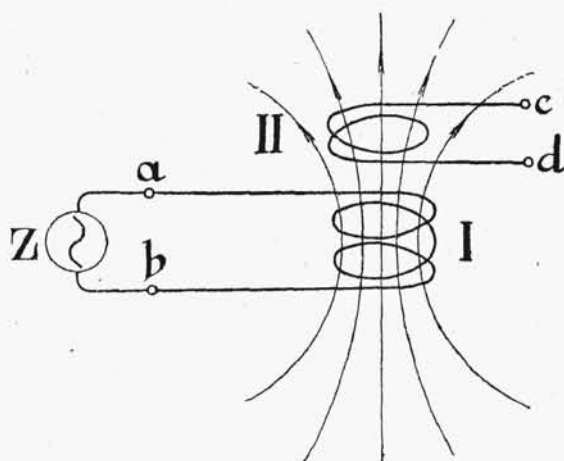


ROZDZIAŁ XXIII.

Przeniesienie pracy prądu elektrycznego z jednego obwodu na drugi.

1. Cechy zasadnicze zjawiska. Mamy dwa obwody elektryczne (rys. 241), z których jeden posiada źródło prądu Z . Obwód ze źródłem prądu będziemy nazywali obwodem pierwotnym, a obwód drugi — wtórnym.



Rys. 241.

Jeżeli w obwodzie pierwotnym przebiega prąd stały, to pole magnetyczne, wywołane przez ten prąd, jest niezmiennie, i żadnego wpływu jednego obwodu na drugi nie obserwujemy. Inaczej się sprawa przedstawia, gdy prąd w obwodzie pierwotnym zmienia się.

Rozważmy narazie przypadek, wskazany na rys. 241 gdzie obwód wtórny jest otwarty. Część linii sił magnetycznych, wywołanych przez prąd w obwodzie pierwotnym,

obejmą zwoje wtórne. Załóżmy, że każdy zwoj obejmuje jednakową liczbę linii Φ_1 i że liczba zwojów wtórnych wynosi z_2 , wtedy wobec zmienności prądu zmieniać się będzie również strumień magnetyczny, a więc w obwodzie wtórnym powstanie siła elektromotoryczna (patrz rozdz. XX):

$$E_{2t} = - \frac{d\Phi_1}{dt} \cdot z_2.$$

Ponieważ obwód jest przerwany, napięcie v_{2t} na końcówkach cd będzie równe sile elektromotorycznej:

$$v_{2t} = E_{2t} = - \frac{d\Phi_1}{dt} \cdot z_2.$$

Napięcie na końcówkach zwojnicy pierwotnej — v_1 znajdziemy, uwzględniając oporność zwojnicy pierwotnej r_1 i siłę elektromotoryczną samoindukcji — E_{st} , która tam powstaje: prąd niech będzie i_{ot} . Z prawa Ohma wynika, że w tym razie:

$$v_{1t} = i_{ot} r_1 - E_{st}.$$

Załóżmy, że każdy zwój zwojnicy pierwotnej obejmuje Φ' linii magnetycznych; gdy więc zwojnica będzie miała z_1 zwojów, otrzymamy:

$$E_{st} = - \frac{d\Phi'}{dt} \cdot z_1,$$

zatem:

$$v_{1t} = i_{ot} \cdot r_1 + \frac{d\Phi'}{dt} \cdot z_1.$$

Gdy zwojnice znajdują się bardzo blisko siebie, np. gdy jedna wstawiona jest w drugą, to można przyjąć, że $\Phi' = \Phi$, pozatem $i_{ot} \cdot r$, często bywa bardzo małe w porównaniu do v_{1t} , wtedy w przybliżeniu wypada, że:

$$v_{1t} = \frac{d\Phi}{dt} \cdot z_1.$$

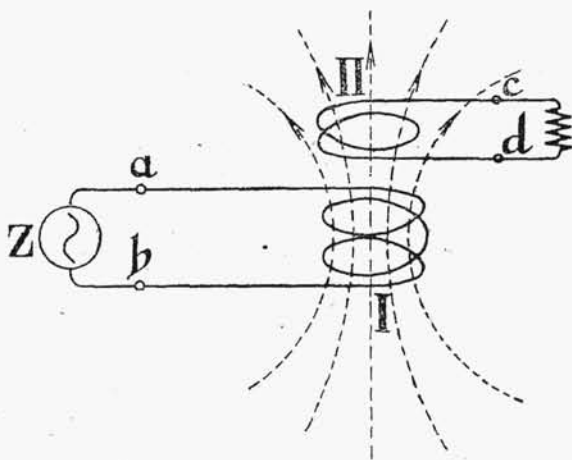
Zestawiając wyrazy dla v_1 i v_2 , otrzymamy:

$$\frac{v_{1t}}{v_{2t}} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Wzór ten wskazuje, że napięcia na tych zwojnicach są proporcjonalne do liczby zwojów zwojnic. Stosunek liczby zwojów tych zwojnic nazywamy współczynnikiem transformacji lub przekładnią.

Rozważmy teraz, co zajdzie w obwodach, gdy obwód wtórny zamkniemy (rys. 242).

W obwodzie tym powstaje prąd i_{1t} , którego kierunek według prawa Maxwell'a będzie taki, że prąd dąży do zniesienia zmiany strumienia magnetycznego, jeżeli więc np. strumień wzrasta pod wpływem wzrastającego prądu pierwotnego, to magneto-motoryczna siła prądu wtórnego będzie osłabiać strumień magnetyczny.



Rys. 242.

Skutkiem tego siła elektromotoryczna samoindukcji w obwodzie pierwotnym będzie słabsza i pierwotny prąd będzie silniejszy od tego, który przebiegałby w tym obwodzie przy otwartej wtórnej zwojnicy.

Przytem przez pole magnetyczne pewna ilość energii przeniesie się z obwodu pierwotnego do wtórnego. Oznaczamy nowy prąd w pierwotnym obwodzie przez i_{1t} i nową siłę elektromotoryczną przez E'_{st} . Wtedy według prawa Ohma:

$$v_{1t} = i_{1t} \cdot r - E'_{st}.$$

Jeżeli pomnożymy obie części równania przez v_{1t} i uwzględnimy, że siła elektromotoryczna samoindukcji przy wzrastaniu prądu jest odwrotna względem kierunku prądu, to otrzymamy:

$$v_{1t} \cdot i_{1t} = i_{1t}^2 \cdot r + E'_{st} \cdot i_{1t}.$$

Moc $E'_{st} \cdot i_{1t}$ możemy przekształcić. Zakładamy, że strumień magnetyczny Φ_t obejmuje jednocześnie zwoje pierwotnej i wtórnej zwojnicy. Strumień ten powstał pod wpływem dwóch sił magnetomotorycznych: pierwotnej i wtórnej zwojnicy, jeżeli więc oznaczmy przez R oporność magnetyczną obwodu strumienia Φ_t , to możemy napisać wzór:

$$\Phi_t = \frac{1,25 (z_1 \cdot i_{1t} - z_2 \cdot i_{2t})}{R}.$$

Założmy:

$$z_1 \cdot i_{1t} - z_2 \cdot i_{2t} = z_1 \cdot i'_{1t}.$$

Prąd i'_{1t} możemy nazwać prądem magnesującym zwojnicy pierwotnej, a $i_{1t}'' = i_{1t} - i'_{1t}$, prądem roboczym. Wtedy równanie energetyczne będzie miało postać:

$$v_{1t} \cdot i_{1t} = i_{1t}^2 \cdot r + E'_{st} \cdot i'_{1t} + E'_{st} \cdot i_{1t}''.$$

Wzór ten wskazuje wyraźnie, że moc prądu $v_{1t} \cdot i_{1t}$, dostarczona do zwojnicy pierwotnej, w ilości $i_{1t}^2 \cdot r$ przechodzi w ciepło Joule'a w drutach tej zwojnicy, w ilości $E'_{st} \cdot i'_{1t}$ ¹⁾ zmienia się w energię pola magnetycznego, a $E'_{st} \cdot i_{1t}''$ przechodzi do obwodu wtórnego.

Na podstawie poprzednich wzorów wyraz mocy $E'_{st} \cdot i_{1t}''$ łatwo jest przekształcić. Ze wzoru dla amperozwojów wynika, że:

$$z_2 \cdot i_{2t} = z_1 \cdot i_{1t} - z_1 \cdot i'_{1t},$$

albo:

$$i_{2t} = \frac{z_1}{z_2} (i_{1t} - i'_{1t}) = \frac{z_1}{z_2} \cdot i_{1t}'' ,$$

a więc:

$$i_{1t}'' = \frac{z_2}{z_1} \cdot i_{2t}.$$

¹⁾ Patrz rozdział XXII.

Siłę elektromotoryczną E'_{st} można wyrazić przez taką siłę, powstającą w zwojnicy wtórnej E_{2t} mając na względzie, że obie siły elektromotoryczne wywołuje ten sam strumień magnetyczny, lecz w zwojnicach o różnej liczbie zwojów:

$$E'_{st} = \frac{E_{2t}}{z_2} \cdot z_1.$$

Z tych wzorów wynika, że:

$$E_{st}' \cdot i_{1t}'' = \frac{E_{2t}}{z_2} \cdot z_1 \cdot \frac{z_2}{z_1} i_{2t} = E_{2t} \cdot i_{2t}.$$

Iloczyn $E_{1t} \cdot i_2$ wyraża moc prądu w zwojnicy wtórnej.

Zasługuje tu jeszcze na szczególną uwagę wzór:

$$i'' = \frac{z_2}{z_1} \cdot i_{2t}.$$

Gdy obie zwojnice nawiniemy na żelazie i obwód magnetyczny zamkniemy, to z powodu małego oporu magnetycznego, i'_{1t} wypada bardzo małe i w przybliżeniu możemy wtedy przyjąć, że:

$$i_{1t} = i''_{1t},$$

wówczas:

$$\frac{i_{1t}}{i_{2t}} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Wzór ten wskazuje, że prądy, powstające wtedy w zwojnicach, są odwrotnie proporcjonalne do liczby zwojów zwojnic.

2. Spółczynnik indukcji wzajemnej. Przy rozważaniu działania indukcyjnego dwóch obwodów na siebie, posługujemy się nieraz pojęciem współczynnika indukcji wzajemnej, który jest analogiczny do współczynnika samoindukcji i wyraża się w tych samych jednostkach.

Założmy np., że obwód drugi (rys. 242) obejmuje Φ linii magnetycznych, wytworzonych przez obwód pierwszy. Jeżeli obwód wtórny ma z zwojów, a Φ_1, Φ_2 i t. d. są liczbami linii magnetycznych, objętych przez każdy zwój to $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_z$. Liczba linii Φ jest proporcjonalna do i_1 ; oznaczmy współczynnik proporcjonalności przez M , wtedy:

$$\Phi = M \cdot i_1.$$

Gdy Φ zmienia się, to w obwodzie drugim powstaje siła elektromotoryczna:

$$E_2 = - \frac{d\Phi}{dt}$$

czyli:

$$E_2 = - \frac{d(M \cdot i_1)}{dt}.$$

O ile obwód magnetyczny, w którym przebiega strumień Φ , posiada opór przeważnie w powietrzu, to M jest stałe i:

$$E_2 = -M \cdot \frac{di_1}{dt}.$$

Spółczynnik M nazywamy współczynnikiem indukcji wzajemnej, lub indukcyjnością wzajemną.

Liczebnie równa się on ilości linii, wywołanych przez prąd o natężeniu równym jednostce w zwojnicy pierwszej, a objętych przez obwód zwojnicy drugiej. Można łatwo stwierdzić przez rozumowanie, że współczynnik indukcji wzajemnej zwojnicy pierwszej względem drugiej i naodwrot, współczynnik indukcji wzajemnej zwojnicy drugiej [względem pierwszej], są jednakowe.

Oznaczmy jeden współczynnik przez M_1 , a drugi przez M_2 i założmy, że w pierwszym przypadku rozważamy siłę elektromotoryczną, powstającą w drugiej zwojnicy pod wpływem pierwszej, a w drugim przypadku — w pierwszej zwojnicy pod wpływem drugiej; że w jednej zwojnicy płynie stały prąd i_1 , a w drugiej stały prąd i_2 . Liczba linii sił, wywołanych przez zwojnicę pierwszą i objętych przez wszystkie zwoje drugiej, wyrażamy wzorem:

$$M_1 \cdot i_1.$$

Gdybyśmy zwojnicę drugą usunęli na nieskończenie wielką odległość od zwojnicy pierwszej, to wszystkie linie wyszłyby z obwodu tej zwojnicy, i według rozdziału XX-go praca wykonana przy tym przesuwaniu wyniosłaby:

$$M_1 \cdot i_1 \cdot i_2.$$

Moglibyśmy wykonać tę samą pracę, odsuwając pierwszą zwojnicę od drugiej. Wtedy wyraz tej pracy byłby inny.

Liczbę linii sił, wywołanych przez zwojnicę drugą, a objętych przez zwoje pierwszej wyrażamy wzorem:

$$M_2 \cdot i_2.$$

Praca więc, wykonana przy odsuwaniu pierwszej zwojnicy do nieskończoności, wyniesie:

$$M_2 \cdot i_2 \cdot i_1.$$

Ponieważ te dwa wzory wyrażają jedno i to samo, zatem:

$$M_1 \cdot i_1 \cdot i_2 = M_2 \cdot i_2 \cdot i_1,$$

stąd:

$$M_1 = M_2.$$

Spółczynnik więc indukcji wzajemnej dwu obwodów jednocześnie określa wpływ obwodu pierwszego na drugi i drugiego na pierwszy.

Rozważmy jeszcze dokładniej jeden przypadek szczególny.

Założmy, że oba obwody są tak ustawione, by wszystkie linie, objęte przez pierwszą zwojnicę, objęta również zwojnica druga i naodwrot.¹⁾ Oznaczamy następnie przez Φ_1 strumień magnetyczny, wywołany przez prąd pierwszej zwojnicy, gdy natężenie tego prądu równa się jednostce, a przez Φ_2 strumień magnetyczny, wywołany przez prąd drugiej zwojnicy, gdy natężenie jego też równa się jednostce. Liczba zwojów pierwszej zwojnicy niech będzie z_1 , a drugiej z_2 .

Wtedy strumień magnetyczny, wywołany przez jednostkę prądu pierwszej zwojnicy, i objęty przez obwód drugiej zwojnicy, która ma z_2 zwojów, będzie:

$$\Phi_1 \cdot z_2.$$

Iloczyn ten jest współczynnikiem wzajemnej indukcji zwojnicy pierwszej względem drugiej.

Liczba linii magnetycznych, wywołanych przez jednostkę prądu w zwojnicy drugiej, a objęta przez obwód zwojnicy pierwszej, będzie:

$$\Phi_2 \cdot z_1.$$

Jest to współczynnik wzajemnej indukcji zwojnicy drugiej względem pierwszej.

Oba te współczynniki są sobie równe, gdyż liczby linii Φ_1 i Φ_2 są wprost proporcjonalne do liczby zwojów odpowiedniej zwojnicy; każdy z dwóch powyższych współczynników równa się więc pewnej stałej, pomnożonej przez iloczyn liczb zwojów obu zwojnic. Oznaczamy tę stałą przez K ; wtedy:

$$\Phi_1 \cdot z_2 = K \cdot z_1 \cdot z_2,$$

$$\Phi_2 \cdot z_1 = K \cdot z_2 \cdot z_1.$$

Wielkość K zależy tu od oporności magnetycznej, która w obu przypadkach jest ta sama.

Oznaczmy współczynnik indukcji wzajemnej przez M ; wtedy:

$$M = \Phi_1 \cdot z_2 = \Phi_2 \cdot z_1.$$

Znajdziemy związek pomiędzy współczynnikami samoindukcji i współczynnikiem indukcji wzajemnej.

Współczynniki samoindukcji z łatwością można wyrazić, pamiętając, że liczebnie jest to ilość linii, objętych przez dany obwód, gdy po tym obwodzie przepływa prąd, którego natężenie równa się jednostce.

Dla pierwszej zwojnicy współczynnik samoindukcji będzie:

$$L_1 = \Phi_1 \cdot z_1,$$

dla drugiej zaś zwojnicy:

$$L_2 = \Phi_2 \cdot z_2,$$

¹⁾ Praktycznie można to osiągnąć tylko w przybliżeniu.

Z powyższych równań wynika, że:

$$M^2 = \Phi_1 \cdot \Phi_2 z_1 \cdot z_2,$$

$$L_1 \cdot L_2 = \Phi_1 \cdot z_1 \cdot \Phi_2 z_2,$$

skąd:

$$M^2 = L_1 \cdot L_2,$$

$$M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}.$$

Gdy zwojnice są tak ustawione, że nie wszystkie linie sił, wywołane przez jedną zwojnicę, przechodzą przez drugą, liczba linii w wyrazach dla współczynnika indukcji wzajemnej jest mniejszą od liczby linii w wyrazach dla samoindukcji i wtedy:

$$M < \sqrt{L_1 \cdot L_2}.$$

W ten sposób $\sqrt{L_1 \cdot L_2}$ wyraża największą wartość teoretyczną indukcyjności wzajemnej dwóch zwojnic. Wartość ta w praktyce nigdy nie może być osiągnięta, ponieważ, ustawiając zwojnice nawet jaknajbliżej obok siebie, nie zdołamy osiągnąć tego, aby wszystkie linie sił, wywołane w jednej zwojnicy, przeszły do wnętrza drugiej.

Gdy współczynnik indukcji wzajemnej zbliża się do największej swej wartości $\sqrt{L_1 \cdot L_2}$, mówimy, że takie obwody są sprzęgnięte ściśle.

Stosunek:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

nazywamy współczynnikiem sprzężenia. k zmienia się w granicach od 0 do 1. W transformatorach prądów silnych k jest bliskie do 1, a przy prądach szybkozmiennych stosuje się k wynoszące setne części jednostki.

Wogóle, wielkość współczynnika indukcji wzajemnej dwu zwojnic zależy tylko od cech geometrycznych budowy zwojnic, od ich położenia względem siebie i od magnetycznych własności ciał, otaczających oba obwody.

3. Przeniesienie pracy prądu z jednego obwodu na drugi przy prądach zmiennych sinusoidalnie. Rozważmy układ dwu zwojnic (rys. 241). Jeżeli obwód zwojnicy wtórnej nie jest zamknięty, to w tych warunkach nie ma ona żadnego wpływu na zwojnicę pierwotną i, według rozdz. XIV § 5, wartość skuteczna prądu w zwojnicy pierwotnej wyrazi się wzorem:

$$I = \frac{v_1}{\sqrt{r_1^2 + (\omega \cdot L_1)^2}}.$$

Prąd spóźnia się w fazie względem napięcia o kąt φ , którego tangens wyraża się wzorem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L_1}{r_1}.$$

W zwojnicy wtórnej powstaje tylko siła elektromotoryczna indukcji. Wielkość tej siły elektromotorycznej E_2 możemy wyrazić w bardzo prosty sposób za pomocą indukcyjności wzajemnej. Z tego, co wiemy o tym współczynniku, wypada, że:

$$E_{2t} = -M \cdot \frac{di_{ot}}{dt}.$$

Jeżeli zmienność prądu wyrazi się wzorem:

$$i_{ot} = I_{om} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T},$$

to siła elektromotoryczna zwojnicy wtórnej będzie:

$$E_{2t} = -M \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot I_{om} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} \dots \dots \dots (1)$$

Stąd dla wartości skutecznych otrzymamy wzór:

$$E_2 = M \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot I_0 = I_0 \omega M.$$

Oznaczamy przez v_2 napięcie na końcówkach zwojnicy wtórnej. Prądu w tej zwojnicy nie ma, więc:

$$v_2 = E_2 = I_0 \cdot \omega M.$$

Dla zwojnicy pierwotnej:

$$v_1 = I_0 \cdot \sqrt{r_1^2 + (\omega L_1)^2}$$

Jeżeli r_1 jest bardzo małe w porównaniu do ωL_1 , to:

$$v_1 = I_0 \cdot \omega L_1.$$

Ze wzorów dla v_2 i v_1 otrzymujemy:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{L_1}{M}.$$

Jeżeli zwojnice znajdują się bardzo blisko jedna drugiej i mają liczbę zwojów jednakową, to w przybliżeniu:

$$L_1 = M,$$

a więc:

$$v_1 = v_2.$$

Jeżeli zaś zwojnicę wtórną odsuniemy od pierwotnej, to:

$$L_1 > M,$$

a stąd:

$$v_1 > v_2.$$

Że tak być musi, łatwo zrozumieć, mając na uwadze, że przy odsuwaniu zwojnicy wtórnej coraz mniejszą część strumienia magnetycznego, wywołanego przez zwojnicę pierwszą obejmuje zwojnica druga.

Rozważmy jeszcze przypadek, w którym zwojnica wtórna znajduje się bardzo blisko względem pierwotnej, a liczby zwojów są nierówne: w pierwszej liczba ta wynosi z_1 , a drugiej — z_2 . Przez Φ_1 oznaczamy strumień magnetyczny, wywołany przez jeden zwój zwojnicy pierwotnej, gdy w niej przebiega prąd, równy jednostce i objęty przez jeden zwój którejkolwiek zwojnicy.

Zgodnie z określeniem współczynników samoindukcji i indukcji wzajemnej, znajdziemy:

$$L_1 = \Phi_1 \cdot z_1 \cdot z_1,$$

$$M = \Phi_1 \cdot z_1 \cdot z_2,$$

stąd:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\Phi_1 z_1 z_1}{\Phi_1 z_1 z_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Wzór ten wskazuje, że wartości skuteczne napięć na zwojnicach mają się do siebie, jak liczby zwojów odpowiednich zwojnic.

W praktyce jest rzeczą ważną zdać sobie sprawę z układu wektorów napięcia, prądu i strumienia magnetycznego.

Jeżeli prąd wyrazimy wzorem:

$$i_{0t} = I_{0m} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T},$$

to mając na uwadze wywody rozdziału XIV § 5:

$$v_{1t} = V_{1m} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right).$$

Ze wzoru (1) w paragrafie niniejszym, uwzględniając, że $v_2 = E_2$ otrzymamy:

$$v_{2t} = -\omega M \cdot I_{0m} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Ponieważ:

$$-\cos \frac{2\pi t}{T} = \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

przeto:

$$v_{2t} = \omega M \cdot I_{0m} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

albo:

$$v_{2t} = V_{m2} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Strumień magnetyczny jest co do fazy zgodny z prądem, który go wywołuje,¹⁾ więc:

$$\Phi_{ot} = \Phi_{om} \cdot \sin \frac{2 \pi t}{T}.$$

Na zasadzie powyższych równań otrzymamy układ wektorów, wskazany na rysunku 243.

Przejdźmy teraz do przypadku, wskazanego na rys. 242. Zwojnica wtórna tworzy obwód zamknięty, a zatem w niej przebiega również prąd zmienny.

Założmy narazie, że zwojnice są bardzo blisko przysunięte do siebie; wtedy można przyjąć w przybliżeniu, że wszystkie zwoje jednej i drugiej zwojnicy obejmują ten sam strumień magnetyczny Φ_t w chwili t . Strumień ten wywołują obie zwojnice, których amperozwoje oznaczmy przez $z_1 i_{1t}$ i $z_2 i_{2t}$. Jeżeli oporność magnetyczna obwodu, w którym przebiega strumień magnetyczny, wynosi R , to:²⁾

$$\Phi_t = \frac{1,25 \cdot (z_1 \cdot i_{1t} + z_2 \cdot i_{2t})}{R}.$$

Sumę $z_1 \cdot i_{1t} + z_2 \cdot i_{2t}$ oznaczamy przez $z_1 \cdot i'_{1t}$, a prąd i'_{1t} będziemy nazywali prądem magnesującym. Wtedy:

$$\Phi_t = \frac{1,25 \cdot z_1 \cdot i'_{1t}}{R}.$$

Gdy oporność magnetyczna R jest wielkością stałą, co w wielu przypadkach można przyjąć, to, oznaczając $\frac{1,25 \cdot z_1}{R}$ przez K , otrzymamy:

$$\Phi_t = K \cdot i'_{1t}.$$

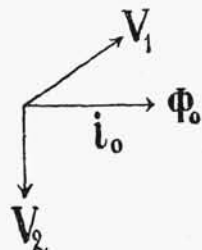
Jeżeli więc:

$$\Phi_t = \Phi_m \cdot \sin \frac{2 \pi t}{T},$$

to:

$$i'_{1t} = K \cdot \Phi_m \cdot \sin \frac{2 \pi t}{T}.$$

Założmy następnie, że obwód wtórny nie tworzy linii magnetycznych, nie skojarzonych ze zwojnicą pierwotną. Oznaczmy przez E_{2t} siłę elektromotoryczną w zwojnicy wtórnej, a przez r_2 oporność całego obwodu wtórnego.



Rys. 243.

¹⁾ Przyjmujemy, że nie ma histerezy; patrz rozdz. XXVIII § 3.

²⁾ Patrz rozdział VII.

Prąd wtórny wyznaczamy ze wzoru:

$$i_{2t} = \frac{E_{2t}}{r_2},$$

$$E_{2t} = - \frac{d \Phi_t}{dt} \cdot z_2 = - \Phi_m \cdot \frac{2 \pi}{T} \cdot z_2 \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T},$$

więc:

$$i_{2t} = - \frac{\Phi_m}{r_2} \cdot \frac{2 \pi}{T} \cdot z_2 \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T},$$

$$- \cos \frac{2 \pi t}{T} = \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

przeto:

$$i_{2t} = \frac{\Phi_m}{r_2} \cdot \frac{2 \pi}{T} \cdot z_2 \cdot \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

albo:

$$i_{2t} = I_{2m} \cdot \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \dots \cdot \dots \cdot (3)$$

Prąd w zwojnicy pierwotnej znajdziemy w sposób następujący: Według poprzednich założeń:

$$z_1 \cdot i_{1t} + z_2 \cdot i_{2t} = z_1 \cdot i'_{1t},$$

przeto:

$$z_1 \cdot i_{1t} = z_1 \cdot i'_{1t} - z_2 \cdot i_{2t},$$

albo:

$$i_{1t} = i'_{1t} - \frac{z_2}{z_1} \cdot i_{2t}.$$

Podstawiając wartość dla i'_{1t} i i_{2t} z równań poprzednich, otrzymamy:

$$i_{1t} = K \cdot \Phi_m \sin \frac{2 \pi t}{T} - \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\Phi_m}{r_2} \cdot \frac{2 \pi}{T} \cdot \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

albo krócej:

$$i_{1t} = I_m \cdot \sin \frac{2 \pi t}{T} - \frac{z_2}{z_1} \cdot I_{2m} \cdot \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \dots \cdot (4)$$

Wzór ten wskazuje, że prąd i_{1t} jest różnicą geometryczną prądów:

$$i'_{1t} \text{ i } \frac{z_2}{z_1} \cdot i_{2t}.$$

Napięcie na zwojnicy pierwotnej znajdziemy według prawa Ohma, uwzględniając siłę elektromotoryczną indukcji E_1 , wywołaną przez strumień magnetyczny w tej zwojnicy:

$$v_{1t} = i_{1t} \cdot r_1 - E_{1t} \cdot \dots \cdot \dots \cdot (5)$$

$$E_{1t} = - \frac{d \Phi_t}{dt} \cdot z_1 = - \Phi_m \cdot \frac{2 \pi}{T} \cdot z_1 \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T},$$

Oznaczmy przez r'' oporność zwojnicy wtórnej, a przez E_2 i E'_2 siły elektromotoryczne; wywołane strumieniami magnetycznymi Φ i Φ_2 ; wtedy

według prawa Ohma napięcie na końcówkach $c d$ możemy wyrazić wzorem:

$$v_{2t} = i_{2t} \cdot r''_2 - E_{2t} - E'_{2t}.$$

Zwojnica wtórna jest źródłem prądu, przeto kierunek dodatniego napięcia w tym razie jest jednak odwrotny względem tego, jaki przyjmujemy za dodatni w odbiorniku. Mając to na uwadze, piszemy wzór powyższy ze znakami odwrotnymi:

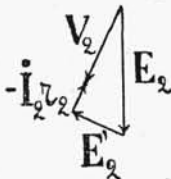
$$v_2 = -i_{1t} \cdot r''_2 + E_{2t} + E'_{2t} \dots \dots \dots (7)$$

Gdy oznaczymy siły elektromotoryczne, wywołane strumieniami magnetycznymi Φ i Φ_1 w pierwotnej zwojnicy przez E_1 i E'_1 , to w podobny sposób otrzymamy wyraz napięcia na końcówkach zwojnicy pierwotnej:

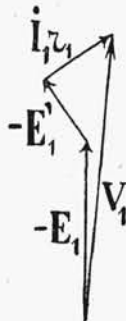
$$v_{1t} = i_{1t} \cdot r_1 - E_{1t} - E'_{1t} \dots \dots \dots (8)$$

Według przytoczonych równań można wszystkie omawiane wielkości przedstawić wykreślnie za pomocą wektorów pochylonych jeden względem drugiego pod odpowiednimi kątami.

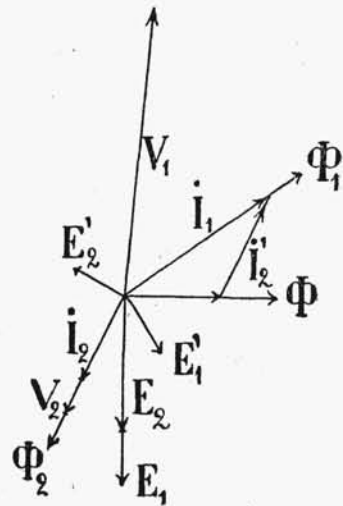
Na rys. 246. wskazane jest wykreślne rozwiązanie równania 7-go. Na rys. 247. wykreślne rozwiązanie równania 8-go, a na rys. 248. zestawienie kierunków wektorów prądów, napięć i strumieni magnetycznych.



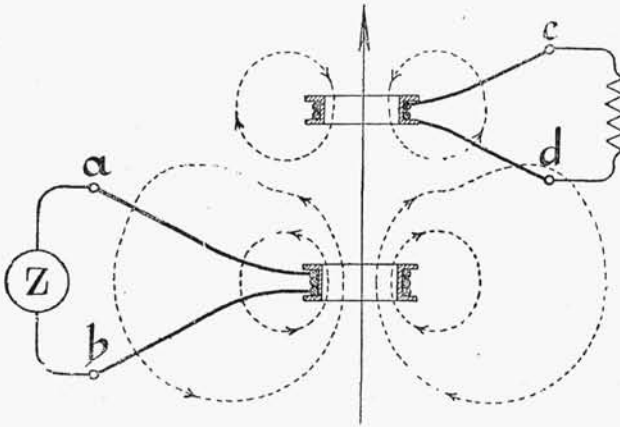
Rys. 246.



Rys. 247.



Rys. 248.



Rys. 245.

4. Obliczenie prądu pierwotnego i wtórnego w zależności od oporności obwodów sprzężonych. Oznaczamy przez R_1 , X_1 , Z_1 , oporność rzeczywistą urojoną i pozorną pierwszego obwodu i przez R_2 , X_2 , Z_2 dla drugiego obwodu. Spółczynnik indukcji wzajemnej — M .

Wpływ obwodu wtórnego na pierwotny znajdziemy według następującego rozumowania¹⁾. Prąd pierwotny wzbudza w obwodzie wtórnym siłę elektromotoryczną:

$$E_2 = I_1 \cdot \omega M.$$

Ta siła elektromotoryczna wywołuje w obwodzie wtórnym prąd według prawa Ohma:

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2}.$$

Prąd ten można rozłożyć na dwa prądy: jeden zgodny w fazie z siłą elektromotoryczną E_2 :

$$I'_2 = \frac{E_2}{Z_2} \cdot \cos \varphi = \frac{E_2}{Z_2} \cdot \frac{R_2}{Z_2},$$

a drugi przesunięty w fazie o kąt 90° względem siły elektromotorycznej E_2 :

$$I''_2 = \frac{E_2}{Z_2} \cdot \sin \varphi = \frac{E_2}{Z_2} \cdot \frac{X_2}{Z_2}$$

Prądy te będą wzbudzać przez indukcję siły elektromotoryczne w obwodzie pierwotnym:

$$E'_1 = I'_2 \omega M,$$

$$E''_1 = I''_2 \omega M.$$

Podstawiając w te wzory wyrazy na I'_2 ; I''_2 i E_2 z poprzednich równań, znajdziemy

$$E'_1 = I_1 \cdot \left(\frac{\omega M}{Z_2} \right)^2 R_2$$

$$E''_1 = I_1 \cdot \left(\frac{\omega M}{Z_2} \right)^2 X_2$$

Uwzględniając tę okoliczność, że siły elektromotoryczne indukowane są przesunięte o ćwierć okresu wstecz względem prądów indukujących, łatwo przekonać się że E'_1 jest w fazie przeciwne prądowi I_1 , a E''_1 wyprzedza prąd I_1 o ćwierć okresu.

Wobec tego wpływ tych sił elektromotorycznych można zastąpić dwoma zastępczymi opornościami, działającymi w pierwotnym obwodzie.

Jeżeli założymy że:

$$E'_1 = I_1 \cdot R',$$

to:

$$R' = \left(\frac{\omega M}{Z_2} \right)^2 R_2.$$

¹⁾ I. H. Morecroft Principles of radiocommunication.

Tu $R' =$ jest zastępcza oporność rzeczywista.
Jeżeli założymy, że

$$E''_1 = - I_1 X',$$

to:

$$X' = - \left(\frac{\omega M}{Z_2} \right)^2 \cdot X_2.$$

X' — zastępcza oporność urojona.

Zakładamy $I_1 X'$ ze znakiem minus, aby uwydatnić, że siła elektromotoryczna E''_1 działa tak jak oporność urojona ujemna, gdyż jej faza względem prądu I_1 jest taka sama, jak siły elektromotorycznej kondensatora.

Dla obliczenia prądu w obwodzie pierwotnym w obecności sprzężonego z nim obwodu wtórnego, wystarczy dodać do odpowiednich oporności obwodu pierwotnego, te oporności zastępcze, które wywołała obecność obwodu wtórnego. A więc przy sile elektromot. źródła prądu E ,

$$I_1 = \frac{E}{\sqrt{(R_1 + R')^2 + (X_1 + X')^2}}$$

a po podstawieniu wyrazów na R' i X' :

$$I_1 = \frac{E}{\sqrt{\left[R_1 + \left(\frac{\omega M}{Z_2} \right)^2 R_2 \right]^2 + \left[X_1 - \left(\frac{\omega M}{Z_2} \right)^2 X_2 \right]^2}}$$

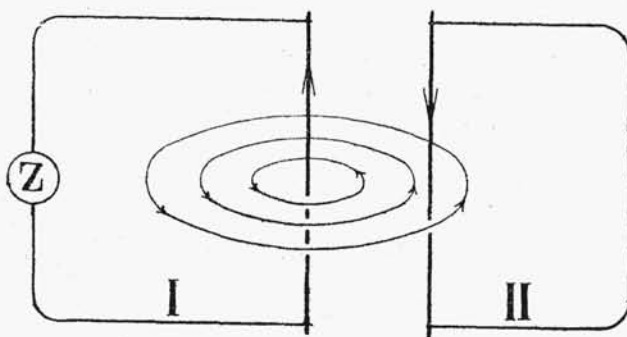
Prąd wtórny znajdziemy ze wzoru:

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2},$$

a wprowadzając wyraz na E_2 :

$$I_2 = \frac{I_1 \omega M}{Z_2}.$$

5. Działanie mechaniczne prądów pierwotnych na wtórne. Rozważmy dwa obwody, z których tylko I-szy ma źródło prądu Z (rys. 249).



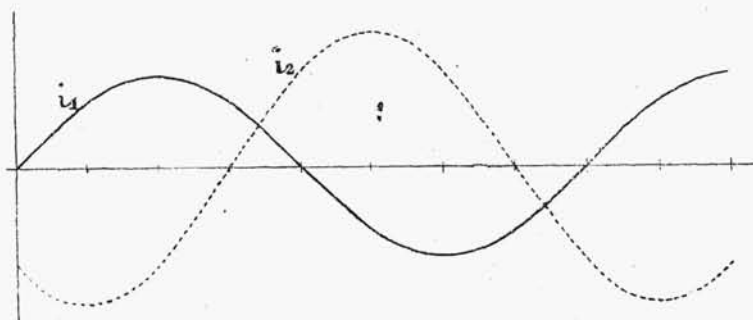
Rys 249.

Gdy w pierwszym obwodzie prąd wzrasta, to w obwodzie drugim powstaje prąd indukcyjny, który wytworzy linie sił przeciwdziałające tym, jakie doń wchodzi. W tych warunkach mamy dwa prądy idące, jak widać na rysunku, w różne strony, a takie prądy, jak

wiemy, wzajemnie się odpychają (patrz rozdział XXI, § 7). Gdyby natężenie prądu w pierwszym obwodzie zmniejszało się, to prąd, wzbudzony w drugim obwodzie, miałby kierunek odwrotny i byłby przyciągany przez prąd obwodu pierwszego.

W praktyce większe znaczenie posiadają dwie zwojnice (rys. 245), w których przebiegają prądy zmienne sinusoidalnie.

Z rozważań poprzedniego paragrafu, a w szczególności z wykresów na rys. 248 łatwo spostrzedz, że różnica faz prądów i_1 i i_2 zależy przede wszystkim od odległości zwojnic i od własności samoindukcyjnych zwojnicy wtórnej. Zawsze jednak prąd i_2 spóźnia się względem prądu i_1 więcej niż o ćwierć okresu, sinusoidy tych prądów wskazano na rys. 250.



Rys. 250.

Zastanawiając się nad tym układem prądów, spostrzegamy, że cząstki czasu, w których mają one kierunki różne, są znacznie dłuższe od tych cząstek czasu, w których kierunki prądów są zgodne, pozatem wielkość prądów jest mniejsza wtedy, gdy prądy są zgodne. Prądy niezgodne odpychają się, powyższe więc prądy będą się odpychały.

Do tego samego wniosku możemy dojść przez bardziej ściśle rozumowanie. Jeżeli prąd i_{1t} wyraża się wzorem:

$$i_{1t} = I_{im1} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T},$$

to wzór dla prądu i_{2t} wypadnie:

$$i_{2t} = I_{im2} \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi \right),$$

a siła współdziałania prądów i_1 i i_2 , jak wiemy z rozdziału XXI § 7, wyrazi się w chwili t wzorem:

$$f_t = K \cdot i_{1t} \cdot i_{2t}.$$

Średnią zaś siłę f znajdziemy, gdy uwzględnimy wynik wywodów, podanych dalej w rozdziale XXVIII z których wynika że średni iloczyn dwóch sinusoidalnie zmiennych wielkości równa się iloczynowi wartości skutecznych przez cosinus kąta różnicy faz pomiędzy temi wielkościami.

Ponieważ różnica faz pomiędzy i_1 i i_2 wynosi φ , przeto:

$$f = K \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot \cos \varphi.$$

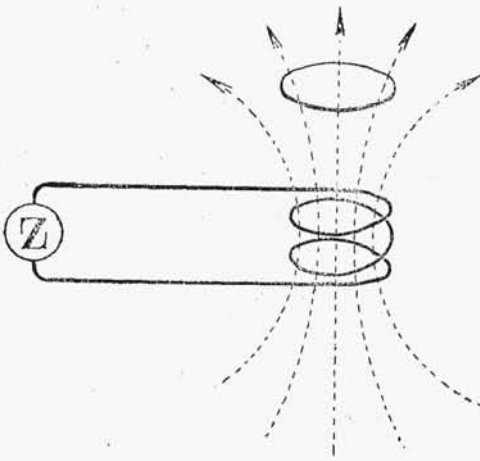
Lecz φ jest większe od 90° , zatem f jest ujemne; oznacza to, że prądy wzajemnie się odpychają.

Jeśliby obwód wtórny posiadał samoindukcję dodatkową, to i_2 spóźniełoby się względem v_2 , i kąt φ byłby jeszcze większy, siła więc odpychająca f wzrosłaby jeszcze bardziej.

6. Pierścień w polu magnetycznym zmiennem. Na szczególną uwagę zasługuje powstawanie prądów indukcyjnych w pierścieniu, umieszczonym w polu magnetycznym zmiennem (rys. 251), wywołanem przez prąd zwojnicy, którą zasila źródło Z .

Siła elektromotoryczna. Załóżmy, że strumień, objęty pierścieniem, wynosi Φ_t i zmienia się sinusoidalnie:

$$\Phi_t = \Phi_m \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}.$$



Rys. 251

W pierścieniu powstanie wtedy siła elektromotoryczna:

$$E_t = -\frac{d\Phi_t}{dt} = -\Phi_m \cdot \omega \cos \frac{2\pi t}{T},$$

albo:

$$E_t = \Phi_m \omega \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Maksymalna wielkość tej siły elektromotorycznej będzie:

$$E_m = \Phi_m \cdot \omega$$

a wartość skuteczna:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Phi_m \cdot \omega = 4,44 f \Phi_m$$

Przykład liczbowy. Niech będzie $\Phi_m = 2 \cdot 10^6$ c. g. s., częstotliwość $f = 50$.

$$\begin{aligned} E &= 4,44 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^6 \text{ c. g. s.} = \\ &= 4,44 \text{ wolta.} \end{aligned}$$

Ze względu wprost na symetrię układu, ta siła elektromotoryczna będzie bezwzględnie rozłożona jednostajnie po całym obwodzie pierścienia; jeżeli więc np. pierścień ma średnicę 20 cm, to na każdy centymetr obwodu przypadnie:

$$\frac{4,44}{\pi 20} = 0,071 \text{ wolta.}$$

Prąd indukowany w pierścieniu jednorodnym jednakowego przekroju na całym obwodzie. (rys. 251). Prąd w tym pierścieniu obliczylibyśmy, znając jego oporność omową oraz indukcyjność.

Przechodząc do wielkości chwilowych i oznaczając przez i_t — prąd, przez E_{st} — siłę elektromotoryczną samoindukcji w chwili t i wreszcie oporność omową całego obwodu pierścienia przez r , otrzymamy według prawa Ohma równanie:

$$i_t = \frac{E_t + E_{st}}{r},$$

albo:

$$E_t + E_{st} = i_t \cdot r.$$

Siły elektromotoryczne i oporność są rozłożone jednostajnie wzdłuż całego obwodu. Oznaczmy przez l długość obwodu pierścienia i podzielmy przez tę długość powyższe równanie, otrzymamy wówczas:

$$\frac{E_t}{l} + \frac{E_{st}}{l} = i_t \cdot \frac{r}{l}.$$

Założmy że:

$$\frac{E_t}{l} = E'_t, \quad \frac{E_{st}}{l} = E'_{st}, \quad \frac{r}{l} = r',$$

wtedy:

$$E'_t + E'_{st} = i_t \cdot r'. \quad \dots \dots \dots (a)$$

Wzór ten wskazuje, że w każdej cząstce pierścienia siły elektromotoryczne równoważą się ze spadkiem napięcia skutkiem oporności omowej. Pomnóżmy obie części równania przez i_t , a otrzymamy wtedy:

$$E'_t \cdot i_t + E'_{st} i_t = i_t^2 r'.$$

To równanie wyraża, że w każdej cząstce obwodu ilość energii, dostarczona z zewnątrz, zużywa się całkowicie na wytworzenie ciepła Joule'a w tej samej cząstce, słowem — źródło i odbiornik prądu zlewają się w jednym miejscu.

Spróbujmy jeszcze obliczyć napięcie pomiędzy dwoma dowolnymi punktami a i b na pierścieniu. Oznaczmy odległość pomiędzy temi pun-

ktami, wzdłuż obwodu pierścienia, przez dl , a napięcie pomiędzy niemi przez dv wtedy według prawa Ohma:

$$i_t = \frac{dv_t + E'_t \cdot dl + E'_{st} \cdot dl}{r' \cdot dl},$$

lub:

$$dv_t = i_t \cdot r' \cdot dl - E'_t \cdot dl - E'_{st} \cdot dl$$

Powróćmy do równania (a) i pomnóżmy je przez dl , otrzymamy wówczas:

$$E'_t \cdot dl + E'_{st} \cdot dl = i_t \cdot r' \cdot dl$$

Jeżeli zależność tę uwzględnimy, to otrzymamy:

$$dv_t = 0.$$

To znaczy, że napięcia pomiędzy dwoma dowolnymi punktami na pierścieniu niema. Pierścień ten, pod względem rozkładu potencjałów na nim, zachowuje się jak przewodnik naelektryzowany w zjawiskach elektrostatycznych. A jednak w pierścieniu tym jest ruch elektryczności. Odbywa się on oczywiście pod wpływem sił elektromotorycznych, które nie mogą wywołać różnicy potencjałów, ponieważ w miejscu powstania zużywają się na pokonanie oporności omowej przewodnika.

Pierścień powyższy jest odpychany przez zwojnicę do góry, jak to wynika z rozważań paragrafu poprzedniego.
