$$i_t = \frac{v_t + E_{Lt}}{R},$$

$$v_t = i_t \cdot R - E_{Lt}.$$

Lecz:

$$E_{Lt} = -L \cdot \frac{di_t}{dt},$$

R L

Rys. 113.

zatem:

$$v_t = i_t R + L \frac{di_t}{dt}.$$

Gdy prąd jest sinusoidalnie zmienny,

$$i_t = I_m \cdot \sin \frac{2\pi t}{T},$$

$$\frac{di_t}{dt} = I_m \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} = I_m \omega \cos \frac{2\pi t}{T},$$

więc:

$$v_t = I_m \cdot R \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} + I_m \omega \cdot L \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} \quad . . . \quad (a)$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie, w zależności od czasu, wyraża się krzywą, której rzędne są sumą sinusoidy i cosinusoidy; suma ta tworzy zawsze sinusoidę, którą można wyrazić za pomocą wzoru:

$$v_t = A \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) \quad . . . \quad (b)$$

Czynniki A i φ możemy wyznaczyć w sposób następujący: Z powyższego równania, po przekształceniu sinusa sumy kątów, otrzymamy:

$$v_t = A \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} \cdot \cos \varphi + A \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} \cdot \sin \varphi \quad . . . \quad (c)$$

Zestawiając równania (a) i (c), będziemy mieli:

$$A \cdot \cos \varphi = I_m \cdot R$$

$$A \cdot \sin \varphi = I_m \cdot \omega L.$$

Jeżeli uwzględnimy, że:

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi,$$

to z powyższych dwóch równań wynika, że:

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R},$$

a następnie:

$$A^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = (I_m \cdot R)^2 + I_m^2 \cdot (\omega L)^2.$$

Ponieważ:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

więc:

$$A = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Podstawiając ten wyraz dla A w równaniu (b), otrzymamy dla napięcia na końcówkach przewodnika wzór następujący:

$$v_t = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

albo:

$$v_t = V_m \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right).$$

Z tego wzoru widzimy, że napięcie zmienia się sinusoidalnie i wyprzedza prąd o kąt φ , który stanowi różnicę faz pomiędzy prądem i napięciem.

Zakładając w równaniu (d):

$$\sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) = 1,$$

otrzymamy wartość maksymalną wielkości napięcia:

$$V_m = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

lub też skuteczne napięcie:

$$V = I \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

skąd:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}},$$

albo krócej:

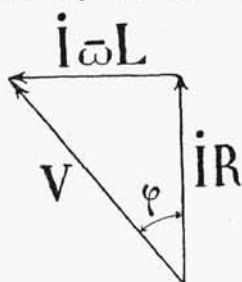
$$I = \frac{V}{Z}.$$

$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ stanowi całkowitą oporność przewodnika dla prądu zmiennego czyli oporność pozorną. Wyraz ten inaczej nazywamy impedancją.

Do tego samego wyniku można dojść jeszcze inną drogą.

Zwróćmy się do wzoru (a), wyrażającego napięcie v_t . Sinusoidę wypadkową, przedstawiającą zmienność napięcia v_t , możemy otrzymać, dodając

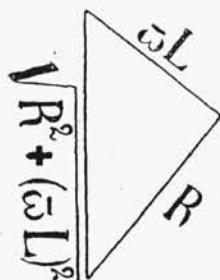
wektory sinusoid składowych, przyczem należy mieć na względzie, że cosinoida jest sinusoidą przesuniętą o ćwierć okresu naprzód. Na rys. 114 widzimy układ odpowiednich wektorów. Z trójkąta prostokątnego wynika, że:



$$V = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}.$$

Układ wektorów wskazuje, że napięcie wyprzedza prąd o kąt φ . Kąt ten jest tym większy, im większa jest oporność indukcyjna w porównaniu do oporności omowej.



Wartości skuteczne napięcia i prądu są $\sqrt{2}$ razy mniejsze od maksymalnych, więc oczywiście ten sam trójkąt tylko w innej skali może być zastosowany do wartości skutecznych.

Podobny trójkąt (rys. 115) może służyć również do wyznaczenia oporności wypadkowej z oporności składowych.

Rys. 114 i 115

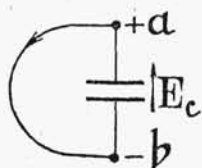
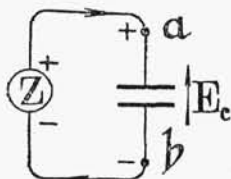
6. Kondensator włączony w obwód za pomocą przewodników, posiadających oporność omową.



Rys. 116

Obwód składa się z kondensatora o pojemności C i z przewodników, doprowadzających prąd, których oporność omową wynosi R omów, samoindukcji nie uwzględniamy (rys. 116.)

W celu zastosowania prawa Ohma w rozważanym przypadku, należy uprzytomnić sobie, że kondensator jest przyrządem, w którym odbywają się przemiany energii.¹⁾ Kondensator, połączony ze źródłem prądu o stałym napięciu, ładuje się (rys. 117), otrzymując pewną ilość energii. Stosownie do tego, co mówiliśmy o siłach elektromotorycznych w rozdziale IV, jest w nim wtedy czynna siła elektromotoryczna, E_c zwrócona przeciw prądowi.



Rys. 117 i 118

Gdy okładki kondensatora naładowanego połączymy między sobą za pomocą drutu (rys. 118), prąd będzie przebiegał zgodnie z siłą elektromotoryczną E_c kondensator będzie się wyładowywał, przetwarzając zawartą w nim energię na ciepło Joule'a.

¹⁾ Patrz rozdział XXI.

Z powyższego rozumowania widzimy, że siła elektromotoryczna kondensatora jest odwrotna względem napięcia, o ile kierunek tegoż przyjmujemy od końcówki o wyższym potencjale do końcówki o potencjale niższym (od *a* do *b* wewnątrz kondensatora).

Wielkość siły elektromotorycznej E_c przyjmujemy za równą napięciu na końcówkach, ponieważ zakładamy, że przemiana energii w kondensatorze da się całkowicie wyrazić za pomocą siły elektromotorycznej E_c .

Mając te uwagi na względzie, wróćmy do obwodu, wskazanego na rys. 116. Załóżmy, że w obwodzie przebiega prąd sinusoidalny:

$$i_t = I_m \cdot \sin \frac{2 \pi t}{T}.$$

Wtedy napięcie, na okładkach kondensatora, jak wiemy z przykładu 3 w niniejszym rozdziale, wynosi:

$$v_t = I_m \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Wobec tego siła elektromotoryczna kondensatora będzie:

$$E_{ct} = -v_t,$$

$$E_{ct} = I_m \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T}.$$

Uwzględniając tę siłę elektromotoryczną w kondensatorze, prąd w obwodzie *a b* (rys. 113), według prawa Ohma, wyrażamy wzorem:

$$i_t = \frac{v_t + E_{ct}}{R},$$

stąd:

$$v_t = i_t \cdot R - E_{ct}.$$

Podstawiając we wzór powyższy wyrazy dla i_t i E_{ct} , otrzymamy:

$$v_t = I_m \cdot R \cdot \sin \frac{2 \pi t}{T} - I_m \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie, w zależności od czasu, wyraża się krzywą, której rzędne są sumą sinusoidy i cosinusoidy; taka suma tworzy zawsze sinusoidę, którą można wyrazić wzorem:

$$v_t = A \cdot \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} + \varphi \right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

lub:

$$v_t = A \cdot \sin \frac{2 \pi t}{T} \cdot \cos \varphi + A \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T} \cdot \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Zestawiając równania (a) i (c), będziemy mieli:

$$A \cdot \cos \varphi = I_m \cdot R$$

$$A \cdot \sin \varphi = - I_m \cdot \frac{1}{\omega C}.$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy:

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{1}{R \cdot \omega C},$$

$$A^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = I_m^2 \cdot \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right].$$

a ponieważ:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

więc:

$$A = I_m \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Podstawiając ten wyraz A w równanie (b), otrzymamy dla napięcia na końcówkach a b wzór:

$$v_t = I_m \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi \right).^{1)}$$

Z tego wzoru widzimy, że napięcie na końcówkach a b zmienia się sinusoidalnie, spóźnia się jednak względem prądu o kąt φ , który stanowi różnicę faz pomiędzy prądem i napięciem.

Wartość skuteczna napięcia będzie:

$$V = I \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

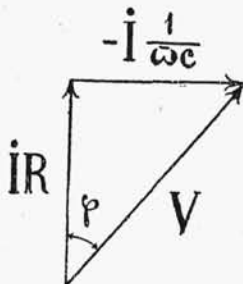
Prąd zaś:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}} \quad \text{czyli krócej } I = \frac{V}{Z}.$$

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}$ stanowi całkowitą oporność obwodu dla prądu

zmiennego; składa się ona z oporności omowej i pojemnościowej.

Do tego samego wyniku można dojść drogą dodawania wielkości sinusoidalnie zmiennych przy pomocy wektorów.



Zwróćmy się do wzoru (a). Wektor sinusoidy, wyrażającej napięcie otrzymamy, odejmując wektor cosinusoidy od wektora odpowiedniej sinusoidy.

Na rys. 119 widzimy układ wektorów i wynik odejmowania. Z trójkąta prostokątnego otrzymujemy:

$$V = I \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2},$$

$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{1}{R \cdot \omega C}.$$

Rys. 119.

¹⁾ Uwzględniamy tu, że kąt φ wypada ujemny.

Ten sam trójkąt w innej skali może służyć do wyznaczenia związku między opornościami.

7. Kondensator, włączony w szereg z przewodnikiem, posiadającym oporność omową i indukcyjność. Zwojnica o oporności omowej R i indukcyjność L włączona jest w szereg z kondensatorem o pojemności C (rys. 120).

W obwodzie tym są czynne dwie siły elektromotoryczne E_{Lt} i E_{ct} , przeto prąd, według prawa Ohma, wyrazi się wzorem:

$$i_t = \frac{v_t + E_{Lt} + E_{ct}}{R}$$

stąd:

$$v_t = i_t \cdot R - E_{Lt} - E_{ct}.$$

Zakładając, że prąd jest zmienny sinusoidalnie, otrzymamy dla sił elektromotorycznych wzory następujące:

$$E_{st} = -I_m \cdot \omega L \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad E_{ct} = I_m \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Wprowadzając wyrażenia dla E_{st} i E_{ct} w równanie dla v_t , mamy:

$$v_t = I_m \cdot R \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} + I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Postępując podobnie jak w dwóch poprzednich przypadkach, możemy przekształcić powyższe wyrażenie. wówczas otrzymamy:

$$v_t = I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right),$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Z tych wzorów widzimy, że napięcie zmienia się sinusoidalnie. Kąt φ może być tu dodatni lub ujemny, zależnie od znaku różnicy: $\omega L - \frac{1}{\omega C}$.

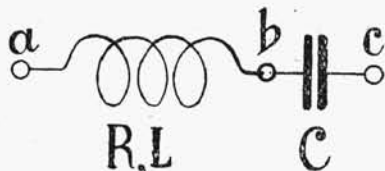
Gdy w wyrazie tym przeważa wpływ samoindukcji, φ jest dodatni, i napięcie wyprzedza prąd, gdy natomiast, przeważa pojemność, φ jest ujemny — napięcie opóźnia się względem prądu.

Skuteczna wartość prądu wyraża się wzorem:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

albo krócej:

$$I = \frac{V}{Z}$$



Rys. 120.

Mianownik tego wzoru stanowi tak zwaną oporność pozorną czyli impedancję.

Oznaczamy ją zwykle krótko przez Z .

R — nazywamy opornością rzeczywistą, czyli resistancją, $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ oznaczamy krótko przez $X^1)$ i nazywamy opornością urojoną czyli reaktancją, przy tych oznaczeniach:

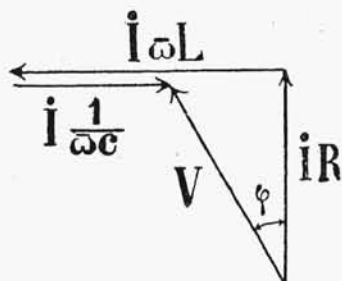
$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Chcąc rozwiązać zagadnienie powyższe za pomocą dodawania wektorów, należy wzór dla v_t przedstawić w sposób następujący:

$$v_t = I_m \cdot R \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} + I_m \cdot \omega L \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} - I_m \frac{1}{\omega C} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Stąd wynika, że dla otrzymania wektora V należy dodać wektory $I \cdot R$ i $I \omega L$ i odjąć wektor $I \frac{1}{\omega C}$, uwzględniając ich kierunki.

Na rys. 121 widzimy układ tych wektorów. Wypadkowy wektor V da się łatwo wyznaczyć z trójkąta prostokątnego, również jak i kąt φ :



Rys. 121.

$$V = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2},$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X}{R}$$

Ten sam trójkąt w innej skali pozwala wyznaczyć zależność pomiędzy opornościami.

8. Rezonans napięć. Przy rozważaniu obwodu (rys. 120), składającego się ze zwojnicy z opornością omową i indukcyjnością oraz z kondensatora, na szczególną uwagę zasługuje jeszcze przypadek, gdy wpływy indukcyjności i pojemności na przebieg prądu wzajemnie się znoszą.

Dostatecznie jest spojrzeć na wyprowadzone poprzednio równania dla I i $\tan \varphi$, ażeby się przekonać, że przy:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C},$$

$$I = \frac{V}{R}, \text{ a } \tan \varphi = 0.$$

Obwód zachowuje się w ten sposób, jak gdyby zawierał tylko oporność omową — R .

¹⁾ $\omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C = X.$

Taki przypadek nazywamy **rezonansem napięć**. Siły elektromotoryczne samoindukcji i pojemności, które zawsze mają kierunki przeciwne,¹⁾ tym razem są co do wielkości równe, a więc w równaniu prądu wzajemnie się znoszą.

Przy danych L i C rezonans zachodzi tylko przy dokładnie określonej częstotliwości prądu, czyniącej zadość wyżej podanemu równaniu.

Z tego równania wynika, że:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}, \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

więc:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Wzór ten wyraża długość okresu zmienności prądu, przy której następuje rezonans.

W praktyce elektrotechnicznej duże znaczenie w przypadku rezonansu mają napięcia, powstające pomiędzy punktami a i b , a także b i c (rys 120).

Z tego, co było powiedziane w §§ 5 i 6 rozdziału niniejszego, wynika, że:

$$V_{ab} = I \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

$$V_{bc} = I \cdot \frac{1}{\omega C}$$

Napięcia te przy odpowiednich warunkach mogą osiągnąć znaczne wartości przy niewielkim napięciu na końcówkach a i c .

Przykład. Mamy obwód (rys. 120), w którym $r = 5 \Omega$, $L = 1,5$ henra $C = 2$ mikrofarady, a $i = 10$ amperów.

W tych warunkach rezonans zachodzić będzie, gdy:²⁾

$$T = 2,3,14 \sqrt{1,5 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{92},$$

więc: $f = 92$.

Oporność pozorna zwojnicy a i b jest wtedy:

$$\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 865 \Omega.$$

Oporność pojemnościowa kondensatora będzie prawie taka sama gdyż $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, wpływ zaś oporności omowej — R jest bardzo mały.

¹⁾ Widzimy to ze wzorów, przytoczonych w § 7 niniejszego rozdziału.

²⁾ Pojemność wyrażamy tu w faradach.

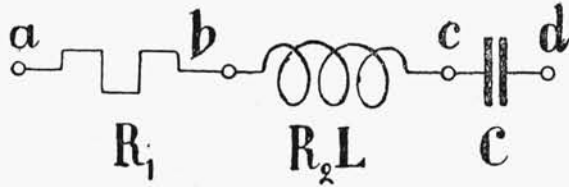
Na podstawie wyników tych obliczeń napięcie na końcówkach całego obwodu będzie:

$$V_{ac} = 10 \times 5 = 50 \text{ V},$$

napięcie zaś na zwojnicy i na kondensatorze:

$$V_{ab} \text{ prawie} = V_{bc} = 10 \times 865 = 8650 \text{ V}.$$

9. Połączenie szeregowe różnych oporów. Część obwodu $a d$ (rys. 122) składa się z oporności omowej pomiędzy punktami $a b$, cewki z samoindukcją pomiędzy $b i c$ i kondensatora pomiędzy punktami $c i d$.



Rys. 122

Oporność omowa w części $a b$ jest R_1 , a w części $b c$ — R_2 , indukcyjność L i pojemność kondensatora C .

Ponieważ prąd w danym przypadku nigdzie się nie rozgałęzia, natężenie jego pomiędzy końcówkami $a i d$ w każdej chwili wszędzie jest jednakowe. Stąd wynika, że również wartość skuteczna prądu będzie wszędzie jednakowa i nie będzie różnicy faz pomiędzy prądami w rozmaitych miejscach.

Oznaczmy przez V z odpowiednimi znaczkami potencjały w różnych punktach obwodu, a przez v — napięcia.

Mając na względzie wielkości w danej chwili t , możemy napisać równanie następujące:¹⁾

$$(V_{at} - V_{bt}) + (V_{bt} - V_{ct}) + (V_{ct} - V_{dt}) = (V_{at} - V_{dt}),$$

lub:

$$v_{abt} + v_{bct} + v_{cdt} = v_{adt}.$$

Z powyższych równań wynika, że chcąc otrzymać napięcie skuteczne v_{ad} , należy dodać geometrycznie napięcia skuteczne v_{ab} , v_{bc} i v_{cd} .

Na rys. 123 wskazany jest układ wektorów, wyrażających składowe napięcia i prąd I , a na rys. 124 — dodawanie tych wektorów. Wypadkowy wektor \overline{BC} wyraża napięcie V_{ad} .

Z trójkąta ABC mamy:

$$\overline{BC}^2 = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}$$

¹⁾ Usuwając nawiasy, łatwo się przekonamy, że lewa strona równa się prawej.

Z wywodów w paragrafach poprzednich wiemy, że:

$$V_{ab} = I \cdot R_1,$$

$$V_{cd} = I \cdot \frac{1}{\omega C};$$

rzut wektora V_{bc} na kierunek wektora prądu równa się:

$$I \cdot R_2,$$

rzut zaś tego samego wektora na kierunek prostopadły do wektora prądu równa się:

$$I \cdot \omega \cdot L.$$

Mając to na uwadze, łatwo spostrzeżemy z rys. 124, że:

$$\overline{AB} \text{ wyraża } I \cdot \omega L - I \cdot \frac{1}{\omega C}$$

$$\text{ i } \overline{AC} \text{ wyraża } I \cdot R_1 + I \cdot R_2,$$

więc:

$$V_{ad} = \sqrt{(I \cdot R_1 + I \cdot R_2)^2 + (I \cdot \omega L - I \cdot \frac{1}{\omega C})^2},$$

lub:

$$V_{ad} = I \cdot \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

Różnica faz pomiędzy V_{ad} i I wyraża się kątem φ . Według rys. 124:

$$\text{tang } \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_1 + R_2}$$

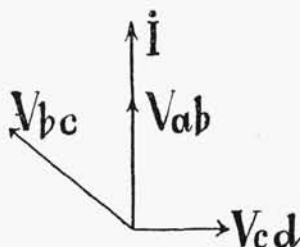
10. Wzór ogólny dla szeregowego połączenia oporów. Na podstawie tego przykładu łatwo ułożyć wzór ogólny dla obwodu, składającego się z dowolnej liczby różnych oporów, połączonych w szereg.

Załóżmy, że w pewnym obwodzie nierozgałęzionym mamy szereg oporów omowych: $R_1, R_2 \dots R_n$, oporów indukcyjnych ze współczynnikami $L_1, L_2 \dots L_n$ i pojemności: $C_1, C_2 \dots C_n$.

Z powyższego przykładu widzimy, że wektory, wyrażające iloczyny: $I \cdot R$ skierowane są wszystkie zgodnie z wektorem prądu, natomiast iloczyny $I \cdot \omega L$ i $I \cdot \frac{1}{\omega C}$ skierowane są do niego prostopadłe, lecz w strony przeciwnie, na rys. 124 $I \cdot \omega L$ w lewo, a $I \cdot \frac{1}{\omega C}$ w prawo.

Przy takim układzie wektorów, napięcie na końcach obwodu będzie:

$$V = I \sqrt{(\Sigma R)^2 + \left(\omega \Sigma L - \frac{1}{\omega} \Sigma \frac{1}{C} \right)^2}.$$



Rys. 123.



Rys. 124.

Kąt, wyrażający różnicę faz pomiędzy napięciem V i prądem I , obliczymy według wzoru:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\omega \cdot \Sigma L - \frac{1}{\omega} \Sigma \frac{1}{C}}{\Sigma R}.$$

Gdy w obwodzie niema pojemności należy zamiast C podstawić nieskończoność, jeżeli zaś niema indukcyjności to zamiast L zero.

Z powyższych wzorów wynika oporność wypadkowa przy szeregowym połączeniu:

$$Z = \frac{V}{I} = \sqrt{(\Sigma R)^2 + \left(\omega \Sigma L - \frac{1}{\omega} \cdot \Sigma \frac{1}{C} \right)^2}$$

Jeżeli wprowadzimy skrócone oznaczenia na $\omega L = X_L$ i $\frac{1}{\omega C} = X_C$, to

$$Z = \sqrt{(\Sigma R)^2 + (\Sigma X_L - \Sigma X_C)^2}$$

albo ogólnie, oznaczając oporność urojoną przez X , wypadnie:

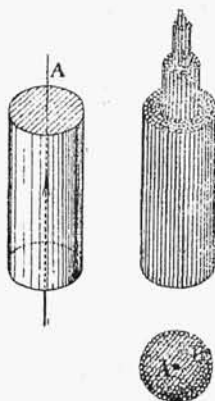
$$Z = \sqrt{(\Sigma R)^2 + (\Sigma X)^2}$$

11. Oporność omowa przewodników dla prądów szybkowzmiennych. Jeżeli mamy do czynienia z prądami, których kierunki zmieniają się miliony, tysiące, a nawet chociażby tylko setki razy

na sekundę, to łatwo spostrzegamy wpływ siły elektromotorycznej samoindukcji powstającej wewnątrz przewodnika z prądem, na rozkład natężenia prądu w przekroju poprzecznym tego przewodnika.

Rozważmy przewodnik znacznej grubości, w którym przebiega prąd o natężeniu stopniowo wzrastającym. W tych warunkach, jak wiemy, powstaje w przewodniku siła elektromotoryczna samoindukcji przeciwna prądowi. Ta siła elektromotoryczna w przekroju poprzecznym przewodnika nie jest wszędzie jednakowa. Największa siła elektromotoryczna samoindukcji działa wzdłuż osi A przewodnika, najmniejsza zaś na obwodzie.

Rys. 125. Rys. 126.



Stwierdzić to można, opierając się np. na wyobrażeniu o indukcji, jako o skutku przecinania przewodników przez linie magnetyczne.

Przewodnik o przekroju pełnym (rys. 125) można przedstawić sobie jako wiązkę oddzielnych drutów (rys. 126), w których płyną prądy składowe, stanowiące razem prąd pełnego przewodnika.

W każdym z poszczególnych drutów powstawać będzie siła elektromotoryczna indukcji pod wpływem własnych linii magnetycznych i linii drutów otaczających.

Jeżeli założymy, że wszystkie prądy składowe są jednakowe, to najsilniejsze działanie indukcyjne będzie na drut A , znajdujący się w środku, ponieważ średnia odległość jego od innych jest najmniejsza.

Pod wpływem takiego rozkładu sił elektromotorycznych indukcji, gęstość prądu przypadająca na 1 cm^2 przekroju drutu będzie oczywiście niejednakowa w całym przekroju. W pobliżu powierzchni drutu gęstość będzie największa.

Skupienie się prądu w pobliżu powierzchni przewodników spostrzegł lord Kelvin. Nazywa on to zjawisko „skin-effect“, co w tłumaczeniu dosłownem znaczy działanie naskórkowe, krócej naskórkowość.

Pod wpływem tej własności prądów szybko zmiennych, oporność omowa przewodników dla takich prądów nie da się obliczyć według wzoru:

$$r = \rho \frac{l}{s} \cdot 1)$$

W tym przypadku uwzględnić należy, że gęstość prądu jest różna w różnych miejscach przekroju. Zwykle oporność obliczoną według powyższego wzoru należy pomnożyć przez współczynnik α większy od jedności.

W tablicy poniżej podany jest ów współczynnik α dla drutów miedzianych przy różnej wartości stosunku $\frac{d^2}{T}$ 2)

$\frac{d^2}{T}$	α	$\frac{d^2}{T}$	α
0	1,0000	1620	1,8628
20	1,0000	2000	2,0430
80	1,0001	2420	2,2190
180	1,0258	2880	2,3937
320	1,0805	5120	3,0956
500	1,1747	8000	3,7940
720	1,3180	18000	5,5732
980	1,4920	32000	7,3250
1280	1,6778		

Przy $\frac{d^2}{T} > 32000$ oporność omowa drutu okrągłego równa jest oporności rury, której średnica zewnętrzna równa się średnicy drutu pełnego, a grubość ścianki wynosi $6,38 \sqrt{T} \text{ cm}$.

1) Patrz str. 26.

2) d — średnica drutu w cm , T okres zmienności prądu w sekundach. Liczby podane są według tablicy znajdującej się w książce: „Leçons sur l'électricité“ Er. Gerard.

Dla uniknięcia działania naskórkowego, przewodniki dla prądów szybko zmiennych (np. w przyrządach radiotelegraficznych) wykonywane są z tasemek czy rur metalowych, lub też plecione z cienkich drucików w ten sposób, by działania indukcyjne jednych drucików na drugie nawzajem się znosiły.

Gdy chodzi o prądy bardzo silne i duże przekroje przewodów, to nawet w razie stosowania prądów o normalnym okresie $\frac{1}{50}$ sek., należy mieć na względzie omawiane zjawisko. Wtedy zamiast grubych sztab o pełnym przekroju stosują się rury, albo układy wstęg miedzianych.

Przewodniki żelazne, posiadające wielką przenikalność magnetyczną, wykazują w znacznie wyższym stopniu omawiane własności. Z tego względu przy prądach zmiennych należy unikać ich stosowania.
